DOI: 10.18411/vntr2024-175-3

УДК. 3054

О РАСШИРЕНИИ КЛАССА РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЛП$_\tau$-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА И ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МАШИН

Леонид Борисович Матусов

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А.Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

matusoff.l@yandex.ru

Аннотация. *В статье исследовано важное свойство, обеспечивающее расширение класса ЛП$_\tau$- последовательностей. Именно эти последовательности используются в известном методе исследования пространства параметров (ИПП -метод) для многокритериальной оптимизации и идентификации механических систем. Точки ЛП$_\tau$- последовательностей используются здесь для расчета в каждой из них математической модели исследуемой системы. В силу того, что эти точки равномерно распределены в пространстве параметров, мы получаем его равномерный обзор. Чем более равномерно распределена эта последовательность, тем более достоверную информацию о свойствах исследуемого объекта можно получить при расчете системы без увеличения количества этих расчетов в точках последовательности. Сложность заключается в том, что для решения практических задач эти свойства равномерности должны выполняться уже при сравнительно небольших количествах точек. Только в этом случае данные последовательности могут быть успешно использованы при решении практических задач, относящихся к теории кубатурных формул, в задачах оптимизации и моделирования машин, механизмов, конструкций и т.д. В данной работе доказано, что можно конструировать ЛП$_\tau$- последовательность так, чтобы у направляющих матриц, соответствующих различным координатам ее точек, все угловые определители были равны I (mod 2). Это расширяет класс ЛП$_\tau$- последовательностей и играет существенную роль для выполнения указанного выше требования.*

Ключевые слова*: равномерно распределенная последовательность, моноциклический оператор, направляющая матрица.*

ON AN EXTENSION OF UNIFORMLY DISTRIBUTED ЛП$_\tau$- SEQUENCES CLASS FOR CALCULATION AND VECTOR OPTIMIZATION OF MACHINES PARAMETERS

L.B. Matusov

Mechanical Engineering Research Institute the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

email:matusoff.l@yandex.ru

Abstract. *The article investigates an important property that provides an extension of the class of ЛП-$_\tau$ sequences. It is these sequences that are used in the well-known parameter space research method (IPP method) for multi-criteria optimization and identification of mechanical systems. The*

points of the ЛП-$_\tau$ sequences are used here to calculate the mathematical model of the system under study in each of them. Due to the fact that these points are evenly distributed in the parameter space, we get a uniform overview of it. The more evenly distributed this sequence is, the more reliable information about the properties of the object under study can be obtained when calculating the system without increasing the number of these calculations at the points of the sequence. The difficulty lies in the fact that to solve practical problems, these properties must be fulfilled already with relatively small numbers of points. Only in this case, these sequences can be successfully used in solving practical problems related to the theory of cubature formulas, in optimization problems, and modeling of machines, mechanisms, structures, etc.It is proved that it is possible to construct an ЛП$_\tau$- sequence so that the guiding matrices corresponding to different coordinates of its points have all angular determinants equal to I (mod 2). This extends the class of ЛП$_\tau$- sequences and plays an essential role in fulfilling the above requirement.

***Key words**: uniformly distributed sequence, monocyclic operator, guiding matrix.*

1.Введение. Для проектирования механизмов, машин и конструкций, оптимизации их параметров был создан метод исследования пространства параметров (метод ИПП) [1]). В основе метода лежит возможность зондировать пространство изменяемых параметров объекта точками равномерно распределенной ЛП$_\tau$- последовательности [1,2].. Чем более равномерно распределена эта последовательность, тем более достоверную информацию о свойствах исследуемого объекта можно получить при расчете системы без увеличения количества этих расчетов в точках последовательности.

Последовательности многомерных точек, могут обладать различными свойствами равномерности [3]. Для решения практических задач эти свойства должны выполняться уже при сравнительно небольших количествах точек. С этой целью в [3] были сформулированы некоторые дополнительные требования к равномерно распределенным последовательностям, а позднее новые условия равномерности, которыми могут обладать, как показано в этой работе, ЛП$_\tau$- последовательности.

2. Конструкция ЛП$_\tau$- последовательностей со свойством В. Будем говорить, что многомерная последовательность

$$P_0, P_1, \ldots, P_i, \qquad (1)$$

обладает свойством В , если для определения каждой из ее координат, качестве в матрицы направляющих числителей взята такая, у которой все угловые определители равны 1(mod 2). И.М. Соболем получен следующий результат. Если в качестве в матрицы направляющих числителей взять такую, у которой все угловые определители равны 1(mod 2), то определенная этой матрицей одномерная ДР - последовательность будет ЛП$_0$-последовательностью.

Возникает вопрос нельзя ли из таких последовательностей, определяющих значения различных координатат многомерных точек, построить ЛП$_\tau$- последовательность? Приводимые ниже результаты дают возможность обобщить на рассматриаемый случай доказанную И.М.Соболем теорему, в которой приводится конструкция ЛП$_\tau$-последовательности.

