

ТИПОВЫЕ БИФУРКАЦИОННЫЕ ГРУППЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

М. В. Закржевский

Рассматривается возможность использования типовых бифуркационных (топологических) групп в теории нелинейных колебаний. Качественный анализ поведения нелинейных динамических систем при вынужденных, параметрических, автоколебаниях и других сложных колебаниях проводится с использованием бифуркационных диаграмм, которые отображают состояние стационарного режима в зависимости от параметра. На основании бифуркационных диаграмм строятся бифуркационные карты на плоскостях параметров, на которых изображаются бифуркационные границы качественного поведения системы. Однако, сложность бифуркационных карт и построение бифуркационных диаграмм, как правило, с использованием только устойчивых режимов, не позволяет выявить общие закономерности качественного поведения различных динамических систем.

В настоящей работе делается попытка классификации бифуркационных групп, включающих как устойчивые, так и неустойчивые ветви решения. Эти группы используются для глобального анализа различных динамических систем и отыскания новых нелинейных эффектов. В работе использовались материалы публикаций многих авторов, как приведенных в списке литературы, так и многих других. Приведенные в статье рисунки иллюстрируют некоторые возможности качественного анализа колебательных систем с использованием типовых бифуркационных групп.

Обсуждаются следующие вопросы теории типовых бифуркационных групп:

1. Глобальный анализ при изменении параметра, простые бифуркации и бифуркационные группы (БГ). БГ включают устойчивые и (обязательно!) неустойчивые ветви решения, т.е. все соответствующие решения.
2. Элементарные БГ с одной бифуркацией. Складка (обычная и «неустойчивая»), супер-, субкритический и «неустойчивый» трезубец, бифуркация потери симметрии.
3. Типовые БГ с двумя бифуркациями. Гистерезис прямой и «обратный». Двойной трезубец, простой периодический 1Т-остров и простой субгармонический остров-пТ.
4. Сложный (каскадный) гистерезис в типовых системах.
5. Бифуркационная группа удвоения периода. Неустойчивый периодический инфинитум UPI. Гомоклинические структуры и UPI.
6. Хаотические аттракторы и UPI. Хаотические переходные процессы.
7. Типовые протуберанцы с простой и сложной структурой.
8. Типовые бифуркационные группы с редкими аттракторами (РА).
9. Сложные (изолированные) острова с редкими аттракторами.
10. Бифуркационные группы при изменении параметров демпфирования. Парадоксы трения. Многорежимность при большой диссипации.
11. Взаимодействие нескольких бифуркационных групп. Хаос и окна периодичности. Переходные процессы и бифуркационная память. «Странные» глобально устойчивые периодические аттракторы, например, 1Т при наличии UPI.

12. Примеры типовых бифуркационных групп в системах с несколькими степенями свободы при вынужденных колебаниях.

