УДК 62-13

ОБКАТКА СО СКОЛЬЖЕНИЕМ РОТОРА ПО СТАТОРУ И ВЛИЯНИЕ НА ЕЁ ЧАСТОТУ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА И ЗАЗОРОВ МЕЖДУ НИМИ

©Андрей Николаевич Никифоров
ИМАШ РАН, Москва, Россия,
n.andre@mail.ru

Аннотация. *Строится теория обратного безотрывного прецессионного движения (качения) с постоянной угловой скоростью равномерно вращающегося сбалансированного ненагруженного (постоянной силой) и несимметричного ротора по жесткому статору с проскальзыванием между ними без учета всякого трения. Благодаря этим допущениям впервые показано, что частота прецессии ротора поддается точному расчету не только в случае перекатывания без скольжения, когда она задается частотой вращения и отношением радиуса ротора в месте контакта к радиальному зазору, но и в случае перекатывания с проскальзыванием. Тогда она определяется той или иной частотой собственных колебаний опирающегося на статор ротора и не столько его гироскопическими моментами согласно численным расчетам автора и коэффициентом трения скольжения между ними вопреки результатам многих исследователей, сколько роторным прогибом и радиальным зазором вне места первоначального контакта. В отличие от известных автору научных работ разработанная теория предсказывает несколько диапазонов чистого качения и качения со скольжением ротора по статору.*

Ключевые слова: *частота обкатки с проскальзыванием.*

Объект исследования

Согласно классическим представлениям [1-6], если по какой-либо причине гибкий ротор заденет статор, радиальный зазор между которыми δ, то с большой вероятностью возникнет устойчивая обратная прецессия ротора. Центр ротора в плоскости контакта начнет двигаться по окружности радиуса δ с угловой скоростью Ω много большей (по модулю) скорости вращения ω. При низких ω реализуется качение ротора по статору без скольжения, а скорость вращения роторного центра определяется геометрическим соотношением $\Omega=\omega r/\delta$, где r - радиус ротора в плоскости контакта. При высоких ω скорость обратной прецессии Ω зависит не только от геометрии, но и от количества проскальзывания между ротором и статором. Постулируется, что эти явления возможны даже при весьма малом числе оборотов за единицу времени, в т.ч. при неуравновешенности и горизонтальности ротора, и обусловлены силой контактного трения, которая стремится сместить ротор и вызывает движение его оси в сторону противоположную собственному вращению ротора. Давление, необходимое для существования силы трения, обеспечивается центробежной силой $me\Omega^2$, где m - масса ротора, e - прогиб оси ротора в плоскости его центра инерции.

В более поздних работах [7-10], в т.ч. за рубежом, так или иначе исследуется контактная динамика гибкого неуравновешенного симметричного ротора с жестким, податливым или несоосным статором и часто заодно устойчивость возникающих режимов движения. В общем возможны: движения с ударами ротора о статор – конечно и бесконечно ударные, а также безотрывные движения – чистое скольжение, качение с проскальзыванием в виде прямой и обратной прецессии, чистое качение. Первый и второй среди безотрывных

режимов характеризуются как «волочение», а третий и четвертый – как «обкатывание». Поскольку первый тривиален в силу синхронности прецессии с собственным вращением ротора, второй неустойчив, четвертый, как отмечено выше, задается геометрической взаимосвязью, пристального внимания заслуживает третий – качение со скольжением в форме обратной прецессии ротора. Тем более он оказывается наиболее нежелательным, так как обкатка с проскальзыванием сопровождается значительной и постоянной контактной нагрузкой, что приводит к быстрому нагреву и истиранию ротора и статора. При других безотрывных режимах или ударах контактные усилия соответственно есть меньше или периодически исчезают, поэтому разрушение роторной системы происходит медленнее.

Исследуемый ротор (рис.1) представляет собой консольный в свободном от контакта (неопертом) состоянии, упругий на изгиб, достаточно жесткий на сжатие-растяжение и легкий вал с уравновешенным диском массой m в абсолютно твердых подшипниках, один из которых имеет радиальный зазор δ. Допущение по подшипникам оправдано тем, что многие роторные машины проектируются из расчета, чтобы жесткость статора примерно вдвое превышала жесткость ротора.

Из-за различных характеристик опор при вращении и прецессии вала диск будет поворачиваться и создавать, даже в случае нахождения диска посередине между опорами, гироскопический эффект, игнорируемый всеми знакомыми автору исследователями контактной роторной динамики.

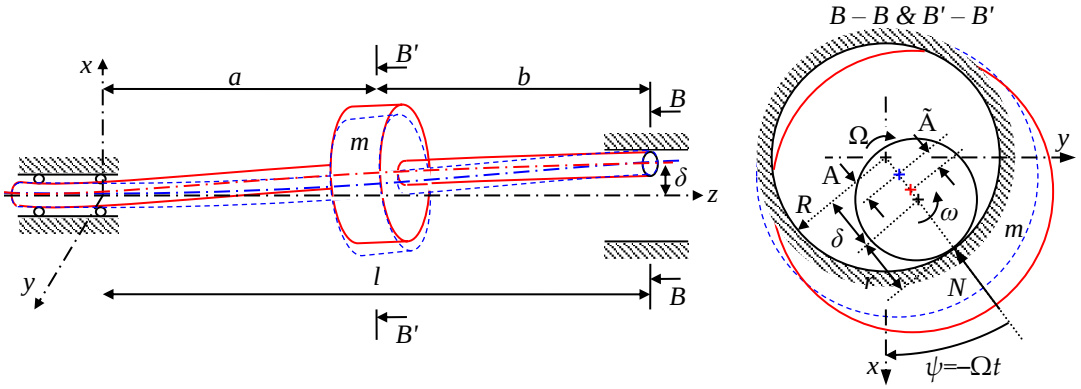


Рис.1. Движение гибкого ротора по жесткому статору (по подшипнику с зазором)

Предполагается, что устанавливается качение конца ротора (вала) по статору (по подшипнику с зазором) с проскальзыванием и сопряженная с ним обратная прецессия центра инерции ротора (диска) с неизвестными угловой скоростью Ω и радиусом $A+\tilde{A}$, где $A=\alpha\delta$ и α находятся из решения статической задачи контактной деформации ротора. Причем такое движение возбуждается не в результате трения ротора о статор, а за счет нескольких ньютоновских соударений между ними, например после 12 ударов с коэффициентом восстановления 0.55 (рис.2).

