УДК 534.11

ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

© Владислав Львович Литвинов, Валерий Николаевич Анисимов
СамГТУ, Самара, Россия
vladlitvinov@rambler.ru, anisimov170159@mail.ru

Аннотация. *С помощью приближенного метода Канторовича – Галеркина и аналитического метода замены переменных в системе функционально-разностных уравнений находятся приближенное и точное решения задачи о вынужденных поперечных колебаниях струны с движущейся границей. Решение задачи методом Канторовича – Галеркина получено с точностью до величин второго порядка малости относительно малого параметра, характеризующего медленный характер движения границы. В работе получено выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n-ной динамической моде. Резонансные явления исследуются для наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения носят гармонический характер.*

Ключевые слова: *струна переменной длины, движущиеся границы, вынужденные колебания, резонансные свойства, динамическая мода, амплитуда колебаний.*

EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS THE PROBLEM OF FORCED OSCILLATIONS OF A STRING OF VARIABLE LENGTH

© Vladislav L. Litvinov, Valeriy N. Anisimov
SSTU, Samara, Russia
vladlitvinov@rambler.ru, anisimov170159@mail.ru

Abstract. *With an approximate method of Kantorovich - Galerkin and analytical method for change of variables in the system of functional-difference equations are approximate and exact solutions of the problem of forced transverse vibrations of a string with a moving boundary. Solution of the problem by Kantorovich - Galerkin received up to the second order in the small parameter characterizing the slow nature of the movement of the border. We obtain the expression for the amplitude of the oscillations corresponding to the n-th dynamic mode. Resonance phenomena are investigated for the most common practice in the case when external disturbances are harmonic character.*

Key words: *string of variable length, moving boundaries, forced oscillations, resonance properties, dynamic mode, the amplitude of oscillation.*

1. Постановка задачи.

Дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания струны, имеет вид:

$$Z_{tt}(x,t) - a^2 Z_{xx}(x,t) = \omega_0^2 B \cos W_0(\omega_0 t). \tag{1}$$

Граничные условия:

$$Z(0,t)=0;\;\; Z(l_0(t),t)=0. \tag{2}$$

Начальные условия не оказывают влияние на резонансные свойства линейных систем, поэтому в данной задаче они не рассматриваются [1].

В (1), (2) используются следующие обозначения:

$Z(x,t)$ - поперечное смещение точки струны с координатой x в момент времени t; $a=\sqrt{T/\rho}-$ минимальная скорость распространения волн, T – сила натяжения струны, $\rho-$ линейная плотность массы струны; $l_0(t)=L_0-v_0t$ - закон движения правой границы; L_0- начальная длина струны; v_0- скорость движения границы; $W_0(z)$ - функция класса C^1 ; B,ω_0 - постоянные величины (в случае действия гармонического возмущения ω_0 является частотой этого возмущения).

2. Решение задачи приближенным методом Канторовича-Галеркина.

Если ввести в задачу (1), (2) безразмерные переменные:

$$\xi=\frac{\omega_0}{a}x;\;\; \tau=\omega_0 t+\frac{\omega_0 L_0-a}{-v_0} \tag{3}$$

и новую функцию $Z(x,t)=BU(\xi,\tau),$ то исходная задача примет вид:

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)-U_{\xi\xi}(\xi,\tau)=\cos W(\tau); \tag{4}$$

$$U(0,\tau)=0;\;\; U(l(\varepsilon\tau),\tau)=0, \tag{5}$$

где $l(\tau)=1+\varepsilon\tau;\;\; \varepsilon=-\dfrac{v_0}{a};\;\; W(\tau)=W_0(\tau-\gamma_0);\;\; \gamma_0=\dfrac{-\omega_0 L_0+a}{v_0}.$

Решение задачи (4), (5) будем искать в виде

$$U(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau). \tag{6}$$

Здесь $X_n(\xi,\tau)=\sin\dfrac{\pi n\xi}{l(\tau)},$ при этом $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)=\dfrac{\pi n}{l(\tau)}.$