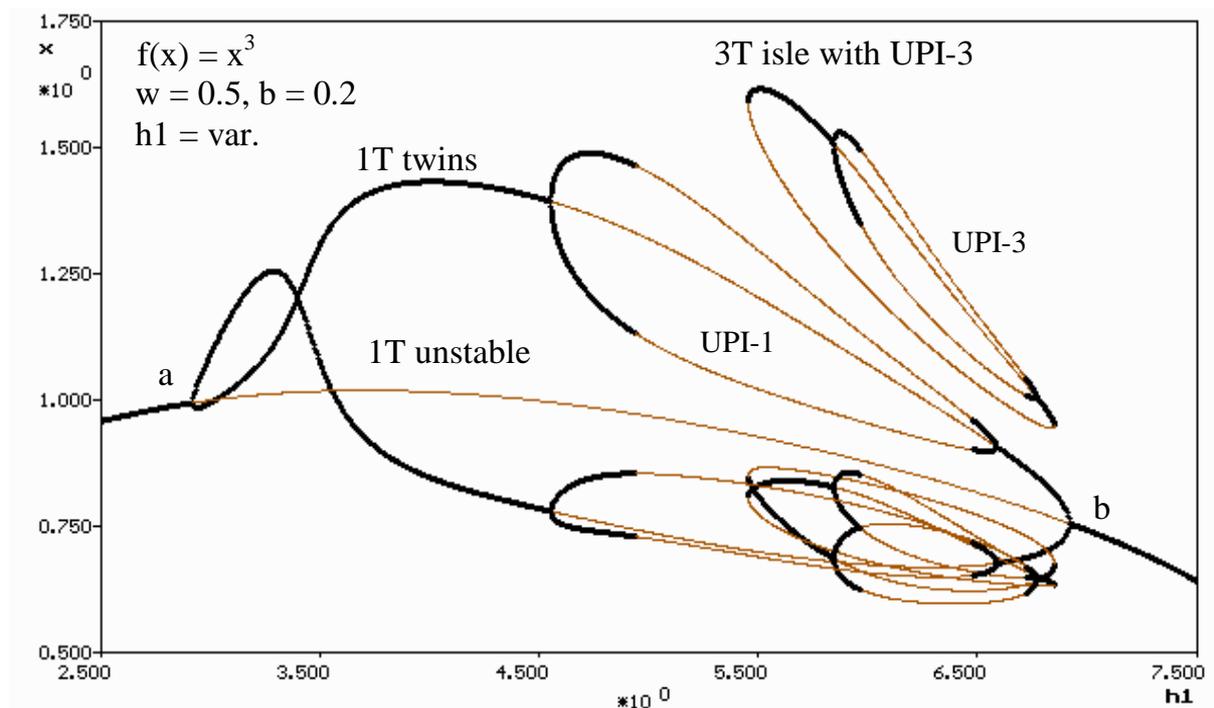


Рис.1. Бифуркационная диаграмма вынужденных колебаний при изменении амплитуды вынуждающей силы в системе с кубической упругой характеристикой и линейной диссипацией. Показан случай сосуществования двух различных бифуркационных групп с UPI-1 и UPI-3. Тонким линиям соответствуют неустойчивые режимы. В системе существует и бифуркационная группа 9T с UPI-9.

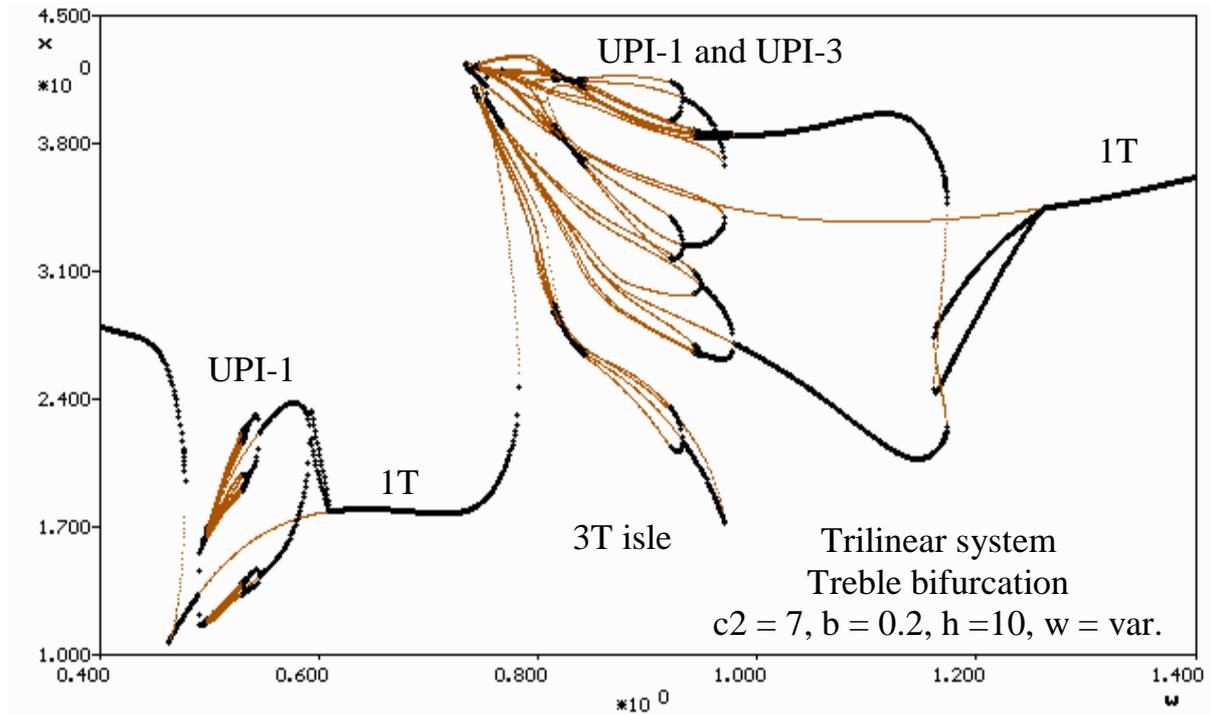


Рис.2. Бифуркационная диаграмма вынужденных колебаний при изменении частоты вынуждающей силы в системе с трilinearной симметричной упругой характеристикой и линейной диссипацией. Показано сосуществование двух бифуркационных групп 1Т и сложного острова 3Т. Рождение острова 3Т происходит в результате «бифуркации» утробения.