Пусть L- моноциклический оператор порядка m. Рассмотрим последовательность операторов $L, L^2, \ldots, L^n, \ldots$. Каждому оператору L^n в этой последовательности поставим в соответствии его m линейно независимых решений

$$\{u_{11}^{(n)}, \ldots, u_{k1}^{(n)}, \ldots\}, \ldots, \{u_{1m}^{(n)}, \ldots, u_{km}^{(n)}, \ldots\}, \qquad (2)$$

причем любое решение оператора L^n не является решением оператора L^{n-1}.
При этом первые nm элементов в каждой из последовательностей (2) выбраны так, чтобы в матрице

$$\begin{pmatrix} u_{11}^{(1)} \ldots u_{1m}^{(1)} \ldots u_{11}^{(n)} \ldots u_{1m}^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{k1}^{(1)} \ldots u_{km}^{(1)} \ldots u_{k1}^{(n)} \ldots u_{km}^{(n)} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

все угловые определители были равны 1(mod 2). Положим, что $\hat{L}^p$ - произвольная степень отличного от L моноциклического оператора $\hat{L}$..

Лемма 1. Операторы $\hat{L}^p$ и L^k не имеют общих решений.

Доказательство. Действительно, пусть $\{u_i\}$- одна из последовательностей в (2) такая, что $L^k(u_i) = 0$. Тогда если бы имело место $\hat{L}^p(u_i) = 0$, то $L^{k-1}\hat{L}^p(u_i) = \hat{L}^p L^{k-1}(u_i) = 0$. А это не так потому, что $L^{k-1}(u_i)$ – есть нетривиальное решение моноциклического оператора L. Но как известно, оно не может быть решением оператора $\hat{L}^p$.

Лемма 2. Результат действия оператора $L\hat{L}^p$ на любые n ($n \le m$) линейно независимые решения оператора L^k есть n линейно независимые решения оператора L^{k-1}.

Доказательство. Покажем сначала, что $\hat{L}^p$ сохраняет линейную независимость решений оператора L^k. Подействуем оператором $\hat{L}^p$ на n решений оператора L^k. Т.к. $\hat{L}^p$ линейный оператор, то линейная зависимость полученных решений означала бы, что $\hat{L}^p(\sum u_{ij}^{(k)}) = 0$, i = 1,2,3,… . Но $\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^{(k)}$ есть не тривиальное решение L^k, в силу линейной независимости n выбранных решений. А т.к. решение L^k не может быть решением $\hat{L}^p$, то полученные решения линейно независимы. Теперь подействуем оператором L на рассматриваемые решения оператора L^k. Понятно, что таким образом получим n решений оператора L^{k-1}. Они линейно независимы. Действительно, обратное означает, что $\sum_{j=1}^{n} L(u_{ij}^{(k)}) = L(\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^{(k)}) = 0$. Сумма $\sum u_{ij}^{(k)}$ не есть решение оператора L, т.к. матрица (3) содержит все m линейно независимых решений оператора L. Если бы $\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^{(k)}$ была решением оператора L, то она выражалась бы линейно через эти m решений. Но это находится в противоречии с условием, что все угловые определители в (3) были равны 1(mod 2).

Теорема. Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_n$ - различные моноциклические операторы, порядки которых равны $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Каждому оператору L_k поставим в соответствие матрицу $(U_{ij}^{(kl)})$,

аналогичную (3). Пусть $\{ P_i \}$- последовательность точек с координатами, определяемыми этими матрицами. Тогда $P_i = (p^1(i),\ldots,p^n(i))$ – есть $ЛП_\tau$- последовательность в единичном кубе $К^n$ со значениями $\tau = \sum_{k=1}^{n} m_k$ - 1.

Доказательство. Согласно доказательству упомянутой теоремы И.М.Соболя, для того, чтобы произвольный двоичный участок последовательности длины 2^ν был $П_\tau$- сеткой необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$(W_{ij}) = \begin{pmatrix} V_{11}^{(11)} \ldots V_{1\mu_1}^{(1k_1)} \ldots V_{11}^{(n1)} \ldots V_{1\mu_n}^{(nk_n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{\nu 1}^{(11)} \ldots V_{1\mu_1}^{(1k_1)} \ldots V_{\nu 1}^{(n1)} \ldots V_{\nu\mu_n}^{(nk_n)} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

составленной из $\nu - \tau$ столбцов матриц направляющих чисел, соответствующих различным моноциклическим операторам, был равен $\nu - \tau$. Обозначим через μ_k' остаток от деления μ_k на m_k так, что $\mu_k = \rho_k m_k + \mu_k'$. Пусть $\rho_1 \geq 1$. Оставим в (4) первые m_1 строк без изменений, а остальные будем заменять линейными комбинациями строк в соответствии с действием оператора L_1. Получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} V_{11}^{(11)} & \ldots & V_{1m_1}^{(1l_1)} & & & & & \\ . & . & . & & W_{ij} & & & \\ V_{m_1 1}^{(11)} & \ldots & V_{m_1 m_1}^{(1l_1)} & & & & & \\ & & & V_{11}^{'(11)} & \ldots & V_{1\mu_1 - m_1} & & \\ & 0 & & . & . & . & L_1 w_{ij} & \\ & & & V_{\nu-m\ 1}^{'(11)} & \ldots & V_{\nu-m_1\mu_1-m}^{'(1d_1} & & \end{pmatrix} \qquad (5)$$