Возможность возбуждения обкатки с проскальзыванием не только трением, но и ударами разрешает удобное и полезное рассмотрение консервативной (недемпфированной) роторной системы, ведь параметры любого трения – контактного, внутреннего, внешнего – достоверно определимы лишь опытным путем.

Принимается допущение, что ротор связан с другими достаточно большими вращающимися массами, за счет которых скорость его вращения при установлении обкатки остается постоянной.

Считается, что инерционная нагрузка $me\Omega^2$ намного больше дисбалансной и веса ротора, поэтому эффекты неуравновешенности и гравитации не учитываются.

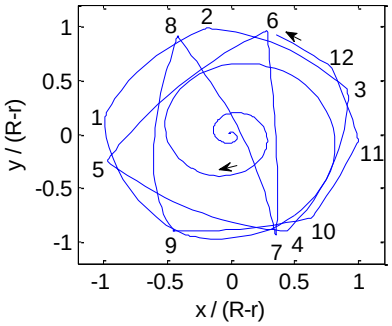


Рис.2. Пример ударной прецессии гибкого ротора по жесткому статору (перед обкаткой)

Наконец, в данной работе по сравнению с трудами предшественников вместо терминов «контакт» и «задевание» используются понятия «касание» и «опирание». Причем под касанием понимается взаимодействие, не влияющее на упругие свойства вала, а под опиранием – взаимодействие, при котором происходит изменение поперечной жесткости и формы изгиба вала.

Статическая контактная задача

Если условиться невесомостью вала, то в каждый момент времени он должен рассматриваться как упругое тело, находящееся в равновесии, причем его деформацию следует трактовать как статическую. Статическая деформация вала вполне определяется величиной прогиба в точке симметрии насаженного на него диска и направлением касательной к оси изогнутого вала в этой точке, т.е. смещениями x и y вдоль одноименных осей, а также углами поворота φ_x и φ_y вокруг векторов этих отклонений. Этими же координатами должна определяться упругая реакция **P**, действующая на диск со стороны деформированного вала. Вместе с тем динамическая нагрузка **F**, прикладываемая к валу от диска, равна и противоположна **P**.

Решая статическую задачу об изгибе вала под действием силы F и момента M, сосредоточенных в одной плоскости, можно найти их зависимости от величин x и φ_y или y и φ_x, что и даст составляющие **P**, влияющие на движение диска. Однако взаимосвязь нагрузки $F+M$ с параметрами x и φ_y или y и φ_x, характеризующими изгиб вала, существенно зависит от условий закрепления вала. Это сравнительно просто показать аналитическими методами, известными из курса сопротивления материалов, и на примере заданной системы, тем более что консольная компоновка часто встречается в роторных машинах.

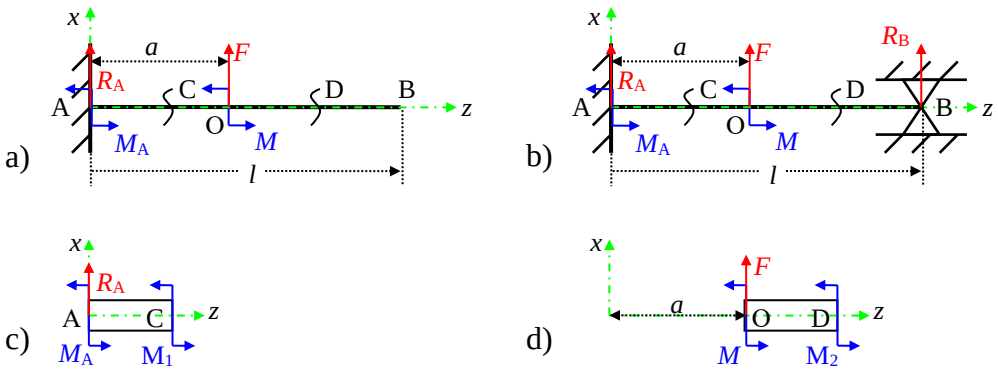


Рис.2. Схемы нагружения вала и его участков при касании (a,c) и опирании (b,d)

Исходные граничные условия сводятся к тому, что один конец вала (A) оказывается

заделанным, а другой (B) – свободным (рис.2,a). Если заменить действие заделки положительными (направленными одинаково с F и M) реактивными силой R_A и моментом M_A, то уравнения равновесия – одно для сил, другое для моментов – получат вид:

$$\begin{array}{l} \sum \Re_x = R_A + F = 0 \\ \sum \mathcal{M}_A = M_A + M + Fa = 0 \end{array}. \quad (1)$$

Деформация вала может быть выражена математически с помощью метода сечений, а также дифференциального уравнения прямого изгиба балки:

$$EJ\frac{d^2x}{dz^2} = \mathrm{M}. \quad (2)$$

Сосредоточенная нагрузка $F+M$ «делит» вал на два участка: на до (AO) и после (OB) центра диска. Если рассечь вал на первом участке (C), отбросить всю его правую часть (CB) и вместо неё рассмотреть внутренний изгибающий момент M_1, соответствующий положительному направлению, то к оставленной части вала (рис.2,c) будет применимо следующее моментное уравнение равновесия:

$$\sum \mathcal{M}_C = \mathrm{M}_1 + M_A - R_A z = 0. \quad (3)$$

Из (2), (3) перемещения произвольного поперечного сечения на первом участке:

$$\begin{array}{l} \varphi_{y1} \approx \dfrac{dx_1}{dz} = \dfrac{1}{EJ}\left(R_A \dfrac{z^2}{2} - M_A z \right) + C_1 \\ x_1 = \dfrac{1}{EJ}\left(R_A \dfrac{z^3}{6} - M_A \dfrac{z^2}{2} \right) + C_1 z + C_2 \end{array} \quad (4)$$

или с учетом (1):

$$\begin{array}{l} \varphi_{y1} = \dfrac{1}{EJ}\left[(M + Fa) z - F \dfrac{z^2}{2} \right] + C_1 \\ x_1 = \dfrac{1}{EJ}\left[(M + Fa) \dfrac{z^2}{2} - F \dfrac{z^3}{6} \right] + C_1 z + C_2 \end{array}. \quad (5)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 задаются условиями закрепления. В заделке или что то же в начале отсчета $\varphi_{y1}=0$ и $x_1=0$, поэтому $C_1=C_2=0$.

