

УДК 534.1

САМОПОДОБНЫЕ БИОМЕХАНИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ. ВИБРОРЕЦЕПТОРЫ

Людмила Яковлевна Банах

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения
им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия
banl@inbox.ru

Аннотация. Введено понятие динамически-фрактальных самоподобных структур (динамического фрактала), заключающееся в масштабировании динамических, т.е. упруго-инерционных параметров образующих ячеек. Показано, что убывающий по длине динамический фрактал, имеет свойство усиления поступающего сигнала вдоль структуры. Увеличивающийся по длине динамический фрактал, напротив, обладает хорошими виброизолирующими свойствами, интенсивность затухания в котором выше, чем в периодической структуре. Исследованы динамические свойства виброрецептора – тельца Пачини, являющегося детектором вибрации человека. Построена его механическая модель. Показано, что виброрецептор - это динамический фрактал с убывающими по длине параметрами и поэтому усиливает входящий сигнал, что позволяет улавливать даже слабые вибрационные воздействия на человека.

Ключевые слова: динамический фрактал, полоса пропускания, виброрецептор - тельце Пачини, распространение волн, усиление сигнала.

Поддержано грантом Российского научного фонда 21-19-00813.

SELF-SIMILAR STRUCTURES IN BIOMECHANICS. HUMAN VIBRORECEPTORS

L.Ya. Banakh

Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Moscow Russia
banl@inbox.ru

Abstract. The concept of dynamic-fractal self-similar structures (dynamic fractal) is introduced. This concept consists in scaling the dynamic, i.e. elastic-inertial parameters of the forming cells. It is shown that a dynamic fractal decreasing in length amplifies the incoming signal along the structure. A dynamic fractal that increases in length, on the contrary, has the good vibroisolation properties, the attenuation intensity in which is higher than in the periodic structure. The dynamic properties of the Pacini corpuscle, which is a human vibration detector, are investigated. Its mechanical model is constructed. It is shown that the vibroreceptor is a dynamic fractal with parameters decreasing in length. Therefore the vibroreceptor amplifies the incoming signal, which makes it possible to detect even weak vibration effects on a person.

Keywords: dynamic fractal, bandwidth, human vibroreceptor Pacini, wave propagation, signal amplification.

Acknowledgements. The research is supported by Russian Science Foundation, project no. 21-19-00813.

1. Постановка задачи. Широкий класс структур в природе и технике составляют самоподобные фрактальные структуры, в которых каждая последующая ячейка в определенном масштабе повторяет структуру предыдущей.

В настоящее время широко известны геометрические фракталы Мандельброта [1,2], которые описывают структуры, подобные по геометрическим параметрам (их можно назвать геометрическими фракталами). Такие фракталы изучаются в различных областях науки, в том числе и в компьютерных технологиях. Они хорошо описывают, формирование структур. Упругие колебания и волны в материалах с геометрически-фрактальной структурой исследованы в работах [3,4]. Известны также работы по распространению волн в иерархических геометрически-фрактальных структурах [5,6,7]. В основном они касаются волнового анализа в акустических метаматериалах и композиционных материалах. Показано, что структурная иерархия приводит к образованию дополнительных полос непропускания. В [8,9] структуры со скейлингом массы по степенному типу, рассматриваются как модель сплошной среды, в которой изменяются только параметры массы.

Однако, геометрические фракталы не отражают динамические процессы, происходящие во многих механических системах, таких, как, например, в системах с сосредоточенными параметрами. Именно такого типа расчетные модели обычно используются в инженерных расчетах. Их динамические свойства определяются не геометрическими, а динамическими, упругими/инерционными параметрами, которые и входят в уравнения движения.

Поэтому представляет интерес изучение структур, состоящих из ячеек, подобных по динамическим параметрам. Для этого, в отличие от геометрических фракталов Мандельброта следует ввести понятие динамического фрактала, описывающего структуры, в которых происходит масштабирование упруго-инерционных параметров, определяющих динамические свойства системы. К таким системам в механике можно отнести, например, стержни переменного сечения, валы с дисками переменного сечения, конические оболочки с оребрением, разветвленные структуры (например, дихотомические решетки).