В верхнем углу, согласно условию теоремы, находится невырожденная матрица. Нетрудно видеть, что столбцы $V_{ij}^{'(1k)}$, $k \leq d_1, j \leq \mu_1 - m_1$, являющиеся участками решений оператора L_1, линейно независимы. Если $\rho_1 > 1$, то в нижней части матрицы (5) повторяем то же преобразование ρ_1 раз. Если $\mu_1' > 0$, то после этих преобразований останутся μ_1' столбцов с элементами $V_{ij}^{'(1l)}$. Перенесем их в конец матрицы. Получим следующую матрицу

$$\begin{pmatrix} B_1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & B_1 & & & & & & & & \\ & & & \overline{V_{11}^{(21)}} & \ldots & \overline{V_{1\mu_2}^{(2k)_2}} & \ldots & \overline{V_{11}^{(n1)}} & \ldots & \overline{V_{1\mu_n}^{(nk_n)}} & V_{11}^{'(11)} & \ldots & V_{1\mu_1'}^{'(1l')} \\ . & & & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Согласно лемме 2, $\overline{V_{11}^{(pk_p)}}$, $2 \leq p \leq n$, есть участки решений оператора $L_p^{k_p}$.

В силу этой леммы, столбцы $\overline{V_{ij}^{(21)}}$, $1 \leq j \leq m_2$, образуют матрицу

$B = \begin{pmatrix} \overline{V_{11}^{(21)}} & \dots & \overline{V_{1m_2}^{(21)}} \\ . & . & . \\ \overline{V_{m_2 1}^{(21)}} & \dots & \overline{V_{m_2 m_2}^{(21)}} \end{pmatrix}$, определитель которой равен 1 . Посредством L_2 с нижней частью матрицы (9) (расположенной под B_1) проделаем преобразования, аналогичные предыдущим. Оставшиеся μ_2' столбцов перенесем в конец матрицы. Проделав такие же преобразования со всеми L_k, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} B_1 & & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & & \\ & & B_1 & & & & & & & & & & \\ & & & B_2 & & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & & & B_2 & & & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & & B_n & & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & & B_n & & & \\ & & & & & & & & & & V_{11}^{'(11)} & \dots & V_{1\mu_1}^{'(11)} & \dots & V_{11}^{'(n1)} & \dots & V_{1\mu_n'}^{'(n1)} \\ & & & & & & & & & & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & & & & & & & & V_{\nu' 1}^{'(11)} & \dots & V_{\nu' \mu_1}^{'(11)} & \dots & V_{\nu' 1}^{'(n1)} & \dots & V_{\nu' \mu_n'}^{'(n1)} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Здесь $\nu' = \mu_1' + \dots + \mu_n' + \tau$ и

$$V_{ij}^{'(k1)} = L \dots L_{k-1}^{\rho_{k-1}} L_{k+1}^{\rho_{k+1}} \dots L_n^{\rho_n} V_{ij}^{(k1)} \quad (8)$$

Если бы все ρ_k были равны 0, то исходная матрица уже имела бы вид (7). В виду того, что в (8) $j \le \mu_k' < m_k$, то $L_k V_{ij}^{'(k1)} = 0$. Значит столбцы остаточной матрицы - это участки решений моноциклических уравнений. Пусть среди μ_k' всего s чисел, отличных от нуля. Обозначим их через μ_f', $1 \le f \le s \le n$. Все решения $V_{ij}^{'(k1)}$, соответсвующие одному f, линейно независимы в силу леммы 1. $\nu' = \sum_{k=1}^{m}(m_k - 1) + \sum_{f=1}^{s}\mu_f' \ge \sum_{f=1}^{s}(m_f + \mu_f' - 1) \ge \sum_{f=1}^{s} m_f$.

Поэтому из утверждения, доказанного И.М.Соболем, следует, что все столбцы остаточной матрицы линейно независимы, т.е., что ее ранг равен $\mu_1' + \dots + \mu_n'$. А ранг всей матрицы равен $\nu - \tau$. Теорема доказана.

Выводы

1.Доказана возможность построения $ЛП_\tau$ - последовательностей, обладающих свойством B.

2.Полученные результаты позволяют строить такие последовательности, применение которых дают возможность решать практические задачи в приемлемое для проектировщиков время.

Список литературы

1. Статников Р., Статников А. Инструментарий метода исследования пространства параметров. - Artech House, Бостон / Лондон. - 2012. - С.215
2. Матусов Л. О некоторых задачах векторной оптимизации сложных механических систем.// Материалы Конференции AIP. - 2022. - т. 2503, вып.1- - С.050025-1 – 050025-8.
3. Matusov L. Some properties of multidimensional sequences, // The XII International Congress "Science, Education and Technology in the Modern World, Papers and Commentaries / USA, Cambridge. - 2015. - Volume 3. - P.102-107.

Дата поступления: 7 ноября 2024 г.