

## К ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ СТРУННЫХ РЕШЕТОК

©Владимир Константинович Асташев<sup>1</sup>, Николай Алексеевич Андрианов<sup>1</sup>  
Виталий Львович Крупенин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ИМАШ РАН, Россия, Москва

<sup>2</sup>Московский Политехнический университет, Россия, Москва

[krupeninster@gmail.com](mailto:krupeninster@gmail.com)

**Аннотация.** Работа посвящена экспериментальному изучению двумерной системы, состоящей из системы натянутых струн, образующих решетку, в узлах которой находятся массивные точечные включения. Приводятся полученные ранее результаты теории. Дается описание разработанного экспериментального стенда и приводятся результаты экспериментов по качественному анализу режимов движения струнных решеток при периодическом кинематическом возбуждении колебаний. Описаны некоторые режимы движения решеток различной размерности.

**Ключевые слова:** струна, решетка, узел решетки, экспериментальный стенд, стоячая волна, собственные частоты, формы колебаний в 2D-системе.

## TO THE EXPERIMENTAL STUDIES OF STRING LATTICES VIBRATIONS

©Vladimir K. Astashev<sup>1</sup>, Nikolay A. Andrianov<sup>2</sup>, Vitaly L. Krupenin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>IMASH RAN, Russia, Moscow

<sup>2</sup>Moscow Polytechnic University, Russia, Moscow

[krupeninster@gmail.com](mailto:krupeninster@gmail.com)

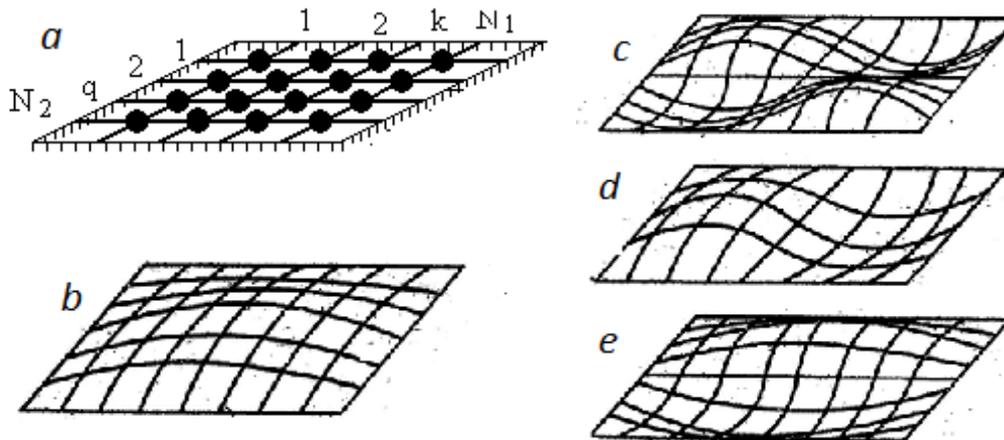
**Abstract.** This work is devoted to experimental study of two-dimensional system, consisting of a system of stretched strings forming the lattice, the nodes of which are a massive point of inclusion. Given the earlier results of the theory. Given the description of the developed experimental stand and the results of experiments on qualitative analysis of the motion modes of the string grids at periodic kinematic excitation of vibrations. Describes some of the modes of the lattices of different dimension.

**Keywords:** string, lattice, lattice site, experimental stand, standing waves, natural frequencies, mode shapes in 2D-system.

**1. Объект исследований.** Струнная решетка представляет очевидный модельный интерес как двумерный аналог классической системы «нить с бусинками». Она может использоваться при проведении моделирования многочисленных 2D-объектов – мембран, тонких пластинок, панелей, решетчатых конструкций различных сортировочных и просеивающих машин и устройств. Кроме того, при её посредстве могут анализироваться колебания в кристаллах и наноструктурах [1].

