DOI: 10.18411/vntr2025-179-1

УДК 3054

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РАВНОМЕРНОСТИ МНОГОМЕРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МАШИН

Леонид Борисович Матусов
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А.Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия
matusoff.l@yandex,ru

Аннотация. *Для проектирования механизмов, машин и конструкций, оптимизации их параметров был создан метод исследования пространства параметров (метод ИПП). В основе метода лежит возможность зондировать пространство изменяемых параметров объекта точками равномерно распределенной $ЛП_\tau$- последовательности. Точки $ЛП_\tau$-последовательностей используются здесь для расчета в каждой из них математической модели исследуемой системы. В силу того, что эти точки равномерно распределены в пространстве параметров, мы получаем его равномерный обзор. Чем более равномерно распределена эта последовательность, тем более достоверную информацию о свойствах исследуемого объекта можно получить при расчете системы без увеличения количества этих расчетов в точках последовательности. Только в этом случае данные последовательности могут быть успешно использованы при решении практических задач, относящихся к теории кубатурных формул, в задачах оптимизации машин и механизмов, и т.д.*

Ключевые слова: *равномерно распределенная последовательность, моноциклический оператор, направляющая матрица.*

Работа выполнена за счет средств Государственного задания, код (шифр) научной темы, присвоенной учредителем (организацией) FFGU-2024-0016

ON SOME UNIFORMITY PROPERTIES OF MULTIDIMENSIONAL SEQUENCES FOR MULTICRITERIA MACHINE DESIGN

L.B. Matusov
Mechanical Engineering Research Institute the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
matusoff.l@yandex,ru

Abstract. *A parameter space exploration method (the IPP method) was developed for the design of mechanisms, machines, and structures and the optimization of their parameters. The method is based on the ability to probe the space of variable object parameters using points of a uniformly distributed LP sequence. The points of the LP sequences are used here to calculate a mathematical model of the system under study at each point. Because these points are uniformly distributed throughout the parameter space, we obtain a uniform overview of it. The more uniformly*

distributed this sequence is, the more reliable information about the properties of the object under study can be obtained from calculating the system without increasing the number of calculations at the points of the sequence. Only in this case can these sequences be successfully used to solve practical problems related to the theory of cubature formulas, in machine and mechanism optimization problems, etc.
***Keywords**: uniformly distributed sequence, monocyclic operator, direction matrix.*

***Acknowledgements.** This research was supported by State Assignment from Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation FFGU-2024-0016.*

Введение. Последовательности многомерных точек, могут обладать различными свойствами равномерности [1].Сложность заключается в том, что для решения практических задач эти свойства должны выполняться уже при сравнительно небольших количествах точек. Для того, чтобы выполнить это условие, в статье [2] были сформулированы некоторые дополнительные требования, к равномерно распределенным последовательностям. Данная статья посвящена исследованию одному из таких требований или свойств. Другое свойство исследовано в статье [3].
Рассмотрим K^n – единичный n-мерный куб.

Свойство А. Разобьем куб K^n плоскостями $x_j = I/2$ при j=I, 2, …n на $t = 2^n$ октантов, которые будем считать двоичными параллелепипедами. Разобьем последовательность точек P_0, P_1, …, P_i, … в K^n на двоичные участки, длина которых равна 2^n : P_0, …, P_{t-1},P_t, …, P_{2t-1}, P_{2t}, …, P_{3t-1}, … . Если в любом из этих участков все точки принадлежат различным октантам, то мы говорим, что последовательность обладает свойством А.
Согласно [2] справедлива теорема:
ЛП$_\tau$ - последовательность P_0, P_1, …, P_i, … обладает свойством А тогда и только тогда, когда определитель (размером n x n), составленный из первых столбцов всех направляющих матриц, равен I (mod 2).
Данная теорема дает возможность строить ЛП$_\tau$ - последовательности со свойством А. Однако остается открытым вопрос: можно ли в качестве последовательности операторов $\{L_k\}$ брать все операторы низших порядков. Вопрос обоснован тем, что именно в этом случае значение τ будет минимальным, что наилучшим образом отразиться на всех характеристиках равномерности. Чтобы ответить на него рассмотрим следующие утверждения.
Пусть L_1 , L_2 , …, L_n – различные моноциклические операторы с порядками m_1 , m_2 , …, m_n соответственно.
Лемма 1. Пусть $p^j(i)$ – есть DP – последовательности, соответствующие всем моноциклическим операторам низших порядков L_1 , … L_n . Пусть m- порядок оператора L_n. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$n+\frac{m(m+1)}{2} < 2^m \quad \text{при } m\geq 5 \qquad (1)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по m. При m=5 неравенство справедливо, т.к. максимальное n при этом равно 13 [2]. Пусть для некоторого m имеет место (1) при любом n, соответствующем данному m. Докажем, что при любом n, соответствующем m+I, будет выполняться аналогичное неравенство. Учитывая, что число