Такие структуры обладают рядом специальных динамических свойств [10, 11]. Показано, что динамический фрактал, увеличивающийся по длине, имеет хорошие виброизолирующие свойства, что целесообразно использовать в системах виброизоляции. Интенсивность затухания в динамически –фрактальных решетках в γ раз выше, чем в периодических виброизолирующих решетках [12] (γ – параметр масштабирования).

Другое характерное свойство таких фракталов – это усиление поступающего сигнала в убывающем по длине динамическом фрактале, что невозможно в периодической структуре. В инженерных конструкциях это качество используется в ультразвуковых колебательных системах для увеличения амплитуды колебаний, передаваемых от возбудителя колебаний к инструменту [13].

Наиболее сильным подтверждением работоспособности и целесообразности динамически -фрактальных структур является их существование в Природе. Хорошо известны примеры успешного применения в инженерных конструкциях идей и технологий, заимствованных из Природы. С этой точки зрения очень важно исследовать природные динамические фракталы. Такой структурой является, в частности, виброрецептор - тельце Пачини, представляющий собой детектор гармонического сигнала при воздействии вибрации на человека. Его динамический анализ и является целью настоящей статьи.

В п. 2 изложены основные результаты и методы исследования колебаний динамически-фрактальных структур, необходимые при исследовании структуры виброрецептора. В п. 3 проводится анализ колебаний и распространения волн в математической модели виброрецептора - тельца Пачини. Показано, что этот виброрецептор представляет собой убывающий динамический фрактал, в котором происходит усиление входного сигнала.

2. Динамический фрактал. Определение и основные свойства. Динамически-самоподобными (динамическим фракталом) назовем структуры, в которых упругие и инерционные параметры меняются с одинаковым масштабом γ для каждой ячейки структуры (или подсистемы) [10,11]

$$K_s = \gamma K_{s-1}, M_s = \gamma M_{s-1} \quad (1)$$

где K_s – жесткость, M_s – инерционный параметр s -й ячейки.

Необходимым (но не достаточным) следствием условий (1) является равенство парциальных частот образующих ячеек

$$v_s^2 = (K_s + K_{s-1}) / M_s = v_{s+1}^2 = (K_s + K_{s+1}) / M_{s+1} = \text{const} = v^2 \quad (s=1, \dots, n) \quad (2)$$

Условия (1) для динамического фрактала, вообще говоря, не совпадают с условиями геометрического подобия (scaling), используемого в геометрических фракталах Мандельброта. Это совершенно другой вид структур, отличающийся от фракталов Мандельброта.

Проиллюстрируем основные свойства динамического фрактала на наиболее простом примере фрактальной цепочки (рис. 1). Рассмотрим бесконечную одномерную цепочку, в которой s -я ячейка состоит из сосредоточенной массы m_s и пружинки с жесткостью k_s . Пусть упругие и инерционные параметры меняются с одинаковым масштабом γ от ячейки к ячейке (рис. 1а).