Линейные модели струнных решеток представляют собой системы взаимно перпендикулярных семейств безынерционных упругих струн, образующих прямоугольные ячейки, в вершине каждой из которых помещены точечные абсолютно твердые тела. Соответствующие модели изучались впервые, по-видимому, Р.Ф. Нагаевым и К.Ш. Ходжаевым [2] и в работе [3]. В работах [4, 5] рассматривалась динамика струнной решетки в присутствии ограничителей хода. Между тем опубликованные экспериментальные данные о колебаниях данных систем, по-видимому, отсутствуют. Данная работа в какой-то мере восполняет этот пробел.

**2. Уравнения движения и результаты их исследования.** Рассмотрим прямоугольную решетку [2, 3], составленную из двух взаимно перпендикулярных семейств упругих одинаковых линейных струн, заземленных на концах и имеющих соответственно длины  $l_1$  и  $l_2$  (рис 1). Каждая струна нумеруется при помощи индексов  $k = 0, 1, 2, \dots, N_1$  и  $q = 0, 1, 2, \dots, N_2$ . В узлах решетки помещены точечные твердые тела с одинаковыми массами  $m$ .



**Рис 1.** Модель решетки  $4 \times 4$  (a); колебания по формам:  $\Theta_{11}$  (b);  $\Theta_{22}$  (c);  $\Theta_{12}$  (d);  $\Theta_{21}$  (e).

Пусть прямоугольные ячейки решетки одинаковы, а струнные элементы безынерционны. Крепления струн в узлах - абсолютно жесткие, а натяжения - настолько большими, что возможными изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь. Каждая «горизонтальная сторона» ячеек имеет длину  $\Delta L_1$ ; «вертикальная» -  $\Delta L_2$ . Кроме того, пусть безынерционные «горизонтальные участки» имеют натяжение  $T_1$ , а «вертикальные» -  $T_2$ . Состояние решетчатой конструкции может быть описано посредством функций смещения узлов решетки  $u_{kq}(t)$ , где  $k=0, 1, 2, \dots, N_1$ ;  $q=0, 1, 2, \dots, N_2$ . При этом каждая из функций  $u_{kq}(t)$  изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки. Первый индекс (в данном случае  $k$  - нумерует струну, расположенную «слева-направо»), а второй индекс (в данном случае  $q$  - «снизу-вверх»).

Обозначим  $g_{kq}(p; t, u_{kq})$  - любые внешние или отнесенные к таковым силы;  $p \equiv d/dt$ . Каждый узел лежит одновременно на двух струнах, и для всех значений индексов имеем  $N$  уравнений [ $N=(N_1-1)(N_2-1)$ ]:

$$m\ddot{u}_{kq} + c_1(2u_{kq} - u_{(k-1,q)} - u_{(k+1,q)}) + c_2(2u_{kq} - u_{(k,q-1)} - u_{(k,q+1)}) = g_{kq}(p; t, u_{kq}); c_{1,2} = \frac{\Delta L_{1,2}}{T_{1,2}}. \quad (1)$$

Граничные условия заземления на концах можно записать как  $u_{kq}=0$ , при  $k=0; N_1; q=0; N_2$ . Приведем операторные уравнения движения, следующие из уравнений (1). В соответствии с общими методиками [3-5] построим сначала матричные операторы динамической податливости  $[L_{kq,nj}]$ .

Четырехиндексная нумерация компонент матриц операторов динамической податливости  $L_{kq,nj}(p)$  вызвана тем, что каждый узел нумеруется парой индексов. Выражение  $L_{kq,nj}(p)$  обозначает оператор динамической податливости [3-5], ставящей в соответствие силе, приложенной в узле  $(n, j)$  перемещение узла  $(k, q)$ . Для рассматриваемой системы принцип взаимности записывается как  $L_{kq,nj}(p) = L_{nj,kq}(p)$ .