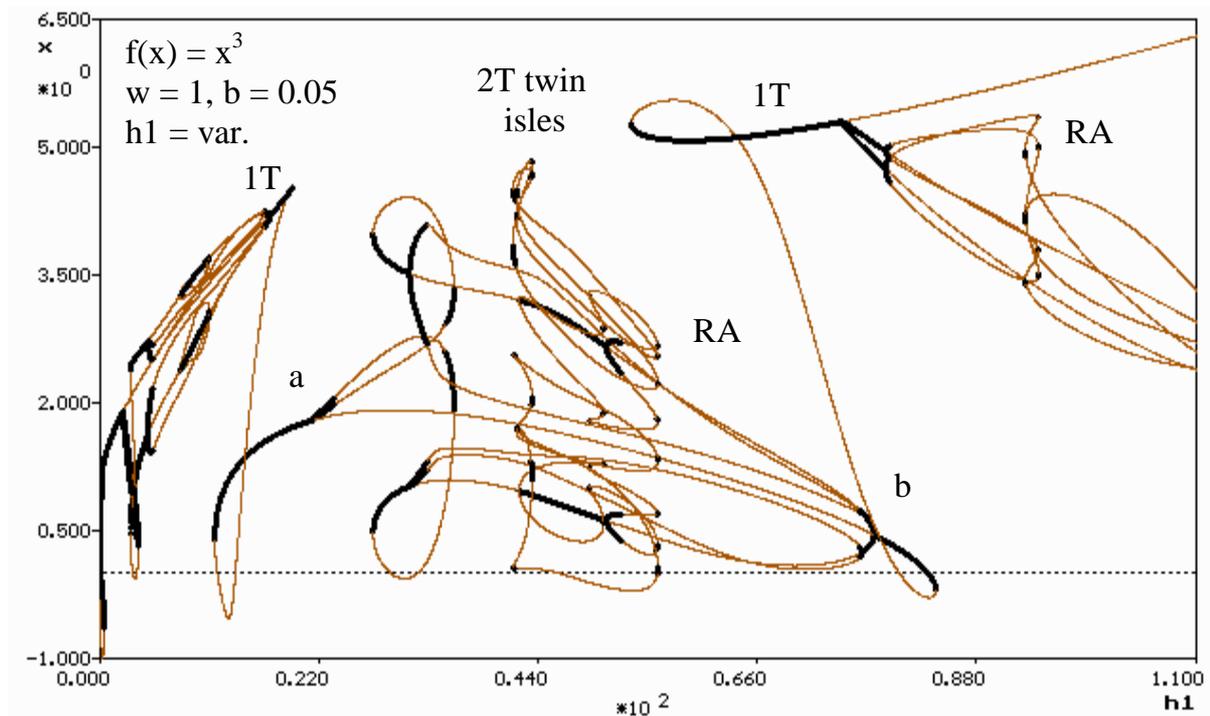


Рис.3. Бифуркационная диаграмма вынужденных колебаний при изменении амплитуды вынуждающей силы в системе с кубической симметричной упругой характеристикой и линейной диссипацией. Показаны только режимы 1Т и 2Т. Система имеет несколько сложных протуберанцев, например (а, b) и несколько областей с бесконечным числом периодических режимов UPI-1. Около $h1 = 50$ в системе существуют также два 2Т острова с взаимно-
Научно-технический журнал «ВНТР» №1, 2008 г. Национальная Технологическая Группа
М.В. Закржевский

симметричными режимами с редкими аттракторами RA и UPI-2. Тонким линиям соответствуют неустойчивые режимы.