Подставляя n-ный член ряда (6) в уравнение (3) получим:

$$\left[f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)\right]_{\tau\tau}+\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)=\cos W(\tau). \tag{7}$$

Как и в [1], функцию $f_n(\tau)$ будем определять из условия ортогональности левой части уравнения (7) с функцией $X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)$ на интервале $[0,l(\tau)]$. В этом случае будем иметь:

$$\int_0^{l(\tau)} \left[f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)\right]_{\tau\tau} X_n(\xi,\varepsilon\tau)d\xi + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)f_n(\tau)-$$
$$-\cos W(\tau)\int_0^{l(\tau)} X_n(\xi,\varepsilon\tau)d\xi=0$$

или с точностью до величин порядка малости ε^2:

$$f_n''(\tau)+2\frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)}f_n'(\tau)+\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)f_n(\tau)=-\cos W(\tau)Q_n(\varepsilon\tau), \qquad (8)$$

где

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)=\int_0^{l(\tau)} X_n^2(\xi,\varepsilon\tau)d\xi=\frac{l(\tau)}{2};$$
$$\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)=\int_0^{l(\tau)} X_{n_\tau}(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)d\xi=\frac{\varepsilon l'(\tau)}{4};$$
$$Q_n(\varepsilon\tau)=-\frac{\int_0^{l(\tau)} X_n(\xi,\varepsilon\tau)d\xi}{A_{n1}(\varepsilon\tau)}=\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}.$$

Для преобразования уравнения (8), чтобы оно не содержало члена с $f_n'(\tau)$, введем новую функцию

$$f_n(\tau)=A_{0n}(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau), \qquad (9)$$

Где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau)=\exp\left[-\int_0^{\tau}\frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\zeta)}{A_{1n}(\varepsilon\zeta)}d\zeta\right]=\frac{1}{\sqrt{l(\tau)}}.$$

Тогда с точностью до величин порядка ε^2

$$\mu_n''(\tau)+\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau)=\theta_n(\tau), \qquad (10)$$

где

$$\theta_n(\tau) = M_n(\varepsilon\tau)\cos W(\tau); \quad (11)$$

$$M_n(\varepsilon\tau) = -\frac{Q_n(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)} = \frac{2(1-(-1)^n)\sqrt{l(\tau)}}{\pi n}. \quad (12)$$

Таким образом, выполняя преобразования уравнения (10), аналогичные преобразованиям [2], для амплитуды колебаний, соответствующих *n*-ной динамической моде, получим следующее выражение:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau)\left\{\left[\int_0^\tau F_n(\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}, \quad (13)$$

где

$$E_n^2(\tau) = \frac{1}{\pi n}; \ \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta);$$

$$F_n(\tau) = \frac{(1-(-1)^n)l(\varepsilon\tau)}{(\pi n)^{3/2}}.$$

Заметим, что в связи с медленным движением границ при исследовании резонансных свойств, функция $W_0(\omega_0 t)$ в уравнении (1) имеет вид [1]:

$$W_0(\omega_0 t) = \omega_0 t + \psi_0\left(\frac{v_0 t}{a}\right),$$

где $\psi_0\left(\frac{v_0 t}{a}\right)-$ функция, характеризующая медленное изменение частот возмущающих воздействий. Поэтому членами вида $\frac{v_0}{a}\psi_0'\left(\frac{v_0 t}{a}\right)$, которые на резонансные свойства влияют, как величины порядка малости ε^2, можно пренебречь.