моноциклических операторов порядка m+I равно $\frac{\varphi\left(2^m-1\right)}{m+1}$, (где φ(к) – теоретико – числовая функция Эйлера, равная количеству натуральных чисел меньших к и взаимно простых с к) докажем, что

$$n + \frac{\varphi\left(2^m-1\right)}{m+1} + \frac{(m+1)(m+2)}{2} < 2^{m+1}$$

Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$n + \frac{\varphi\left(2^{m+1}-1\right)}{m+1} + \frac{(m+1)m}{2} + m + 1 + < 2^m + 2^m$$

Сравнивая его с (1), остается показать, что $\frac{\varphi\left(2^{m+1}-1\right)}{m+1} + m+1 \Big| < 2^m$

т.е. $\varphi(2^{m+1}-1) + (m+1)^2 < (m+1)\,2^m$

Очевидно, что $\varphi(2^{m+1}-1) + (m+1)^2 < 2^{m+1} - 1 + (m+1)^2 < (m+1)\,2^m$

Окончательно имеем $(m+I)^2 - I < (m-1)\,2^m$

Таким образом, приходим к очевидному неравенству, которое справедливо при m≥3.

Пусть m(n)- порядок моноциклического оператора, стоящего на n- ом месте в последовательности всех моноциклических операторов, взятых подряд.

Лемма 2. Рассмотрим n-I последовательность элементов GF(2) $\{u_i^{(k)}\}$, k=1, …, n-1, i=0,1,2,… Пусть к данному набору принадлежит последовательность, состоящая из единиц, и пусть определитель

$$\begin{vmatrix} u_1^{(1)} \ldots\ldots u_{n-1}^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1^{(n-1)} \ldots u_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 1 \pmod 2$$

Рассмотрим моноциклический оператор L_n порядка m≥ m(n), m≥5. Тогда существует такое решение оператора L_n - $\{u_i^{(n)}\}$, что определитель

$$\begin{vmatrix} u_1^{(1)} \ldots\ldots u_{n-1}^{(1)} u_n^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1^{(n-1)} \ldots u_{n-1}^{(n-1)} u_n^{(n-1)} \\ 1 \ldots\ldots\ldots u_{n-1}^{(n)} u_n^{(n)} \end{vmatrix} = 1 \pmod 2 \qquad (2)$$

Доказательство. Допустим обратное: как-бы ни выбирать первые m значений решения оператора L_n определитель (2) равен 0 (mod 2). Т.к. столбцы предыдущего определителя линейно независимы, то первые n-I элемент последнего столбца в (2) единственным образом

выразятся через эти столбцы. Но в силу указанного предположения, последний элемент n-ого столбца в (2) должен таким же образом выражаться через элементы n-ой строки, принадлежащие соответствующим столбцам в (2), при любом выборе первых m значений последней строки в (2). Т.е. для последней строки имеем

$$u_n^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k u_k^{(n)} \quad , \; c_k \in \{0,1\} \text{ или} \qquad (3)$$

$$u_{i_0}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1-i_0} c_{i_0+k} u_{i_0+k}^{(n)} + u_n^{(n)}, \; c_{i_0} = 1 \, , (c_i = 0 \quad \text{при} \quad i<i_0)$$

при произвольных, начинающихся с единицы, первых m значениях этой строки. Это означает, что любое решение моноциклического оператора L_n является решением линейного разностного оператора порядка $n-i_o$

$$L^*(u_i) = u_i + \sum_{k=1}^{n-1-i_0} c_{i+k} u_{i+k} + u_{i+n-i_0}$$

Действительно пусть $\{ u_i^{(n)} \}$- решение моноциклического оператора L_n. Если в качестве последней строки в (2) взять любой участок этого решения, начинающийся с 1, то получим (3). Возьмем произвольный участок длины n, начинающийся с нуля. Его, в силу того, что первые m значений можно выбирать произвольно, представим в виде суммы двух участков той же длины, начинающихся с 1. А т.к. для этих участков выполняется (3), то (3) справедливо и для данного участка, начинающегося с 0. Т.е. при любых начальных значениях $u_1^{(n)}$, $u_2^{(n)}$, …, $u_m^{(n)}$ выполняется (3). А это и означает, что всякое решение моноциклического оператора L_n порядка m, является решением линейного разностного оператора $L^*(u_i)$. Раз это так, то многочлен, соответствующий $L^*(u_i)$ должен делиться на многочлен, соответствующий оператору L_n. Пусть

$$x^{n-i_0} + a_{n-i_0-1} x^{n-i_0-1} + \ldots + a_1 x + 1 \qquad (4)$$

многочлен над полем GF(2), соответствующий оператору L*. Покажем, что если многочлен, соответствующий L_n,

$$x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + 1 \qquad (5)$$

является делителем многочлена (4), то он будет делителем некоторого многочлена большей степени, у которого нет в качестве слагаемых одночленов вида $x^к$, где $к \leq m$, за исключением 1.