Рассечение вала на втором участке (D), отбрасывание его первого участка (AO) и остальной части (DB), а также добавление положительного изгибающего момента M_2 (рис.2,d) позволяют составить уравнения моментов и изгиба для произвольного поперечного сечения на втором участке (OB):

$$\sum \mathcal{M}_D = \mathrm{M}_2 + M - F(z - a) = 0,$$

$$\begin{aligned} \varphi_{y2} &= \frac{1}{EJ}\left[F\frac{(z-a)^2}{2} - M(z-a)\right] + C_3 \\ x_2 &= \frac{1}{EJ}\left[F\frac{(z-a)^3}{6} - M\frac{(z-a)^2}{2}\right] + C_3(z-a) + C_4 \end{aligned}. \quad (6)$$

Постоянные C_3 и C_4 определяются граничными условиями, а именно – перемещениями первого участка, т.е. $C_3 = \varphi_{y1}$ и $C_3(z-a) + C_4 = x_1$.

В силу (5), (6) прогиб и угол поворота вала в месте прикрепления диска ($z=a$):

$$\begin{aligned} x(a) &= \frac{a^3}{3EJ}F + \frac{a^2}{2EJ}M \\ \varphi_y(a) &= \frac{a^2}{2EJ}F + \frac{a}{EJ}M \end{aligned}, \quad (7)$$

а также на свободном конце ($z=l$) при подстановке $a=l-b$:

$$\begin{aligned} x(l) &= \frac{(2l+b)(l-b)^2}{6EJ}F + \frac{l^2-b^2}{2EJ}M \\ \varphi_y(l) &= \frac{(l-b)^2}{2EJ}F + \frac{l-b}{EJ}M \end{aligned}. \quad (8)$$

При опирании свободного конца вала на статор в месте контакта (В) образуется шарнир (рис.2,b). К тому же возникает статическая неопределимость, раскрытие которой осуществимо с помощью дополнительного уравнения. Для его составления достаточно заменить связь (опору) В реакцией R_B и рассмотреть суммарный прогиб в точке В равный нулю:

$$x(l) + \tilde{x}(l) = 0,$$

где $x(l)$ и $\tilde{x}(l)$ - прогиб вала в точке В, вызванный соответственно нагрузкой $F+M$ согласно (8) и усилием R_B, т.е. таким что:

$$\tilde{x}(l) = \frac{l^3}{3EJ}R_{\text{B}}.$$

Очевидно:

$$R_{\text{B}} = -\frac{(2l+b)(l-b)^2}{2l^3}F - \frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}M.$$

Реакция R_B изменяет силовое и моментное равновесие, в т.ч. на опоре А:

$$\begin{aligned} \sum \Re_x &= R_{\text{A}} + F + R_{\text{B}} = 0 \\ \sum M_{\text{A}} &= M_{\text{A}} + M + F(l-b) + R_{\text{B}}l = 0 \end{aligned}.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{(2l+b)(l-b)^2}{2l^3}F + \frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}M - F \\ M_A &= \frac{(2l+b)(l-b)^2}{2l^2}F + \frac{3(l^2-b^2)}{2l^2}M - M - F(l-b) \end{aligned}. \quad (9)$$

Подстановка (9) в (4) при $z=l-b$ дает:

$$\begin{aligned} x(_{l-b}) &= \frac{3l+b}{12EJ}\frac{(l-b)^3b^2}{l^3}F + \frac{2b^2-(l-b)^2}{4EJ}\frac{(l-b)^2b}{l^3}M \\ \varphi_y(_{l-b}) &= \frac{2b^2-(l-b)^2}{4EJ}\frac{(l-b)^2b}{l^3}F + \frac{(l-b)^3+4b^3}{4EJ}\frac{(l-b)}{l^3}M \end{aligned}. \quad (10)$$

Зависимости (7), (10) могут быть представлены как:

$$\begin{aligned} x(a) &= \delta_{11}F + \delta_{12}M \\ \varphi_y(a) &= \delta_{21}F + \delta_{22}M \end{aligned},$$

где δ_{ij} - так называемые коэффициенты упругого влияния или статические перемещения вала в точке i под действием единичных усилий (силы и момента), приложенных в точке j, причем $\delta_{ij}=\delta_{ji}$.

Решение этих уравнений относительно искомых силы и момента:

$$\begin{aligned} F &= k_{11}x(a) + k_{12}\varphi_y(a) \\ M &= k_{21}x(a) + k_{22}\varphi_y(a) \end{aligned}, \quad (11)$$

где: $k_{11} = \frac{\delta_{22}}{\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2}$, $k_{12} = k_{21} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2}$, $k_{22} = \frac{\delta_{11}}{\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2}$.

По аналогии в другом перпендикулярном направлении получаются следующие зависимости между деформациями вала и внешними усилиями:

$$\begin{aligned} F_\perp &= k_{11}y(a) + k_{12}\varphi_x(a) \\ M_\perp &= k_{21}y(a) + k_{22}\varphi_x(a) \end{aligned}. \quad (12)$$

В общем коэффициенты δ_{ij} связаны с коэффициентами жесткости k_{ij} так, что матрица коэффициентов жесткости обратна матрице коэффициентов влияния:

$$[k_{ij}] = [\delta_{ij}]^{-1}.$$

В силу (7), (10) и последующих соотношений матрицы жесткости вала без и в случае опирания на статор:

$$[k_{ij}]=\begin{bmatrix}\frac{12EJ}{a^3} & -\frac{6EJ}{a^2}\\ -\frac{6EJ}{a^2} & \frac{4EJ}{a}\end{bmatrix},\qquad [\tilde{k}_{ij}]=\begin{bmatrix}3EJ\frac{4b^3+(l-b)^3}{b^3(l-b)^3} & -3EJ\frac{2b^2-(l-b)^2}{b^2(l-b)^2}\\ -3EJ\frac{2b^2-(l-b)^2}{b^2(l-b)^2} & EJ\frac{3l+b}{b(l-b)}\end{bmatrix}. \quad (13)$$

Здесь и далее величина, характеризующая опертый ротор, отмечена тильдой.