Система уравнений (1) при этом может быть записана в операторном виде:

$$u_{kq}(t) = \sum_{n=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} L_{kq,nj}(p) g_{nj}(p; u_{nj}, t). \quad (2)$$

Если силы  $g_{nj}(p; u_{nj}, t)$  зависят только от времени, то задача – линейна и Eq.(2) определяет решение задачи. Если имеет место общий случай, то имеем систему  $N$  нелинейных уравнений относительно неизвестных перемещений узлов. Наиболее хорошо изучен случай периодических колебаний [3-5] В частности, если вблизи решеток установлены какие-либо ограничители хода, то система – виброударная.

Для определения операторного уравнения (2) осталось дать описание системы операторов  $[L_{kq,nj}]$ . Выражения для операторов динамических податливостей полностью определяются наборами собственных частот  $\{\Omega_{kq}\}$  и, кроме того, нормированных коэффициентов собственных форм  $\{\Theta_{kq}\}$  линейной системы [3-5]. Пользуясь результатами, данными в книге [2] найдем:

$$\Omega_{kq}^2 = \frac{2T_1}{m\Delta L_1} [1 - \cos(k\pi N_1^{-1})] + \frac{2T_2}{m\Delta L_2} [1 - \cos(q\pi N_2^{-1})], \quad \Theta_{kq} = C \sin(kn\pi N_1^{-1}) \sin(qj\pi N_2^{-1}), \quad (3)$$

где  $C=4[(N_1-1)(N_2-1)]^{-2}$ . Таким образом [3]

$$L_{kq,nj}(p) = \sum_{\alpha=1}^{N_1-1} \sum_{\beta=1}^{N_2-1} \sin(k\alpha\pi N_1^{-1}) \sin(q\beta\pi N_2^{-1}) \sin(\alpha n\pi N_1^{-1}) \sin(\beta j\pi N_2^{-1}) (\Omega_{\alpha\beta}^2 + p^2)^{-1}$$

В итоге полностью определены параметры колебаний в линейном случае и проведены необходимые предварительные построения для анализа в случае присутствия нелинейностей.

На Рис.1. (b) – (e) показаны огибающие поверхности четырех низших формы свободных колебаний решетки  $7 \times 5$ ; узловые тела – не показаны.

Отметим, что при рассмотрении изотропных решеток ( $N_1=N_2 \equiv N_0$ ;  $T_1=T_2 \equiv T_0$ ;  $\Delta L_1 = \Delta L_2 \equiv \Delta L_0$ ;  $c_1=c_2 \equiv c_0$ ) из-за симметрии системы происходит уменьшение числа *различных* собственных частот и соответствующих форм:  $\Omega_{kq} = \Omega_{qk}$ ;  $\Theta_{kq} = \Theta_{qk}$ :

$$\Omega_{kq}^2 = 2c_0 \frac{2T_0}{m\Delta L_0} [2 - \cos k\pi/N_0 - \cos q\pi/N_0]; \quad \Theta_{kq} = 4N_0^4 \sin k\pi/N_0 \sin q\pi/N_0. \quad (4)$$

**3. Экспериментальный стенд.** Для экспериментального изучения струнных решеток был разработан и создан экспериментальный стенд «Аллигатор Квадрат», состоящий из рабочей установки (рис.2) и системы управления и регистрации. Рабочая установка состоит из вибровозбудителя (**V**), системы квадратных сменных решеток (**L**), состоящих из квадратных рамок ( $300 \times 300$  мм), выполненных из алюминиевого профиля и взаимно перпендикулярных натянутых резиновых жгутов диаметром 1мм.

Натяжение жгутов осуществлялось при помощи методики вывешенных тел; размеры ячеек контролировались при помощи прецизионных линеек. Рамка решетки прикреплена к штоку вибровозбудителя. Были изготовлены решетки  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$ . Узлы решеток образованы помещенными в местах пересечения жгутов шайбами массой 1,1 г, выполненные из закаленной стали. При этом шайбы не фиксируются жестко.