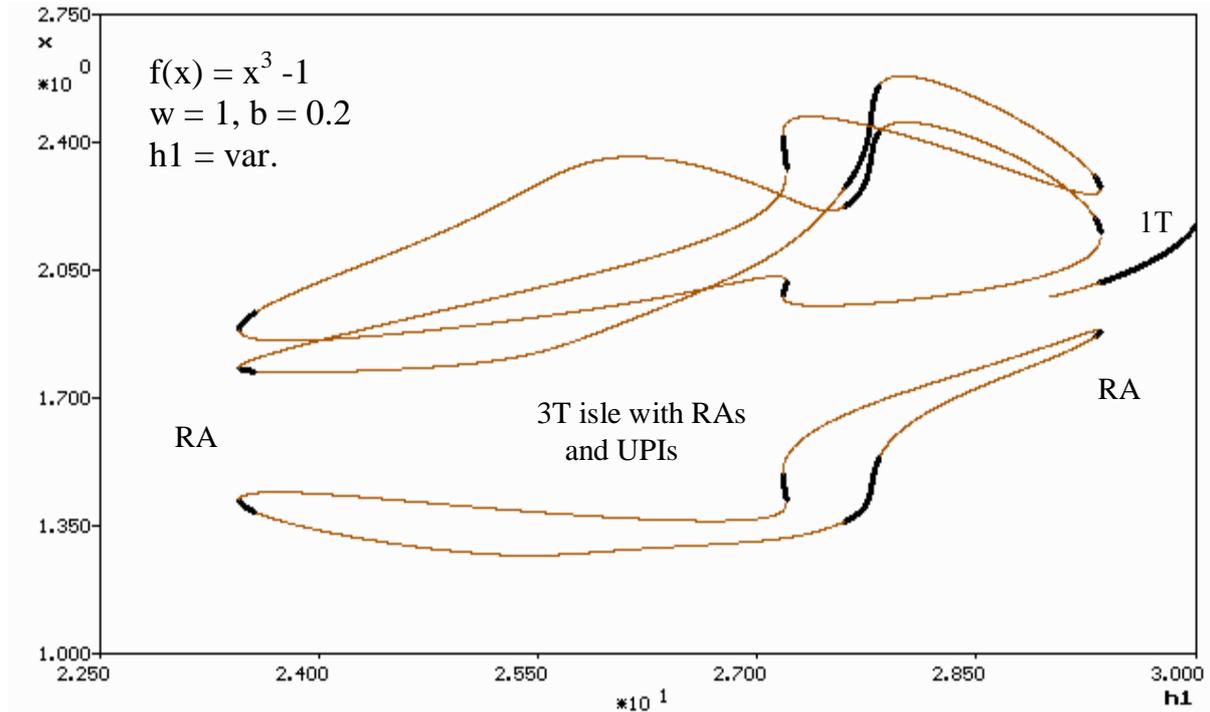


Рис.4. Сложный субгармонический 3Т-остров с редкими аттракторами и двумя областями с бесконечным числом периодических режимов UPI-3. Несимметричная система с кубической характеристикой при гармоническом воздействии. Особенностью показанной бифуркационной группы является наличие устойчивых 3Т режимов на обеих ветвях острова.