В заключение целесообразно привести коэффициент жесткости вала, равный силе, вызывающей единичный прогиб в условиях его значительной длины и, следовательно, пренебрежимо малого поворота сечения, где закреплен диск:

$$\mathrm{k}_{11}=k_{11}-\frac{k_{12}^2}{k_{22}}. \quad (14)$$

Разворачивание этой формулы с использованием соответствующих результатов решенной статической задачи показывает, что вал, касающийся статора и опирающийся на него – это далеко не одно и то же – в первом случае жесткость вала на изгиб меньше чем во втором:

$$\mathrm{k}_{11}=\frac{3EJ}{a^3},\ \tilde{\mathrm{k}}_{11}=\frac{12EJl^3}{a^3b^2(3l+b)},$$

$$\text{если } a=b=l/2:\ \mathrm{k}_{11}=24\frac{EJ}{l^3}<\ \tilde{\mathrm{k}}_{11}=\frac{768}{7}\frac{EJ}{l^3}\approx 110\frac{EJ}{l^3}.$$

Динамическая контактная задача

Если перемещение однодискового ротора в осевом направлении исключено, и масса его диска велика по сравнению с массой вала, то надлежит составить пять дифференциальных уравнений движения системы. Для этого целесообразно воспользоваться методом Лагранжа, предварительно выразив её кинетическую энергию.

Согласно теореме Кенига кинетическая энергия ротора складывается из кинетической энергии поступательного движения его центра инерции и кинетической энергии вращательного движения вокруг его центра инерции, что в однодисковом случае интерпретируется как:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2\right),$$

где $\dot{x},\dot{y}$ - линейные скорости центра диска вдоль соответствующих неподвижных осей, $I_{1,2,3}$ и $\omega_{1,2,3}$ - моменты инерции и угловые скорости диска вокруг главных осей его инерции.

Если бы вал был жестким, то угловая скорость диска, конечно, совпадала бы с угловой скоростью вала ω. В случае гибкого вала движение диска складывается из трех вращений с угловыми скоростями $-\dot{\varphi}_x,\dot{\varphi}_y$ и ω (рис.3). Связь этих величин с $\omega_{1,2,3}$ имеет вид:

$$\omega_1=-\dot{\varphi}_x\cos\varphi_y,\quad \omega_2=\dot{\varphi}_y,\quad \omega_3=\omega-\dot{\varphi}_x\sin\varphi_y.$$

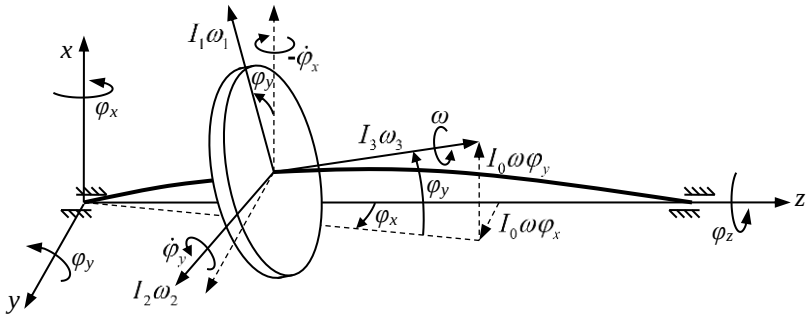


Рис.3. Движение и гироскопические моменты жесткого диска на упругом валу

Если диск круглый и однородный, то моменты инерции I_1 и I_2 постоянны и равны друг другу. Ниже они обозначаются как I. Параметр I_3 равен полярному или осевому моменту инерции диска I_0. В результате кинетическая энергия рассматриваемой системы:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{1}{2}\left[I\left(\dot{\varphi}_x^2\cos^2\varphi_y+\dot{\varphi}_y^2\right)+I_0\left(\omega^2-2\omega\dot{\varphi}_x\sin\varphi_y+\dot{\varphi}_x^2\sin^2\varphi_y\right)\right].$$

Энергия движения не является квадратичной и однородной функцией, что будет приводить к нелинейности дифференциальных уравнений. Для линеаризации, ввиду малости φ_y, допустимо принять $\cos\varphi_y=1$, $\sin\varphi_y=\varphi_y$ и отбросить последний член:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{1}{2}\left[I\left(\dot{\varphi}_x^2+\dot{\varphi}_y^2\right)+I_0\left(\omega^2-2\omega\dot{\varphi}_x\varphi_y\right)\right].$$

По Лагранжу:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=P_i,$$

где P_i - обобщенная нагрузка по i-ому перемещению q_i.

Обобщенными координатами рассматриваемой системы являются степени свободы диска:

$$q_1=x,\ q_2=y,\ q_3=\varphi_x,\ q_4=\varphi_y,\ q_5=\varphi_z.$$

Таким образом, получаются равенства:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}&=P_x\\
m\ddot{y}&=P_y\\
I\ddot{\varphi}_x-I_0\omega\dot{\varphi}_y&=P_{\varphi x}\\
I\ddot{\varphi}_y+I_0\omega\dot{\varphi}_x&=P_{\varphi y}
\end{aligned}.$$

Нагрузки P_x, P_y, $P_{\varphi y}$, $P_{\varphi x}$ равны и противоположны силам F, $F_\perp$ и моментам M, $M_\perp$ соответственно. Привлечение (11-12) дает следующие дифференциальные уравнения движения гибкого однодискового ротора, неопирающегося на статор:

$$\begin{aligned} &m\ddot{x}+k_{11}x+k_{12}\varphi_y=0\\ &m\ddot{y}+k_{11}y+k_{12}\varphi_x=0\\ &I\ddot{\varphi}_y+I_0\omega\dot{\varphi}_x+k_{21}x+k_{22}\varphi_y=0\\ &I\ddot{\varphi}_x-I_0\omega\dot{\varphi}_y+k_{21}y+k_{22}\varphi_x=0 \end{aligned}. \qquad (15)$$