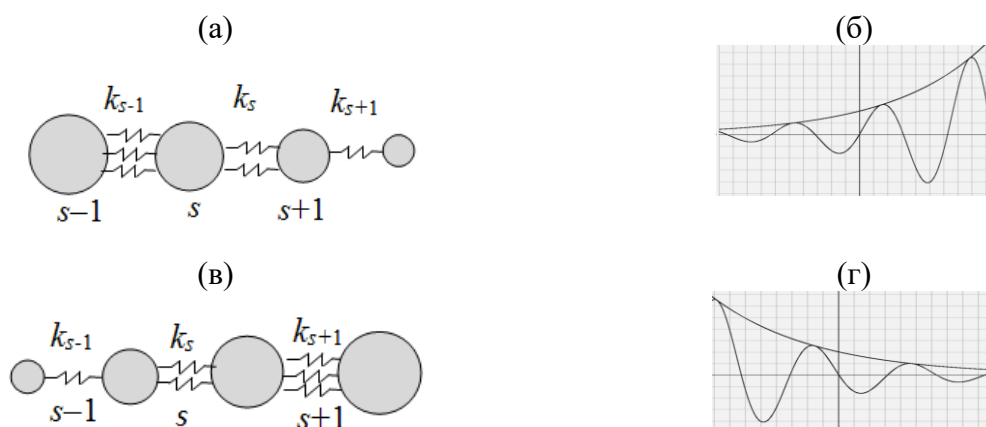


Рис. 1. Динамически-фрактальные структуры: (а) – цепочка с уменьшающимися по длине параметрами ($\gamma < 1$); (б) – формы колебаний при $\omega_0 < \omega < \omega^*$ если $\gamma < 1$ ($\alpha > \mu$); (в) – цепочка с увеличивающимися по длине параметрами ($\gamma > 1$); (г) – формы колебаний при $\omega_0 < \omega < \omega^*$ если $\gamma > 1, \gamma < 1$ ($\alpha < \mu$)

Тогда жесткость и масса для элемента $s+1$: $k_s = \gamma k_{s+1}, m_s = \gamma m_{s+1}$. Уравнение в конечных разностях s -й ячейки

$$-k_{s-1}x_{s-1} + (-m_s \omega^2 + k_s(1+1/\gamma))x_s - k_s x_{s+1} = 0 \quad (3)$$

Используя замену переменных

$$x_s = \bar{x}_s (\sqrt{\gamma})^s$$

или

$$\bar{x}_s = \frac{c \exp(i(\mu s - \omega t))}{(\sqrt{\gamma})^s} = C \exp(i(\mu + i\alpha)s - \omega t), \quad i\alpha = -\frac{1}{2} \ln \gamma \quad (5)$$

и полагая $k_s = k_1 \gamma^s, m_s = m_1 \gamma^s$, получим

$$-k_1 \bar{x}_{s-1} / (\sqrt{\gamma}) + (-m\omega^2 + \frac{k_1(1+\gamma)}{\gamma}) \bar{x}_s - k_1 \bar{x}_{s+1} / (\sqrt{\gamma}) = 0 \quad (6)$$

Уравнение (6) описывает периодическую структуру (рис. 2), т.к. его коэффициенты не зависят от номера s . Жесткость между ячейками составляет $k_1/\sqrt{\gamma}$, дополнительное закрепление масс равно

$$k^* = \frac{k_1(1+\gamma)}{\gamma} - \frac{2k_1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{k_1(1-\sqrt{\gamma})^2}{\gamma}$$

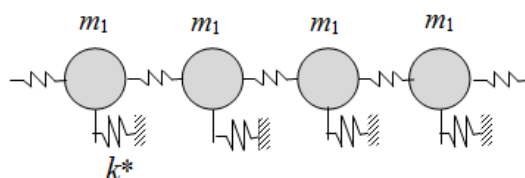


Рис. 2. Частотно-эквивалентная периодическая структура.

Дисперсионное уравнение периодической структуры

$$-m_1 \omega^2 + \frac{k_1(1+\gamma)}{\gamma} + 2 \frac{k_1}{\sqrt{\gamma}} \cos \mu = 0, \quad m_1/k_1 = m_s/k_s = \nu^2 = \text{const} . \quad (7)$$

Такая структура, как известно [14,15], представляет собой полосовой механический фильтр, полоса пропускания гармонического сигнала, как следует из (7)

$$\Delta \omega = \omega^* - \omega_0; \quad \omega_0^2 = \nu^2 \frac{(1-\sqrt{\gamma})^2}{\gamma}; \quad \omega^{*2} = \nu^2 \frac{(1+\sqrt{\gamma})^2}{\gamma} .$$

Эта периодическая структура частотно-эквивалентна исходному динамическому фракталу, так как линейное преобразование координат не меняет частотных свойств системы [16]. Однако, формы колебаний этих структур различны. Формы колебаний динамического фрактала, как следует из (4), (5), получаются из соответствующей волны периодической структуры рис. 2, путем изменения амплитуды колебаний каждого участка в $1/\sqrt{\gamma}$ раз. На рис. 1б, г представлены высшие формы колебаний динамического фрактала при закрепленных концах. Из соотношения (4) следуют выводы: 1) при $\gamma > 1$ затухание гармонического сигнала вдоль структуры происходит во всем частотном диапазоне, а не только в полосе непропускания периодической структуры. Кроме того, из (5) следует, что снижение уровня колебаний в $\exp(\alpha)$ интенсивнее по сравнению с эквивалентной периодической решеткой; 2) при $\gamma < 1$ происходит усиление входного сигнала при $\omega_0 < \omega < \omega^*$, а также и вне этой полосы при $\alpha > |\mu|$. Это важное свойство фрактальных структур, которое как мы увидим в следующем параграфе, очень важно для биомеханических систем.