Удобство экспериментирования с резиновыми распределенными элементами описано в статье [5]. Установка допускает использование односторонних или двусторонних ограничителей, выполненных из листов стекла толщиной 3мм или гетинакса толщиной 1 см. Ограничители устанавливаются на четыре опоры (**S**), обеспечивающие их постановку на

неподвижное основание. Величины зазоров выставляются и регулируются при помощи микрометрических винтов (не показаны).

Система управления и регистрации состоит из генератора сигналов (**SG**), усилителя мощности, цифрового стробоскопа (**DS**), усилителя мощности (**PA**), цифрового вольтметра (**DV**), измеритель амплитуды вибрации штока вибровозбудителя (**VA**). Регистрация профилей стоячих волн осуществлялась при помощи камеры (**C**), работающей как в режиме фотографирования, так и в режиме ускоренной киносъемки. Лампа стробоскопа (**SL**) создает освещение решетки.

С помощью встроенного блок управления стробоскопа фазовращателя можно «остановить» и сфотографировать решетку в любой момент времени. При наличии малой расстройки 0,3 – 5, 7 Гц можно добиться картины медленного эволюционирования профиля стоячей двумерной волны. Общая схема стенда «Аллигатор-Квадрат» показана на рис.3. Из этой схемы очевидны принципы функционирования стенда.

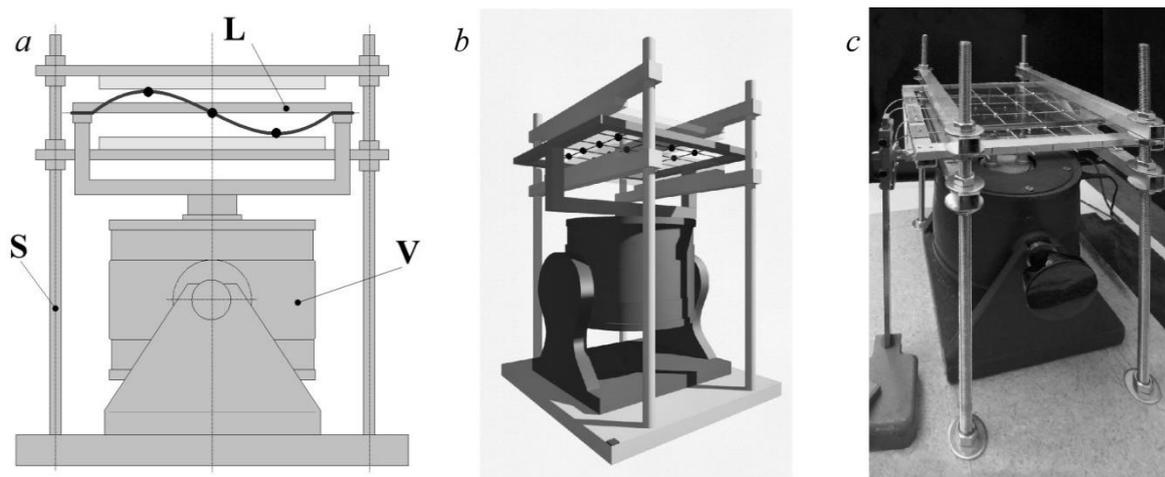


Рис.2. Рабочая установка. Схема (a); макет (b); фото (c).