Соблюдая принятые обозначения, целесообразно записать и уравнения движения гибкого однодискового ротора, опирающегося на статор, когда упругие характеристики ротора становятся другими (13), а инерционные остаются прежними:

$$\begin{aligned} &m\ddot{\tilde{x}}+\tilde{k}_{11}\tilde{x}+\tilde{k}_{12}\tilde{\varphi}_y=0\\ &m\ddot{\tilde{y}}+\tilde{k}_{11}\tilde{y}+\tilde{k}_{12}\tilde{\varphi}_x=0\\ &I\ddot{\tilde{\varphi}}_y+I_0\omega\dot{\tilde{\varphi}}_x+\tilde{k}_{21}\tilde{x}+\tilde{k}_{22}\tilde{\varphi}_y=0\\ &I\ddot{\tilde{\varphi}}_x-I_0\omega\dot{\tilde{\varphi}}_y+\tilde{k}_{21}\tilde{y}+\tilde{k}_{22}\tilde{\varphi}_x=0 \end{aligned}. \qquad (16)$$

Несмотря на то, что при составлении уравнений (15) и (16) в т.ч. предполагался статический изгиб ротора в условиях касания и опирания соответственно, описываемые этими уравнениями динамические системы будут равносильными, если первую из них догрузить силой нормального давления N (рис.1), а вторую разгрузить на величину $-N$:

$$\begin{aligned} &m\ddot{x}+k_{11}x+k_{12}\varphi_y=-N\cos\psi\\ &m\ddot{y}+k_{11}y+k_{12}\varphi_x=-N\sin\psi\\ &I\ddot{\varphi}_y+I_0\omega\dot{\varphi}_x+k_{21}x+k_{22}\varphi_y=0\\ &I\ddot{\varphi}_x-I_0\omega\dot{\varphi}_y+k_{21}y+k_{22}\varphi_x=0 \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} &m\ddot{\tilde{x}}+\tilde{k}_{11}\tilde{x}+\tilde{k}_{12}\tilde{\varphi}_y=N\cos\psi\\ &m\ddot{\tilde{y}}+\tilde{k}_{11}\tilde{y}+\tilde{k}_{12}\tilde{\varphi}_x=N\sin\psi\\ &I\ddot{\tilde{\varphi}}_y+I_0\omega\dot{\tilde{\varphi}}_x+\tilde{k}_{21}\tilde{x}+\tilde{k}_{22}\tilde{\varphi}_y=0\\ &I\ddot{\tilde{\varphi}}_x-I_0\omega\dot{\tilde{\varphi}}_y+\tilde{k}_{21}\tilde{y}+\tilde{k}_{22}\tilde{\varphi}_x=0 \end{aligned}.$$

Здесь x, y, φ_x, φ_y - отклонения диска от начала отсчета, т.е. от линии подшипников, при касании ротором статора, а $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{\varphi}_x$, $\tilde{\varphi}_y$ - последующие перемещения диска (уже не от начала отсчета) в случае опирания ротора на статор.

Умножив члены вторых и четвертых уравнений на мнимую единицу, сложив уравнения – первые со вторыми, третьи с четвертыми, а также обозначив $x+iy$ через z, $\varphi_y+i\varphi_x$ через φ, $\tilde{x}+i\tilde{y}$ через $\tilde{z}$ и $\tilde{\varphi}_y+i\tilde{\varphi}_x$ через $\tilde{\varphi}$, выгодно перейти к комплексным уравнениям движения:

$$\begin{aligned} &m\ddot{z}+k_{11}z+k_{12}\varphi+Ne^{i\psi}=0\\ &I\ddot{\varphi}-iI_0\omega\dot{\varphi}+k_{21}z+k_{22}\varphi=0 \end{aligned}, \qquad (17а)$$

$$\begin{aligned} &m\ddot{\tilde{z}}+\tilde{k}_{11}\tilde{z}+\tilde{k}_{12}\tilde{\varphi}-Ne^{i\psi}=0\\ &I\ddot{\tilde{\varphi}}-iI_0\omega\dot{\tilde{\varphi}}+\tilde{k}_{21}\tilde{z}+\tilde{k}_{22}\tilde{\varphi}=0 \end{aligned}. \qquad (17б)$$

В рассматриваемых консервативных системах при начальной скорости прецессии Ω ротора против скорости вращения ω и без отрыва от статора будет:

$$z=Ae^{-i\Omega t},\ \varphi=\Phi e^{-i\Omega t},\ \tilde{z}=\tilde{A}e^{-i\Omega t}\ \text{и}\ \tilde{\varphi}=\tilde{\Phi}e^{-i\Omega t},$$

где A, Φ и $\tilde{A}$, $\tilde{\Phi}$ - постоянные во времени поступательные и угловые смещения диска. Поэтому решения уравнений (17) имеют вид:

$$\begin{matrix}(k_{11}-m\Omega^2)\mathrm{A}+k_{12}\Phi=-N\\ k_{21}\mathrm{A}+(k_{22}-I\Omega^2-I_0\omega\Omega)\Phi=0\end{matrix}, \qquad \begin{matrix}(\tilde{k}_{11}-m\Omega^2)\tilde{\mathrm{A}}+\tilde{k}_{12}\tilde{\Phi}=N\\ \tilde{k}_{21}\tilde{\mathrm{A}}+(\tilde{k}_{22}-I\Omega^2-I_0\omega\Omega)\tilde{\Phi}=0\end{matrix}.$$

Можно заметить, что вполне ожидаемо, сила нормального давления *N* действует в одном направлении с силами упругости ротора, касающегося статора. Однако сила *N* противоположна восстанавливающим силам опирающегося ротора, т.е. она по отношению к нему является возмущающей.