3. Динамически-фрактальные структуры в биомеханике. Виброрецепторы тельца Пачини. Тельца Пачини – это рецепторы подкожной ткани человека, которые являются

детекторами вибрации [17-20] (рис. 3). Они состоят из достаточно близко расположенных замкнутых оболочек, вложенных одна в другую, пространство между которыми заполнено физиологической жидкостью, близкой по своим характеристикам к воде. Оболочки достаточно тонкие, их толщина не превосходит ≈ 1 мкм. Внутри корпускулы расположено ядро, к которому подходит нервное окончание. Количество оболочек $N = 30$, их радиусы связаны соотношением¹

$$r_{s+1} = \gamma r_s, \quad \gamma \approx 0.91. \quad (8)$$

Концы оболочек закреплены на концевой пластине, примыкающей к ядру, которая предотвращает протекание жидкости между оболочками (рис. 3б, в). Оболочки связаны между собой тонкими упругими радиальными элементами, которые распределены равномерно внутри оболочки и не мешают протеканию жидкости между оболочками. Они предотвращают контакт между оболочками, и в то же время передают перемещения на соседнюю оболочку.

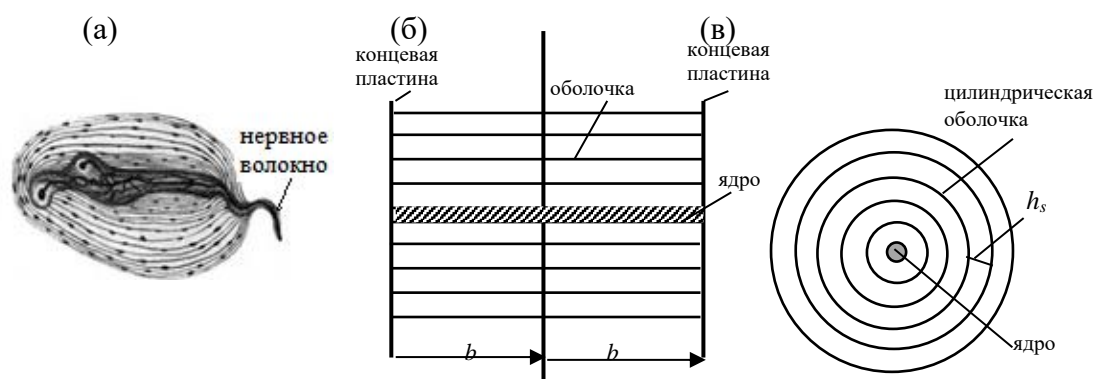


Рис. 3. Виброрецептор - тельце Пачини: (а) – общий вид; (б) – механическая модель, продольное сечение; (в) – механическая модель, поперечное сечение.

Размер внешней оболочки: длина $b = 700$ мкм, радиус $r_1 = 255$ мкм (табл. 1). Найдем теперь упруго – инерционные параметры и коэффициент демпфирования, обусловленный вязкостью жидкости. Оболочки достаточно тонкие, поэтому в механической модели (рис. 3б), их можно рассматривать как цилиндрические мембраны.

При воздействии внешнего давления $P = A \cos(2\theta) \cos(\pi \frac{x}{b})$ на s -ю мембрану, в ней возникают перемещения, пропорциональные K_s [21, Приложение]

$$K_s = \frac{E d_s}{r_s^2} \left(1 + \frac{4b^2}{\pi^2 r_s^2}\right)^{-2}, \quad K_{s-1} = \gamma K_s, \quad (9)$$

где r_s, d_s – радиус и толщина s -й мембраны, $d_s \cong 1$ мкм, P [Н/м²], E – модуль упругости для биологических тканей найден экспериментально [17]; $E = 5 \cdot 10^5$ Н/м².

Таблица 1

Изменение параметров мембраны в зависимости от номера s

¹ На самом деле коэффициент масштабирования γ немного увеличивается по длине структуры, поэтому соотношение (8) можно рассматривать как осредненное.