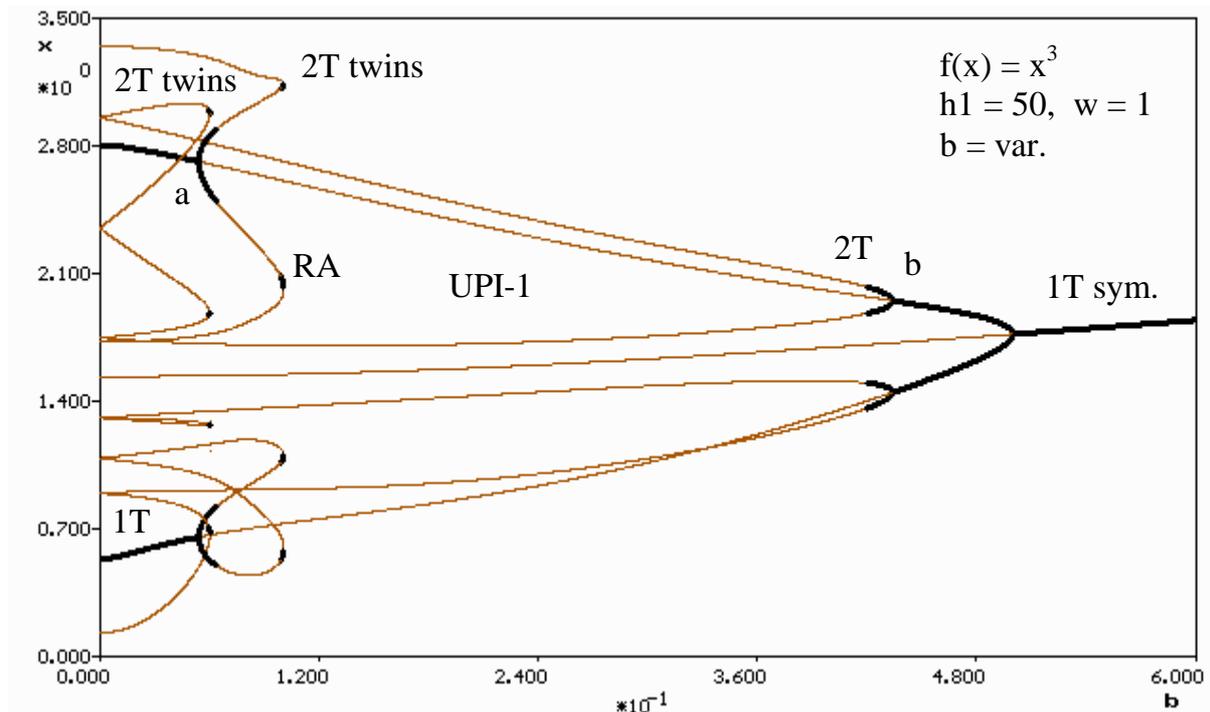


Рис.5. Влияние изменения параметра линейной диссипации b на качественное поведение системы с кубической симметричной упругой характеристикой при вынужденных колебаниях. Показаны только режимы 1Т и 2Т. Система имеет две сложные бифуркационные группы 1Т с Научно-технический журнал «ВНТР» №1, 2008 г. Национальная Технологическая Группа
М.В. Закржевский

необычным поведением протуберанца (а, б) и UPI-1 и два 2Т острова с взаимно-симметричными режимами и редкими аттракторами. Тонким линиям соответствуют неустойчивые режимы.