Если в задачу (1), (2) ввести новую функцию $Z(x,t) = V(x,t) - B\cos W_0(\omega_0 t)$, то задача примет вид

$$V_{tt}(x,t) - a^2 V_{xx}(x,t) = 0; \quad (14)$$

$$V(0,t) = B\cos W_0(\omega_0 t); \quad V(l_0(t),t) = B\cos W_0(\omega_0 t). \quad (15)$$

Введем в задачу (14), (15) безразмерные переменные (3) и новую функцию $V(x,t) = Bu(\xi,\tau),$ в результате чего получим

$$u_{\tau\tau}(\xi,\tau) - u_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0; \tag{16}$$

$$u(0,\tau) = \cos W(\tau); \;\; u(l(\varepsilon\tau),\tau) = \cos W(\tau). \tag{17}$$

Следует отметить, что в работе [1] получено уравнение (11) для задачи (16), (17) в виде:

$$\theta_n(\tau) = M_{n11}(\varepsilon\tau)\cos W(\tau) + M_{n21}(\varepsilon\tau)\cos W(\tau),$$

где $M_{n11}(\varepsilon\tau) = \dfrac{2\pi n}{l^{3/2}(\tau)}$; $M_{n21}(\varepsilon\tau) = -\dfrac{2\pi n(-1)^n}{l^{3/2}(\tau)}$.

Таким образом, для задачи (16), (17) уравнение (10) преобразуется к виду

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) y_n(\tau) = \frac{2(1-(-1)^n)\pi n}{l^{3/2}(\tau)} \cos W(\tau). \tag{18}$$

В случае, если в уравнение (8) вместо функции (9) ввести функцию вида

$$f_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau) y_n(\tau) + Q_n(\varepsilon\tau)\cos W(\tau),$$

то оно преобразуется так же к виду (18). В этом случае в выражении для амплитуды колебаний (13) функция $F_n(\tau)$ примет вид

$$F_n(\tau) = \frac{(1-(-1)^n)\sqrt{\pi n}}{l(\varepsilon\tau)}.$$

3. Аналитическое решение.

Решим задачу (16), (17) методом замены переменных в функциональном уравнении [3]. Начальные условия примем нулевыми.

Для решения задачи используем метод Даламбера. Общее решение уравнения (16) имеет вид:

$$U(\xi,\tau) = g(\tau+\xi) + G(\tau - \xi), \tag{19}$$

где $g(z)$ и $G(z)-$ произвольные функции, которые необходимо определить из граничных условий, $z-$независимая переменная.

Подставляя решение (19) в граничные условия (17), нетрудно получить следующую задачу:

$$\begin{cases} g(\tau+\ell_1(\tau))+G(\tau-\ell_1(\tau))=\cos W(\tau); \\ g(\tau+\ell_2(\tau))]+G(\tau-\ell_2(\tau))=\cos W(\tau). \end{cases} \tag{20}$$

Введем в систему (20) новые функции

$$g(z)=r(\varphi(z)); G(z)=R(\psi(z)), \tag{21}$$

где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются из следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(\tau+\ell_1(\tau))=\psi(\tau-\ell_1(\tau)); \\ \varphi(\tau+\ell_2(\tau))=\psi(\tau-\ell_2(\tau))+1. \end{cases} \tag{22}$$

Введем обозначения в первом уравнении системы (20)

$$\varphi(\tau+\ell_1(\tau))=z;\ \psi(\tau-\ell_1(\tau))=z \tag{23}$$

и во втором уравнении этой системы

$$\varphi(\tau+\ell_2(\tau))=z;\ \psi(\tau-\ell_2(\tau))=z-1. \tag{24}$$

Из (23), (24) следует, что в первом уравнении системы (20)

$$\tau=0,5(\bar{\varphi}(z)+\bar{\psi}(z)),$$

а во втором уравнении

$$\tau=0,5(\bar{\varphi}(z)+\bar{\psi}(z-1)),$$

где $\overline{\varphi}(z), \overline{\psi}(z)$ – функции, обратные к $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

С учетом сделанной замены система (20) примет вид

$$\begin{cases} r(z)+R(z)=\theta_1(z); \\ r(z)+R(z-1)=\theta_2(z), \end{cases} \tag{25}$$

где $\theta_1(z)=\cos W(0,5\overline{\varphi}(z)+0,5\overline{\psi}(z)); \quad \theta_2(z)=\cos W(0,5\overline{\varphi}(z)+0,5\overline{\psi}(z-1))$.