№ оболочки	1	2	3	4	...	10	11	12	...
Радиус мембраны, мкм	255	232	211	192		108	98.5	91	
K_s [Н/м ³ × 10 ⁻⁵]	0.47	0.42	0.38	0.33		0.13	0.11	0.097	

Из табл. 1 видно, что условия масштабирования (8) выполнены как для радиусов мембран, так и для коэффициента K_s , характеризующего, по-существу, упругость мембраны. Действительно, с увеличением номера s эти параметры уменьшаются пропорционально коэффициенту подобия γ .

Внутренние радиальные связи испытывают деформации растяжения–сжатия. Если их моделировать в виде стержней, имеющих площадь поперечного сечения F_s и длину h_s , где h_s – расстояние между мембранами, то жесткость связей равна $k_s = EF_s/h_s$. F_s меняется пропорционально γ^2 , а h_s – пропорционально γ , следовательно $k_{s+1} = \gamma k_s$. Имеющиеся экспериментальные данные [17] подтверждают этот вывод. Поскольку жесткость радиальных связей должна быть выше жесткости самой оболочки, будем рассматривать перемещение оболочек как твердого тела.

Жидкость между мембранами вязкая и несжимаемая, ее инерционные свойства можно не учитывать, т.к. движение жидкости ламинарное и число Рейнольдса мало. Статическое смещение внешней мембраны повышает давление внутри соседней, но не вызывает ее смещения в силу несжимаемости жидкости. Такие смещения возникают лишь при динамическом нагружении. Течение жидкости между мембранами можно анализировать на основе гидродинамической теории смазки [22], т.к. расстояние между цилиндрами h_s значительно меньше его радиуса r . Воздействие жидкости можно рассматривать как вязкое демпфирование. Вследствие малости h_s демпфирующие силы в вертикальной плоскости для s -й мембраны пропорциональны разности скоростей слоя жидкости, контактирующей с $(s+1)$ -й мембраной, где коэффициент пропорциональности β_s зависит от вязкости и равен [17]:

$$\beta_s = \frac{12\mu b^2}{h_s^3 \pi^2 (1 + \frac{4b^2}{\pi^2 a_s^2})}, \quad \beta_{s+1} = \gamma \beta_s, \quad \beta_1 = 1.34 \times 10^4 \text{ Н сек/м}^2. \quad (10)$$

Масса s -й мембраны с присоединенной массой слоя жидкости составляет

$$m_s = \rho \pi ((r_s + h)^2 - r_s^2) \approx \rho 2\pi r_s h \quad (11)$$

вследствие малости толщины слоя по сравнению с радиусом мембраны, здесь ρ – плотность среды. Поэтому m_s меняется также пропорционально γ : $m_{s+1} = \gamma m_s$.

Как следует из соотношений (8) – (11), упруго-инерционные параметры мембран, а также вязкость среды между ними меняются пропорционально коэффициенту γ . Следовательно, условия (1), (2) динамической фрактальности удовлетворены, и корпукула представляет собой динамический фрактал.

Динамическую модель тельца Пачини для анализа распространения волны вдоль корпукулы от внешней оболочки к ядру представим в виде системы твердых тел, имитирующих мембраны, связанные как с концевой пластиной, так и между собой упругими и демпфирующими связями (рис. 4).

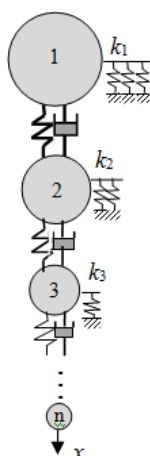


Рис. 4. Динамическая модель тельца Пачини как динамический фрактал.

Изменение толщины линий, обозначающих на рис. 4 упругие и демпфирующие элементы, имитирует уменьшение их величины вдоль длины структуры.

Следовательно, как показано в п. 2, корпускула имеет полосу частот, в которой происходит наибольшее усиление сигнала, поступающего на вход рецептора. Это свойство особенно важно для биологической системы, поскольку дает возможность распознать даже слабые сигналы при воздействии вибрации на человека. По данным [20] в организме человека имеется несколько различных видов виброрецепторов, каждый из которых предназначен для своего частотного диапазона, и в общей сложности, возможно, различать вибрации в пределах до 1000 Гц. Рассматриваемая нами система описывает один из таких виброрецепторов.