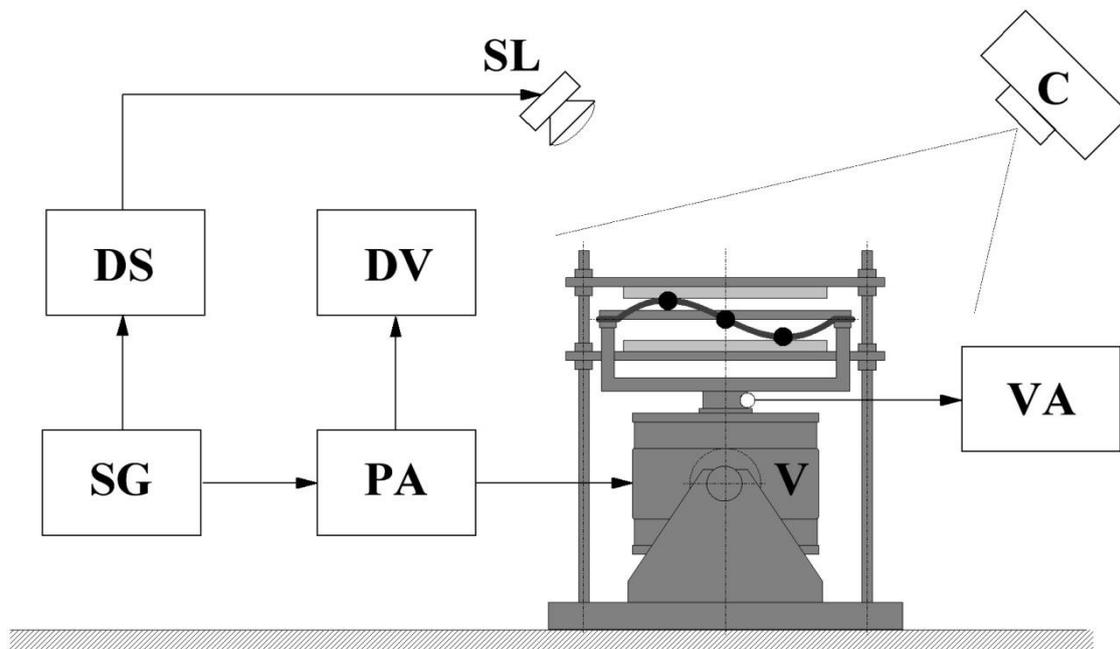
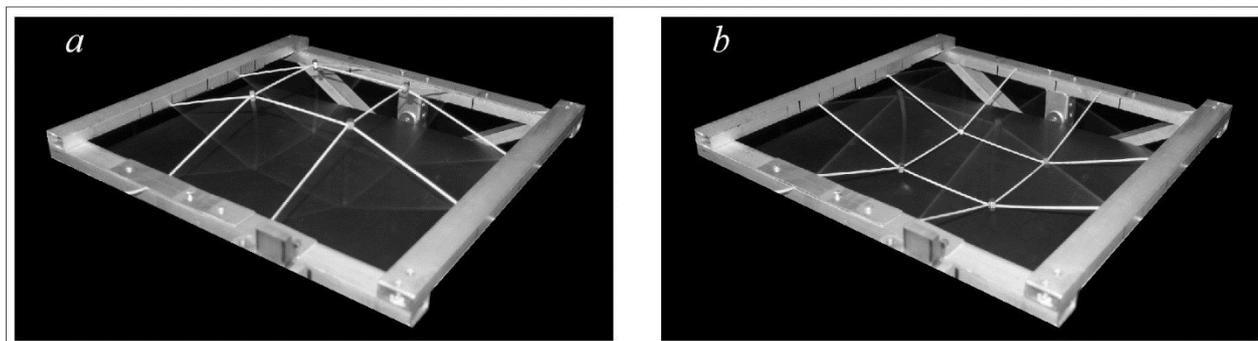


Рис.3. Схема экспериментального стенда «Аллигатор-Квадрат»

Цель описываемых экспериментов - качественный экспериментальный анализ режимов движения струнных решеток при периодическом возбуждении колебаний.