Решения (17) в матричной форме:

$$\{f\}=\left(\Omega^2[M]+\omega\Omega[G]-[K]\right)\{q\},\quad \{f\}=\left([\tilde{K}]-\Omega^2[M]-\omega\Omega[G]\right)\{\tilde{q}\},\ \text{где}\ \{f\}=\begin{Bmatrix}N\\0\end{Bmatrix},$$

$$[M]=\begin{bmatrix}m&0\\0&I\end{bmatrix},\ [G]=\begin{bmatrix}0&0\\0&I_0\end{bmatrix},\ [K]=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{bmatrix},\ [\tilde{K}]=\begin{bmatrix}\tilde{k}_{11}&\tilde{k}_{12}\\\tilde{k}_{21}&\tilde{k}_{22}\end{bmatrix},\ \{q\}=\begin{Bmatrix}\mathrm{A}\\\Phi\end{Bmatrix},\ \{\tilde{q}\}=\begin{Bmatrix}\tilde{\mathrm{A}}\\\tilde{\Phi}\end{Bmatrix}.$$

Отсюда[1]:

$$\{\tilde{q}\}=\frac{\Omega^2[M]+\omega\Omega[G]-[K]}{[\tilde{K}]-\omega\Omega[G]-\Omega^2[M]}\{q\}. \qquad (18)$$

В случае длинного (Φ→0) или одночастотного (14) ротора полученные решения упрощаются:

$$N=\left(m\Omega^2-\mathrm{k}_{11}\right)\mathrm{A},\quad N=\left(\tilde{\mathrm{k}}_{11}-m\Omega^2\right)\tilde{\mathrm{A}},$$

$$\tilde{\mathrm{A}}=\frac{m\Omega^2-\mathrm{k}_{11}}{\tilde{\mathrm{k}}_{11}-m\Omega^2}\mathrm{A}. \qquad (19)$$

Прогиб A и угол поворота Φ ротора (в том или ином его сечении) при касании статора – известные из анализа статики (7), (8) и ограниченные радиальным зазором величины. В условиях консольной компоновки в сечении на расстоянии *a* от заделки и нагружения единичной силой $\mathrm{A}=\frac{a^3}{3EJ}$, $\Phi=\frac{a^2}{2EJ}$ и $\delta=\frac{3l-a}{2a}\frac{a^3}{3EJ}$, следовательно:

$$\mathrm{A}=\frac{2a}{3l-a}\delta=\alpha\delta,\qquad \Phi=\frac{3}{3l-a}\delta=\beta\delta.$$

В центре симметричного ротора (*a*=*b*=½*l*): $\mathrm{A}=\frac{2}{5}\delta$, $\Phi=\frac{6}{5l}\delta$.

[1]Здесь для наглядности и далее в подобных формулах подразумевается так называемое левое матричное деление, заключающееся в нахождении обратной матрицы от знаменателя и умножения его на числитель слева. Когда матрица A - квадратная и невырожденная, решение X=A\B эквивалентно решению X=A^{-1}B в точном арифметическом смысле. Вместе с тем вычисления в компьютерных программах (в Mathcad, Maple и др.) реализуются точнее и быстрее в режиме с плавающей точкой. Следовательно, вместо инверсионных функций "A^{-1}", "inv(A)" и т.д. лучше использовать оператор "обратный слэш". Эта операция использует метод исключения Гаусса без явного формирования обратной матрицы.

Физическая и геометрическая интерпретация полученных решений, в т.ч. обсуждение ротора со многими степенями свободы и его гироскопического действия

Итак, в простейшем случае (при касании, отсутствии трения, симметричной постановке единственного диска и абсолютной жесткости контактных поверхностей) реакция статора на ротор радиальна, направлена к началу отсчета и имеет величину:

$$N = m\Omega^2 A - k_{11} A,$$

где $m\Omega^2 A$ - центробежная сила, обусловленная центростремительным ускорением диска ротора в движущейся синхронно с прецессией системе координат, $k_{11} A$ - восстанавливающая сила, создаваемая первичным прогибом упругого вала, на котором установлен диск (рис.4,a).

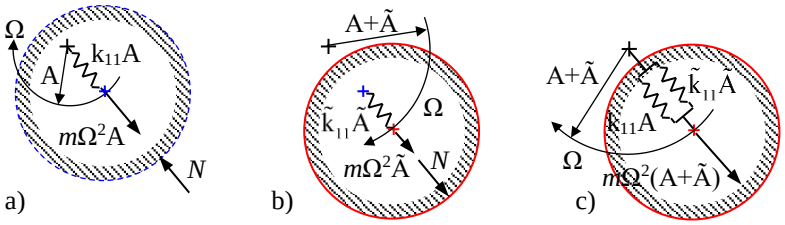


Рис.4. Силы, действующие на центр инерции ротора, при касании статора (a), добавляющиеся при опирании на статор (b), а также их геометрическая сумма (c)

Вместе с тем создание силы давления N невозможно без вторичной изгибной деформации вала. Другими словами, чтобы завершить формулировку, в случае опирания необходимо учитывать реакцию вала $\tilde{k}_{11}\tilde{A}$. Кроме того, необходимо ввести дополнительную силу инерции $m\Omega^2\tilde{A}$. Таким образом, существует тождественная реакция ротора на статор (рис.4,b):

$$N = \tilde{k}_{11}\tilde{A} - m\Omega^2\tilde{A}.$$

Уравнение равновесия сил в результате их геометрического сложения (рис.4,c):

$$m\Omega^2(A + \tilde{A}) = k_{11}A + \tilde{k}_{11}\tilde{A}.$$

В нём узнаваема формула (19), определяющая радиус прецессии гибкого однодискового симметричного ротора при обкатке жесткого статора, которую разумно переписать как:

$$\tilde{A} = \frac{\Omega^2 - \lambda_1^2}{\tilde{\lambda}_1^2 - \Omega^2} A, \quad \text{где} \quad \lambda_1 = \sqrt{k_{11}/m}, \quad \tilde{\lambda}_1 = \sqrt{\tilde{k}_{11}/m}. \qquad (20)$$

Как видно, если $\Omega<\lambda_1$, то $\tilde{A}<0$, т.е. пока скорость обратной прецессии ротора ниже критической ротора, никакого перекатывания в системе «ротор-статор» не получится, даже с большим трением и множеством сильных ударов. И наоборот, так как A и $\tilde{A}$ однозначно положительные величины, скорость обкатки Ω не может быть меньше λ_1.