Динамическую модель рис. 3 можно рассматривать как метасистему [23, 24] и притом достаточно компактную, которая в зависимости от уменьшения или увеличения параметров по длине структуры может служить как усилителем входного сигнала, так и виброизолятором.

Выводы.

Введено понятие динамической фрактальности (динамического фрактала), заключающееся в масштабировании упруго-инерционных параметров образующих подсистем.

Убывающий по длине динамический фрактал имеет свойства усиления поступающего сигнала вдоль его длины. Наибольший коэффициент усиления фрактала находится в полосе пропускания эквивалентной периодической структуры.

Увеличивающийся по длине динамический фрактал обладает хорошими виброизолирующими свойствами: в нем распространяются убывающие по длине волны, а интенсивность затухания амплитуд колебаний в γ раз превосходит демпфирование в эквивалентной периодической структуре.

Исследованы динамические свойства виброрецептора – тельца Пачини. Построена его механическая модель. Показано, что виброрецептор является убывающим динамическим фракталом и поэтому имеет полосы усиления входящего гармонического сигнала при воздействии вибрации на человека.

Список литературы

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. - М.: Институт компьютерных исследований, 2002. - 656 с.

2. Федер Е. Фракталы. - М: Мир, 1991. - 254 с.
3. В. В. Зосимов, Л. М. Лямшев. Фракталы и скейлинг в акустике (обзор) //Акуст. журн. - 1994. - Т. 40, № 5. - С. 709 – 737.
4. Копыл Е.А., Лысанов Ю.П., Лямшев Л.М. Рассеяние звука случайными фрактальными неоднородностями в океане// Акуст. журн. - 2012. - Т.48. - С. 517-522.
5. Lim, Qi Jian, Pai Wang, Soo Jin Adrian Koh, Eng Huat Khoo, and Katia Bertold, Wave propagation in fractal-inspired self-similar beam lattices, Applied Physics Letters 107(22). - 2015. - P. 221911. DOI: 10.1063/1.4936564.
6. Y. L. Xu, C. Q. Chen, and X. G. Tian, Wave Characteristics of Two-Dimensional Hierarchical Hexagonal Lattice Structures, *J. Vib. Acoust.* 136(1). Feb. - 2014. - P. 011011. <https://doi.org/10.1115/1.4025550>
7. Ramin Oftadeh, Babak Haghpanah, Dominic Vella, Arezki Boudaoud, and Ashkan Vaziri, Optimal Fractal-Like Hierarchical Honeycombs, *Phys. Rev. Lett.* 113 (2014) 104301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.104301>
8. Paul N. Demmie and Martin Ostojca-Starzewski .Waves in Fractal Media . *J Elast.* - 2011. - Vol.104. - P. 187-204. <https://doi.org/10.1007/s10659-011-9333-6>.
9. Tarasov V.E. Lattice model with power-law spatial dispersion for fractional elasticity // *Central European Journal of Physics.* – 2013. -Vol. 11, No. 11. - P. 1580-1588. DOI:[10.2478/s11534-013-0308-z](https://doi.org/10.2478/s11534-013-0308-z)
10. Банах Л.Я. Распространение упругих волн в динамически- самоподобных структурах (динамический фрактал) //Акустический журнал. - 2020. - № 3. - С. 265-272.
11. Банах Л.Я., Бармина О.В. Колебания самоподобных структур в механике //Проблемы машиностроения и надёжность машин. - 2013. - №2. - С.3-9.
12. Banakh L. The dynamic-selfsimilar lattice as the vibroisolation systems// *Vibroengineering. Procedia at the 49rd International Conference on Vibroengineering.* - 2019. - P. 54.
13. Astashev V.K., Babitsky V.I. *Ultrasonic Processes and Machines. Dynamics, Control and Applications.* – Springer, 2007. - 330 p.
14. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. - М.:Наука, 1984. - 432 с.
15. Banakh L.Ya., Kempner M. L. *Vibrations of mechanical systems with regular structure.* Springer, Heidelberg, Dordrecht, London, New York. - 2010. - 262 p. DOI:10.1007/978-3-642-03126-7
16. Bellman R. *Introduction to matrix analysis.* MCGRAW-Hill book Company. New York, Toronto, London. - 1960. - 328 p.
17. Lowenstein W.R., Skalak R. Mechanical Transmission in a pacinian corpuscle. An analysis and a theory//*J. Physiol.*- 1966. - V.182. - P.346.
18. Миркин А. С., Тучков Б. С., Машанский В. Ф. Некоторые особенности ультраструктуры телец Пачини // *Цитология.* - 1967. - Т. 9, № 6. - С. 633.
19. Машанский В. Ф., Миркин А. С., Винниченко Л. Н. Влияние вибрационного раздражения на ультраструктуру механорецептора – тельца Пачини // *Цитология.* - 1969. - Т. 11, № 12. - С. 1572.
20. Кубарко А.И., Семенович А.А., Переверзев В.А. *Нормальная физиология.* - Минск: Вышэйшая школа, 2013. - 542 с.
21. Тимошенко С.П., Войнович-Кригер С. *Пластины и оболочки.* - М.: Наука, 1966.
22. Повх И. Л. *Техническая гидромеханика.* – Машиностроение, 1976. - 502 с.
23. Бобровницкий Ю.И., Томила Т.М. Поглощение звука и метаматериалы (обзор)// *Акустический журнал.* - 2018. - Т. 64, № 5. - С. 517.
24. Bobrovnikskii Y.I., Tomilina T.M. Sound absorption and metamaterials: a review. // *Acoustical Physics.* - 2018. - V. 64. № 5. - С. 519.