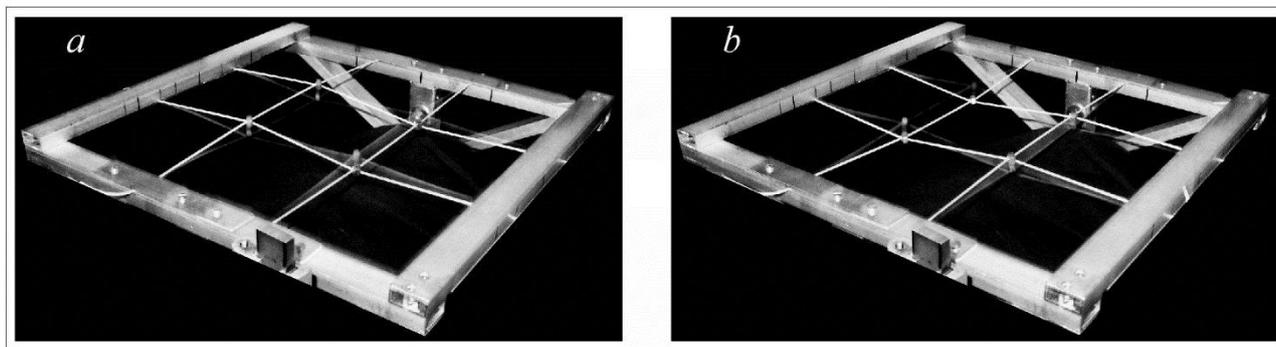
**4. Результаты экспериментов.** Регистрация стоячих волн в проведенных экспериментах определялась спецификой систем и особенностями механизма возбуждения колебаний. В данном случае возбуждение является кинематическим: рамка вибрирует по синусоидальному закону и все узлы решетки получают заданное движение. «Проходя» определенные частотные диапазоны, получаем возможность регистрировать резонансные явления.

Были исследованы решетки  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$ . Соотношения между собственными частотами оценивались в соответствии с формулой (4). Во всех решетках собственные частоты лежат внутри отрезков  $[\Omega_{11}, \Omega_{KK}]$ . В данном случае  $K=2, 3, 4$ . Распределение собственных частот внутри этих отрезков - неравномерное.



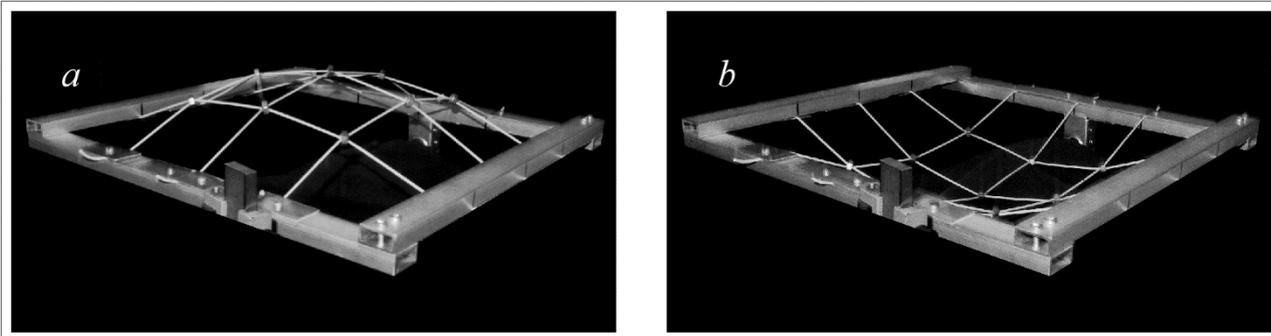
**Рис.4.** Решетка  $2 \times 2$ : форма  $\Theta_{11}$ ;  $f_{11}=15,1$ Гц; амплитуда возбуждения  $\mu=5$  мм.

В случае решетки  $2 \times 2$  имеется три различных частоты  $\{\Omega_{11}, \Omega_{22}, \Omega_{12}\}$ . Зарегистрированные в эксперименте колебания по формам  $\Theta_{11}$  и  $\Theta_{12}$  с частотами  $f_{11}=\Omega_{11}/2\pi$  и  $f_{12}=\Omega_{12}/2\pi$  даны на рис.4 и рис.5, где показаны финальные конфигурации систем через половины периода колебаний.