Если $\lambda_1<\Omega<\tilde{\lambda}_1$, то $\tilde{A}>0$, причем прогиб ротора увеличивается со скоростью обкатки и приобретает ярко выраженную резонансную форму ($\tilde{A}\to\infty$) в случае приближения Ω к критической скорости опирающегося ротора $\tilde{\lambda}_1$. Однако, так как радиус роторной прецессии ограничит зазор в другом месте δ' (рис.5), если конечно раньше не произойдет упругое смещение статора или упругая потеря устойчивости ротора, скорость обкатки с проскальзыванием в силу равенств (20), $A+\tilde{A}=\delta'$ и $A=\alpha\delta$ составит:

$$\Omega=\sqrt{\tilde{\lambda}_1^2-\alpha\frac{\delta}{\delta'}(\tilde{\lambda}_1^2-\lambda_1^2)}\,.$$

Очевидно, чем больше прогиб и зазор вне места первоначального контакта, тем ближе Ω к $\tilde{\lambda}_1$.

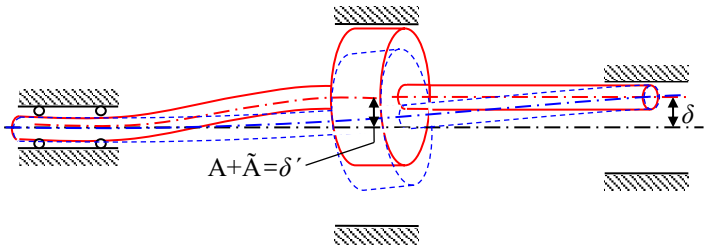


Рис.5. Движение гибкого ротора по жесткому статору при одинаковой величине зазоров между ними по всей длине $\delta=\delta'$

Если $\Omega>\lambda_1$, то опять-таки $\tilde{A}<0$, т.е. при обратно прецессионных скоростях, превышающих первую критическую опирающегося ротора, обкатка снова будет неустойчивой, но здесь следует понимать, что при высоких скоростях одночастотная модель достоверна лишь отчасти.

По аналогии для гибкого ротора со многими степенями свободы фундаментальное уравнение обкатки в жестком статоре имеет вид:

$$\Omega^2[M]\{q\}+\Omega^2[M]\{\tilde{q}\}=[K]\{q\}+[\tilde{K}]\{\tilde{q}\}\,, \qquad (21)$$

где [M] и [K] - матрицы инерции и жесткости ротора, составленные из масс, моментов инерции и коэффициентов жесткости его конечных элементов (дисков, балочных и упругих элементов), $\{q\}$ - вектор перемещений узлов конечных элементов вала, содержащий одно отличное от нуля поступательное смещение узла вблизи точки контакта со статором, равное радиальному зазору, $[\tilde{K}]$ - та же матрица [K], но с добавкой, учитывающей присоединение упругого элемента очень большой жесткости к узлу, ближайшему к контактной точке, $\{\tilde{q}\}$ - вектор перемещений узлов конечных элементов вала вследствие опирания на статор.

Неизвестные перемещения на основании (21):

$$\{\tilde{q}\}=\frac{\Omega^2[E]-[D]}{[\tilde{D}]-\Omega^2[E]}\{q\}\,, \qquad (22)$$

где $[E]=[M]^{-1}[M]$ - единичная матрица, $[D]=[M]^{-1}[K]$ и $[\tilde{D}]=[M]^{-1}[\tilde{K}]$ - динамические матрицы.

Как известно, любая матрица размером $n\times n$ и, следовательно динамическая, имеет ровно n собственных чисел (значений) и n собственных векторов и может быть приведена к

каноническому или диагональному виду (если конечно все собственные числа различны и им соответствуют неколлинеарные собственные векторы):

$$[\mathrm{D}]=[\mathrm{U}][\Lambda][\mathrm{U}]^{-1},$$

где $[\mathrm{U}]=\left[\{\mathrm{U}_1\}\quad\{\mathrm{U}_2\}\quad..\quad\{\mathrm{U}_n\}\right]=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & .. & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & .. & u_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ u_{n1} & u_{n2} & .. & u_{nn} \end{bmatrix}$ - матрица, составленная из собственных

векторов, $[\Lambda]=\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \Lambda_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$ - диагональная матрица из собственных

чисел или что то же самое из квадратов собственных частот ротора.

Наряду с этим допустимо разложение:

$$[\mathrm{E}]=[\mathrm{U}][\mathrm{U}]^{-1}.$$

Собственные числа Λ_i матрицы [D] есть корни характеристического многочлена данной матрицы:

$$\det\left([\mathrm{D}]-\Lambda[\mathrm{E}]\right)=0.$$

Для каждого собственного значения Λ_i всегда найдутся соответствующие собственные векторы по формуле:

$$\left([\mathrm{D}]-\Lambda_i[\mathrm{E}]\right)\{\mathrm{U}_i\}=0.$$

В силу отмеченных свойств матриц выражение (22) может быть преобразовано так, как ниже:

$$\{\tilde{\mathrm{q}}\}=\frac{[\mathrm{U}][\Omega^2-\Lambda][\mathrm{U}]^{-1}}{[\tilde{\mathrm{U}}][\tilde{\Lambda}-\Omega^2][\tilde{\mathrm{U}}]^{-1}}\{\mathrm{q}\},$$

где $[\Omega^2-\Lambda]=\begin{bmatrix} \Omega^2-\lambda_1^2 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \Omega^2-\lambda_2^2 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \Omega^2-\lambda_n^2 \end{bmatrix}$, $[\tilde{\Lambda}-\Omega^2]=\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1^2-\Omega^2 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2^2-\Omega^2 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \tilde{\lambda}_n^2-\Omega^2 \end{bmatrix}$.

Так как собственные векторы $\{\mathrm{U}_i\},\{\tilde{\mathrm{U}}_i\}$ и отклонения $\{\mathrm{q}\}$ всегда положительны, а при обкатке должно быть и $\{\tilde{\mathrm{q}}\}>0$, то её скорость ограничивается критическими скоростями свободного от контакта и опирающегося ротора:

$$\lambda_i<\Omega<\tilde{\lambda}_i.$$

Если предположить, что при меньших скоростях вращения обкатке с проскальзыванием предшествует чистое качение, то в каждом (*i*-ом) диапазоне ожидается сначала обкатка без скольжения с угловой скоростью $\Omega^{-}=\omega r/\delta$, а потом – обкатка с проскальзыванием и угловой скоростью Ω^{+}, близкой к *i*-ой критической опирающегося ротора $\tilde{\lambda}_i$.