Приложение. Определение жесткости цилиндрической мембраны [16]

Уравнения равновесия мембраны

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{r \partial \theta} = 0, \quad (\text{П. 1})$$

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{r \partial \theta} = 0, \quad (\text{П. 2})$$

$$N_{\theta} = -Pr, \quad (\text{П. 3})$$

$$P = A \cos(2\theta) \cos\left(\pi \frac{x}{b}\right), \quad (\text{П. 4})$$

где N_x , N_{θ} – напряжения на единицу длины в направлениях x и θ , $N_{x\theta}$ – касательные напряжения в направлениях x и θ , P – давление.

Из (П. 3), (П. 4):
$$N_{\theta} = Ar \cos(2\theta) \cos\left(\pi \frac{x}{b}\right). \quad (\text{П.5})$$

Из (П. 5) и (П. 2):
$$N_{x\theta} = 2A \frac{b}{\pi} \cos(2\theta) \cos\left(\pi \frac{x}{b}\right). \quad (\text{П. 6})$$

Из (П. 6), (П.1):
$$N_{x\theta} = 2A \frac{b}{\pi} \cos(2\theta) \cos\left(\pi \frac{x}{b}\right). \quad (\text{П. 7})$$

Произвольные постоянные равны нулю в силу принятых граничных условий: $N_x = 0$ при $x = \pm b$. Из этих уравнений найдем деформации

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_{\theta}), \quad (\text{П.8})$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\partial v}{r \partial x} - \frac{w}{r} = \frac{1}{Ed} (N_{\theta} - \nu N_x), \quad (\text{П.9})$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{Ed} N_{x\theta}, \quad (\text{П.10})$$

где ν – коэффициент Пуассона; d – толщина мембраны. Интегрируя

(П. 8)–(П. 10) и учитывая (П. 5)–(П. 7), получим выражения для перемещений

$$u = -\frac{bAr}{\pi Ed} \left(\frac{4b^2}{\pi^2 r^2} - \nu \right) \cos(2\theta) \cos\left(\pi \frac{x}{b}\right),$$

$$v = \frac{2b^2 A}{\pi^2 Ed} \left(2 + \nu \frac{4b^2}{\pi^2 r^2} \right) \cos(2\theta) \cos\left(\pi \frac{x}{b}\right),$$

$$w = \frac{Ar^2}{Ed} \left(1 + \frac{4b^2}{\pi^2 r^2} \right) \cos(2\theta) \cos\left(\pi \frac{x}{b}\right).$$

Последнее соотношение используется в статье.

Дата поступления: 27 мая 2021 г.