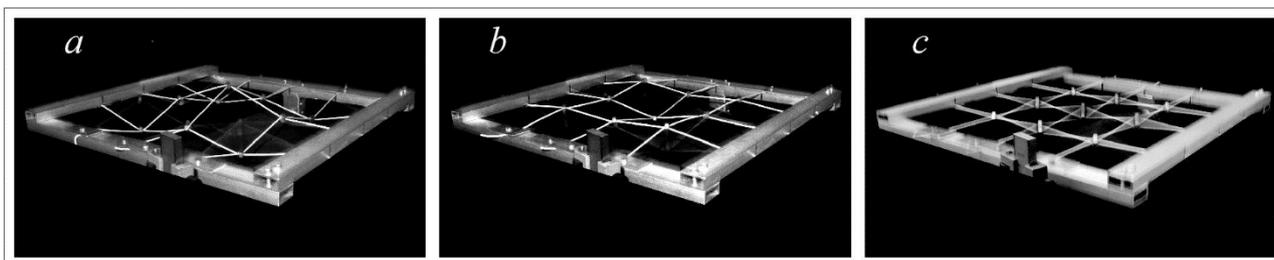


**Рис. 5.** Решетка  $2 \times 2$ : форма  $\Theta_{12}$ ; частота  $f_{12}=28,4$ Гц; амплитуда возбуждения  $\mu=5,2$  мм.

В случае решетки  $3 \times 3$  имеется шесть различных частот  $\{\Omega_{11}, \Omega_{22}, \Omega_{33}, \Omega_{12}, \Omega_{13}, \Omega_{23}\}$ . На рис. 6 представлена стоячая волна при колебаниях по форме  $\Theta_{11}$ . Две высшие формы колебаний показаны на рис. 7.

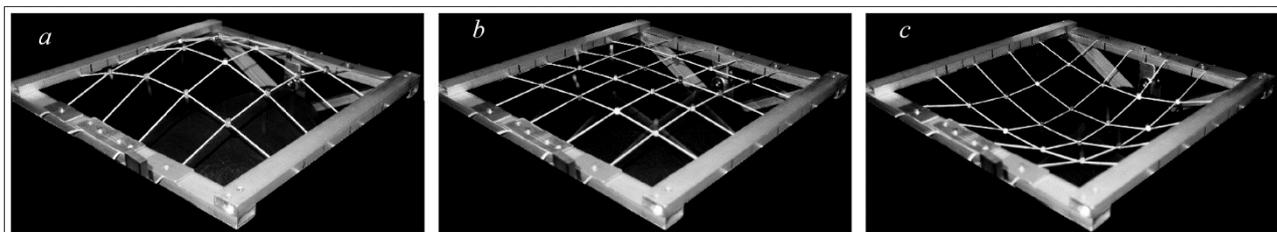


**Рис.6.** Решетка 3×3: форма  $\Theta_{11}$ ; частота  $f_{12}=15,1$  Гц; амплитуда возбуждения  $\mu=5,2$  мм.



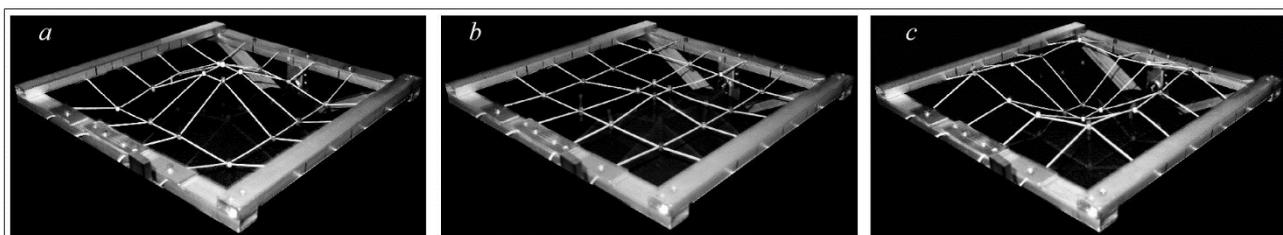
**Рис.7.** Решетка 3×3: профили на частотах  $f=27,5$  Гц (a), (b) и 36Гц (c); амплитуда возбуждения  $\mu=5,4$  мм.