Из первого уравнения системы (25) получим:

$$R(z)=\theta_1(z)-r(z). \tag{26}$$

После подстановки (26) во второе уравнение системы (25) будем иметь:

$$r(z)-r(z-1)=\theta(z). \tag{27}$$

Здесь

$$\theta(z)=\theta_2(z)-\theta_1(z-1)=\cos W(z)-\cos W(z-1). \tag{28}$$

Таким образом, задача сведена к решению уравнения (27).

Используем для решения задачи интегральное преобразование Лапласа

Используя методику, описанную в [3], получим:

$$U(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} V_n(\xi,\tau),$$

где
$$U(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\{\pi n[\varphi(\tau+\xi)-\psi(\tau-\xi)]\}\times$$

$$\times(\cos\{\pi n[\varphi(\tau+\xi)+\psi(\tau-\xi)]\}4\int_0^{\psi(\tau-\xi)}\theta(\zeta)\sin(2\pi n\zeta)d\zeta -$$

$$-\sin\{\pi n[\varphi(\tau+\xi)+\psi(\tau-\xi)]\}4\int_0^{\psi(\tau-\xi)}\theta(\zeta)\cos(2\pi n\zeta)d\zeta). \tag{29}$$

Функция $\sin\left\{\pi n\left[\varphi\left(\tau+\xi\right)-\psi\left(\tau-\xi\right)\right]\right\}$ - *n*-я динамическая мода системы, $\omega(\xi,\tau)=\dfrac{\partial}{\partial\tau}\{\pi n[\varphi(\tau+\xi)+\psi(\tau-\xi)]\}$ - мгновенная собственная частота *n*-го собственного колебания.

Выполняя преобразования уравнения (29), аналогичные преобразованиям [3], получим выражение для полной амплитуды в точке $\xi=\xi_0(\tau)$, соответствующей максимальному размаху колебаний

$$A_n^2(\tau)=16\left\{\left[\int_0^{b(\tau)}F_n(\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int_0^{b(\tau)}F_n(\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}, \tag{30}$$

где

$$b(\tau)=\psi(\tau-\xi_0(\tau));$$

$$\varphi(z)=\psi(z)=\frac{\ln[(vz+1)/(1-v)]}{\ln[(1+v)/(1-v)]}-1;\ \ F_n(\zeta)=\sin\left\{\frac{1}{2}\left(W(\zeta-1)-W(\zeta)\right)\right\};$$

$$\Phi_n(\zeta)=2\pi n\zeta-\frac{1}{2}(W(\zeta-1)+W(\zeta));$$

$$W\left(\zeta\right)=W\left(\frac{1}{v}\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{\zeta}-\frac{1}{v}\right);\ \ W(\zeta-1)=W\left(\frac{1+v}{v}\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{\zeta-1}-\frac{1}{v}\right).$$

Таким образом, выражения для амплитуд колебаний системы на *n*-ой динамической моде, полученные с помощью метода Канторовича-Галеркина (13) и метода замены переменных в функциональном уравнении (30) при граничных условиях (17) имеют аналогичный вид.

Список литературы

1. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2009. – 131 с.
2. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича–Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки», 2009, 1 (18), 149–158.
3. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки», 2012, 3 (28), 145-151.
4. *Савин Г.Н., Горошко О.А*. Динамика нити переменной длины // Наук.думка, Киев, 1962, 332 стр.
5. *Весницкий А.И., Потапов А.И.* Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках // Динамика систем. Горьковский университет. – 1975. – №7. – С. 84–89.
6. *Горошко О. А., Савин Г. Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.
7. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, 4. Физматгиз, М., 1958.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
9. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Математические модели нелинейных продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 2 (19) – 2015. – С. 382–397.
10. *Литвинов В.Л.* Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно–технического развития. № 4 (92), 2015.
11. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении // Журнал Средневолжского математического общества. Т. 15, № 3. 2013. – С. 112–119.

Дата поступления статьи: 29 октября 2016 года.