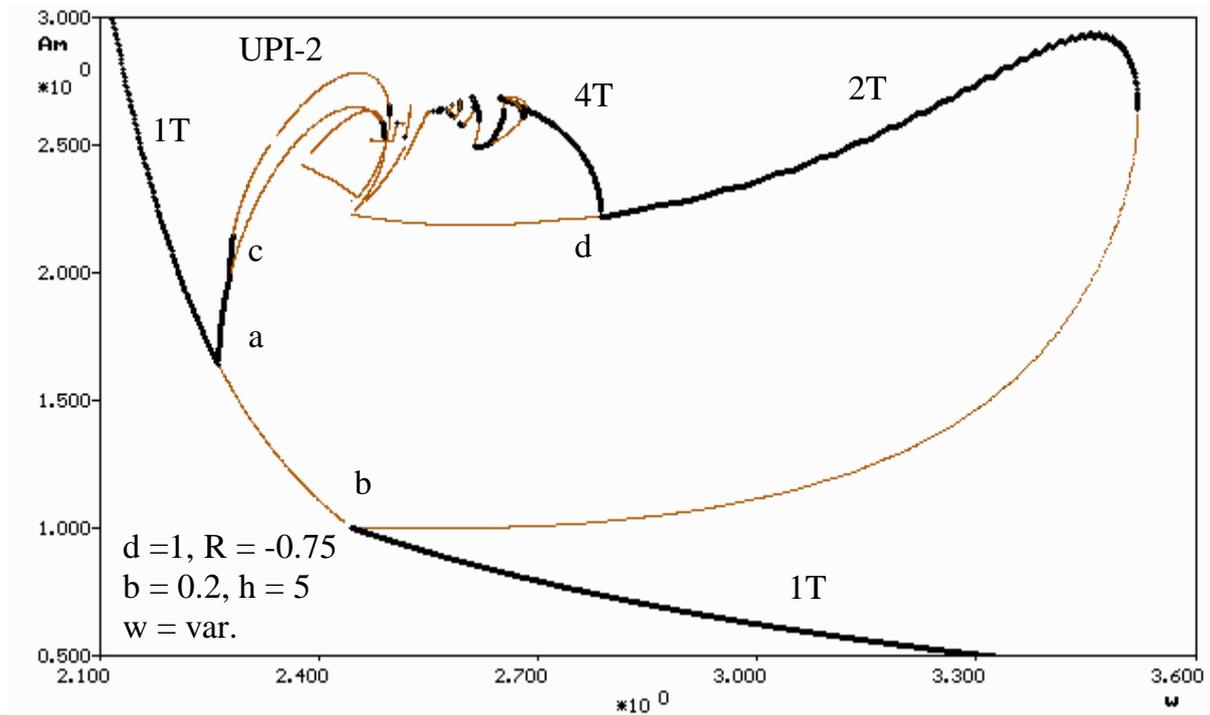


Рис.6. Виброударная система при вынужденных колебаниях с односторонним ограничителем. при изменении частоты гармонического возбуждения. Показан сложный протуберанец 2Т, вырастающий из бифуркационных точек (а, б). Протуберанец имеет сложную структуру между (с, d) с несколькими каскадами удвоения периода и UPI-2, а также редкими аттракторами. Из-за сложности поведения динамической системы автору не удалось найти все периодические режимы с периодами 4Т, 8Т, ... Также пока неясно все ли UPI найдены. В системе имеют место как простейшие линейные колебания 1Т, так и хаотические колебания.

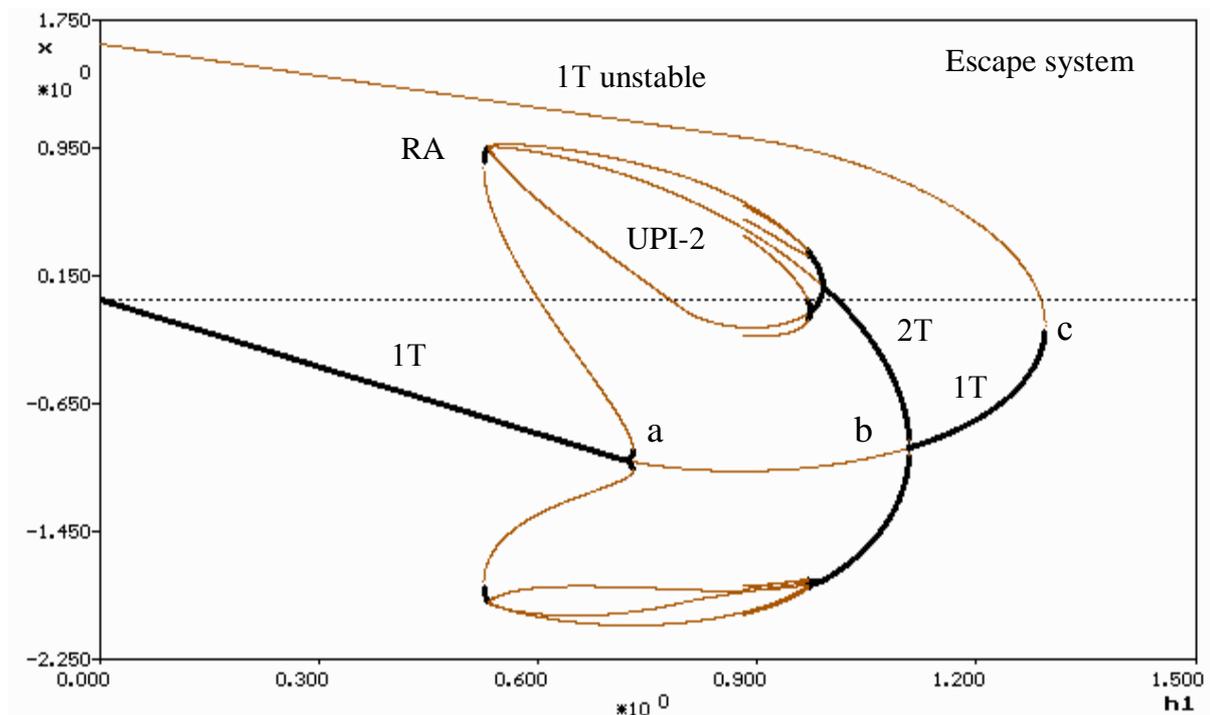


Рис.7. Типовая бифуркационная диаграмма для системы с двумя положениями равновесия (escape system). Система имеет сложный протуберанец (a, b) со стандартным каскадом удвоения периода и UPI-2. Вблизи складки (c) в системе существуют устойчивые колебания относительно неустойчивого положения равновесия. Характерным для эскейпных систем является наличие редких аттракторов (RA).