Для решетки 4×4 с учетом свойств симметрии имеется набор из десяти различных собственных частот  $\{\Omega_{11}, \Omega_{22}, \Omega_{33}, \Omega_{44}, \Omega_{12}, \Omega_{13}, \Omega_{14}, \Omega_{23}, \Omega_{24}, \Omega_{34}\}$ , целиком лежащий на отрезке  $[\Omega_{11}, \Omega_{44}]$ . На рис.8 демонстрируется эволюция формы  $\Theta_{11}$  (a) –(c).



**Рис.8.** Решетка 4×4: профили стоячей волны (a)-(c); частота и амплитуда возбуждения  $f_{11}=15,2$  и  $\mu=2,4$  мм.

При увеличении числа узлов возникают затруднения с регистрацией ожидаемых режимов колебаний, поскольку проявляются искажения, связанные с неизотропностью решетки и (или) нелинейными факторами. На рис. 9 показана эволюция стоячей волны при реализации колебаний по одной из высших форм. Отчетливо видно преобразование квадратных ячеек решетки в трапециевидные. Подобные искажения видны и на рис. 6 (a-b).



**Рис.9.** Решетка 4×4: профили стоячей волны (a)-(c) на частоте  $f=29$ Гц при амплитуде возбуждения  $\mu=3,5$  мм.

**5. Замечание об исследовании виброударных процессов.** Были проведены эксперименты по изучению виброударных режимов движения решеток  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ . Исследования проводились при частоте возбуждения большей, чем частоты  $\Omega_{11}/2\pi$  для решеток обоих типов. Визуально наблюдались режимы движения типа синхронных хлопков [3-6]. Исчерпывающая интерпретация этих результатов будет проделана в последующих работах.

**6. Заключение.** Эксперименты с решетчатыми двухмерными конструкциями показывают, что даже в линейных моделях усложнение задачи по сравнению с аналогичной одномерной (знаменитая задача «о нити с бусинками») оказывается весьма существенным. Поэтому требуется создание более общих теорий и разработка более совершенных экспериментальных стендов. Однако, при реализации наиболее простых режимов движения, таких, как режимы движения, отвечающие низшей форме колебаний, все предложенные ранее модели работают весьма успешно.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-19-30026).*

### Список литературы

1. Асташев В.К., Андрианов Н.А., Крупенин В.Л., Привезенцев В.Н., Колик Л.В., Свойства поверхностных слоев, наноструктурированных в результате авторезонансного ультразвукового точения // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2011. - № 5. - С. 68-72.
2. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. – 272 с.
3. Крупенин В.Л. О расчете вибрационных процессов в решетчатых двумерных конструкциях // Проблемы машиностроения и надежности машин. - № 2. – 2006. - С.20-26
4. Крупенин В.Л. Виброударные процессы в двухмерных решетчатых конструкциях // Проблемы машиностроения и надежности машин. - № 3. – 2006. - С.16-22
5. Крупенин В.Л. Анализ сингуляризованных уравнений движения решетчатых виброударных 2D-систем при отказе от гипотезы Ньютона // Проблемы машиностроения и надежности машин. - № 2. – 2016. - С.13-22.
6. Веприк А.М., Крупенин В.Л. О резонансных колебаниях системы с распределенным ударным элементом // Машиноведение. - № 6. – 1988. - С.10-18.

*Дата поступления статьи: 1 августа 2016 года.*