Пусть (4) содержит в качестве слагаемого некоторый одночлен $x^к$. где $к \leq m$ (т.е. $a_к = 1$).

Умножая (4) на $x^к + I$, получим многочлен степени $n-i_o + k$, у которого коэффициент при $x^к$, т.е. $a_к = 0$.

Аналогично можно поступить с любым слагаемым степени не большей m. Получим многочлен, у которого степень предпоследнего члена больше m, а максимальная степень самого многочлена равна $n-i_0+\frac{m(m+1)}{2}$,т.е.

$$x^{n-i_0+\frac{m(m+1)}{2}} + \ldots + a_{m+1} x^{m+1} + 1 \qquad (6)$$

Если многочлен (5) делит (4), то он должен делить и многочлен (6). С другой стороны (6), как и многочлен (4) содержит четное число слагаемых, т.к. по условию этой леммы одна из строк (2) состоит из единиц. Поэтому (6) можно представить в виде суммы двучленов.

$$(x^{n-i_0+\frac{m(m+1)}{2}}+1)+\ldots+(x^{m+p}+1) \qquad (p>0) \qquad (7)$$

Разделим каждый из этих двучленов на (5). Т.к. (5) соответствует моноциклическому оператору L_n порядка m, то, согласно [1], является делителем двучлена $(x^{2m-1}+I)$, но не является делителем никакого двучлена x^s+1, где $s<2^m-I$. Но в силу леммы 1 степень многочлена (6) меньше 2^m-I. Поэтому, разделив почленно (7) на (5), получим $(x^m + \ldots + a_1x+1)(x^{p_1} + \ldots + x^{p_1-c_1}) + +x^{k_1} + \ldots + 1 + \ldots + (x^m + \ldots + a_1x+1)(x^{p_k} + \ldots + x^{p_k-c_k}) + x^{k_l} + \ldots + 1 = (x^m + \ldots + +a_1x+1)(x^c + \ldots + x^d) + x^k + \ldots + 1$,

где $k_i<m, k<m$. Остаток от деления, $x^k + \ldots + 1 \neq 0 \pmod 2$, т.к. при делении каждого из двучленов (7) на (5) остаток содержит 1.Двучленов – нечетное число, поэтому суммарный остаток также содержит 1. Таким образом многочлен (6) не делится на многочлен (5). Противоречие.

Теорема. Существуют такие начальные условия для первых столбцов направляющих матриц, что последовательность точек $P_i=(p^1(i), \ldots p^n(i))$, построенная по последовательности всех взятых подряд моноциклических операторов, при каждом n обладает свойством А.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Легко проверить, что теорема справедлива до n = 7 (m(8)=5). Пусть она справедлива при некотором n>7. Но это означает, что выполняются условия леммы 2. И если рассмотреть любой моноциклический оператор L_{n+1} , порядок которого такой же, как у L_n или на единицу больше, то в силу леммы 2 ,у решения этого оператора найдется начинающийся с I участок длины n+I, такой что

$$\begin{vmatrix} 1 & u_2^{(1)} & \ldots\ldots & u_n^{(1)} & u_{n+1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & u_2^{(n)} & \ldots\ldots & u_n^{(n)} & u_{n+1}^{(n)} \\ 1 & u_2^{(n+1)} & \ldots & u_n^{(n+1)} & u_{n+1}^{(n+1)} \end{vmatrix} = 1 \pmod 2 \qquad (8)$$

При этом все угловые определители (8) равны I (mod 2). Как следует из [2], это доказывает справедливость теоремы при n+I. Теорема доказана.

Выводы.

1.В статье исследовано дополнительное свойство равномерности ЛП$_\tau$ - последовательностей, имеющее важное значение при решении практических задач проектирования машин и конструкций.

2. Доказано, что можно строить ЛП$_\tau$ - последовательности со свойством А таким образом, чтобы в качестве последовательности операторов $\{L_k\}$ брать все операторы низших порядков. Именно в этом случае значение τ будет минимальным, что наилучшим образом отражается на всех характеристиках равномерности. Это дает возможность

обеспечить достаточно хороший обзор пространства проектируемых параметров машины при сравнительно небольшом объеме вычислений.

Список литературы

1. Соболь И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969. – С.288.
2. Соболь И.М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб. – М.: Знание, 1985. - С.57.
3. Матусов Л.Б. О расширении класса равномерно распределенных ЛП$_\tau$-последовательностей для расчета и векторной оптимизации параметров машин // Вестник научно -технического развития. – 2024. - №175. - С.25-29.

Дата поступления: 19 ноября 2025 г.