Гироскопические моменты вызывают заметное повышение или понижение собственных частот ротора, соответственно при его прямой и обратной прецессии. Очевидно, их влияние распространяется на диапазоны и частоту обкатки. Обобщение (18) на случай гибкого ротора с несколькими дисками посредством принятых обозначений дает следующее уравнение амплитуд (прогибов и поворотов) в его сечениях при обкатке им жесткого статора:

$$\{\tilde{q}\}=\frac{\Omega^2[M]+\omega\Omega[G]-[K]}{[\tilde{K}]-\omega\Omega[G]-\Omega^2[M]}\{q\}.$$

Решая задачу собственных значений и векторов для делителя и делимого, т.е. для двух матричных полиномов вида $[M_0]+\lambda[M_1]+\lambda^2[M_2]=0$, можно рассчитать критические скорости свободного от контакта и опирающегося ротора, зависимые от скорости вращения $\lambda_i=\lambda_i(\omega)$. Это позволяет выяснить, что чем ниже диапазон и скорость обкатки, тем меньше влияние на них гироскопического эффекта, которое в низкочастотной области характеризуется как слабое.

Для понимания и обозрения складывающихся динамических свойств системы «гибкий ротор - жесткий статор» удобно построить диаграмму скоростей Кэмпбелла (рис.6). Здесь читатель возможно обратит внимание на то, что гироскопический эффект не влияет на $\tilde{\lambda}_1$ и на скорость обкатки с проскальзыванием. Это объясняется перестройкой рассматриваемого консольного ротора при обкатывании статора в ротор Джеффкотта-Лаваля.

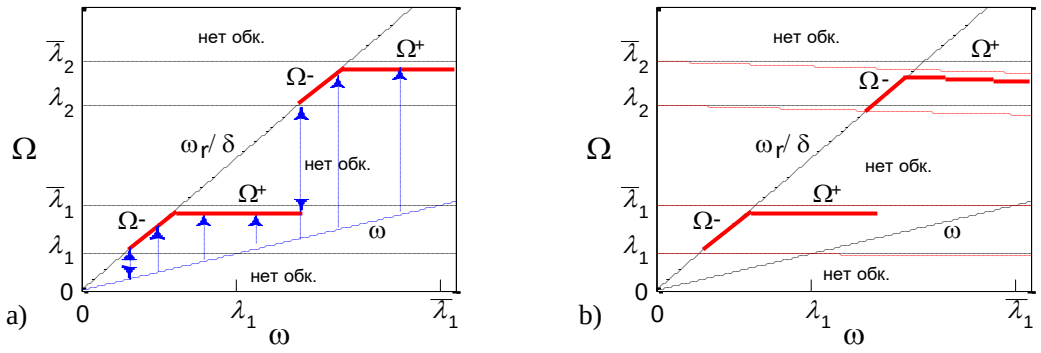


Рис.6. Зависимость скоростей обкатки без скольжения Ω^- и с проскальзыванием Ω^+ от скорости вращения ω и критических скоростей свободного от контакта λ_i и опирающегося $\tilde{\lambda}_i$ ротора в результате возможных скачкообразных переходов прецессии ротора от синхронной к обратной и наоборот соответственно при ударах и выбеге (a), а также в результате гироскопического действия дисков (b)

Заключение

В системе «гибкий ротор - жесткий статор»:

- частота обкатки с проскальзыванием всегда немного ниже одной из частот собственных

колебаний ротора опертого на статор, причем это частотное несовпадение зависит от роторного прогиба и радиального зазора вне места первоначального контакта;
- обкатка с проскальзыванием возбуждаема тогда и только тогда, когда скорость вращения, кратная отношению радиального зазора к радиусу ротора в месте первоначального контакта $\omega r/\delta$, выше i-ой критической скорости опертого ротора $\tilde{\lambda}_i$ и ниже последующей критической скорости свободного от контакта ротора λ_{i+1}, причем скорость обратной прецессии будет близкой к $\tilde{\lambda}_i$;
- обкатка без проскальзывания осуществима тогда и только тогда, когда скорость вращения, кратная отношению радиального зазора к радиусу ротора в месте первоначального контакта $\omega r/\delta$, выше i-ой критической скорости свободного ротора λ_i и ниже соответствующей критической опирающегося ротора $\tilde{\lambda}_i$, причем скорость обратной прецессии будет равной $\omega r/\delta$;
- гироскопическое действие ротора на значения частоты обкатки мало.

Предложенная теория дает завышенную частоту обкатки Ω и, соответственно, бóльшую контактную нагрузку N. Тем не менее, расчеты с её помощью оправдываются простотой и результатами «с запасом» по сравнению с реальной системой (с трением).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 15-09-30026.

Список литературы

1. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания. М.: Физматлит, 1960. С.391-392.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. С.121-122.
3. Банах Л.Я. Некоторые явления, возникающие при движении вала в подшипнике с зазором // Машиноведение, 1965, №1. С.70-77.
4. Денисов Г.Г., Неймарк Ю.И., Сандалов В.М., Цветков Ю.В. Об обкате ротора по жесткому подшипнику // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1973, №6. С.4-13.
5. Олимпиев В.И. Об обкате неуравновешенного гибкого ротора по статору // Машиноведение, 1976, №1. С.52-56.
6. Позняк Э.Л. Крутильный удар в валопроводе при внезапной и сильной разбалансировке одного из роторов // Машиноведение, 1987, №5. С.66-74.
7. Ахметишен Н.Х., Нагаев Р.Ф. Динамика неуравновешенного ротора с сухим трением в подшипнике // Изв. РАН. Механика твердого тела, 1995, №5. С.57-63.
8. Павлов Г.В., Бородин В.С. Качение неуравновешенного ротора внутри горизонтального цилиндра // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. физико-математические науки, 2005, №38. С.65-71.
9. Костюк А.Г., Шатохин В.Ф., Волоховская О.А. Движение неуравновешенного ротора при задеваниях о статор // Теплоэнергетика, 2012, №2. С.3-11.
10. Никифоров А.Н. Виброударное движение, скольжение и обкатка ротора по статору // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2012, №1. С.16-25.

Дата поступления статьи: 15 октября 2016 года.