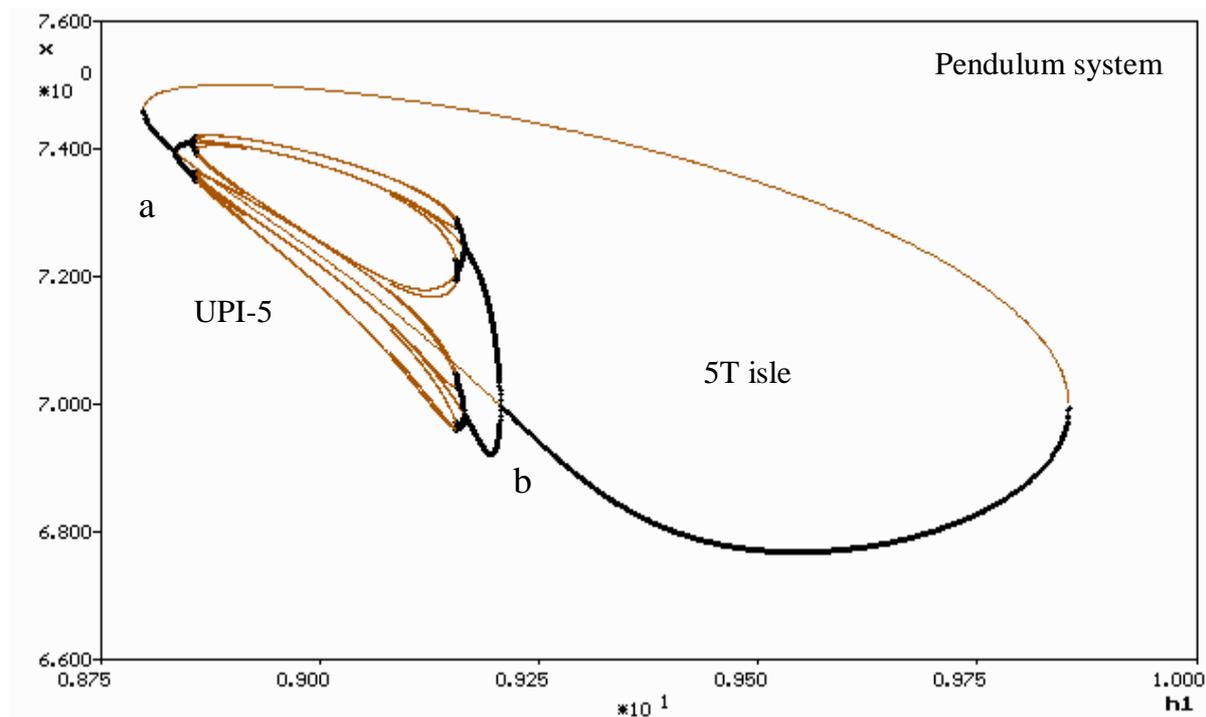


Рис.8. Вынужденные колебания маятника с линейной диссипацией. Пример сложного изолированного субгармонического острова 5T с протуберанцем (a, b), каскадом удвоения периода 5T и UPI-5, в котором реализуется хаотический аттрактор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Е., *Теория колебаний*, Физматгиз, Москва, 1981.
2. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г., *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, Москва, 1966.
3. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г., *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости*, Наука, Москва, 1967.
4. Мандельштам Л.И., *Лекции по теории колебаний*, Наука, Москва, 1972.
5. Неймарк Ю.И., *Динамические системы и управляемые процессы*, Наука, Москва, 1972.
6. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А., *Введение в теорию нелинейных колебаний*, Москва, Наука, 1987.
7. Блехман И.И., *Синхронизация в природе и технике*, Москва, Наука, 1981.
8. Бабитский В.И., *Теория виброударных систем*, Москва, Наука, 1978.
9. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М., *Нелинейные колебания*, Москва, Физматлит, 2002.
10. Трубецков Д.И., *Введение в синергетику. Колебания и волны*, изд. 2-е, из-во УРСС, Москва, 2003.

11. Anisichenko V.S., *Dynamical Chaos – Models and Experiments*, World Scientific, Singapore, 1995.
12. Awrejcewicz J., Andrianov I. & Manevitch L.I., *Asymptotic Approach in Nonlinear Dynamics: New Trends and Applications*, Springer-Verlag, 1998.
13. Guckenheimer J., Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of vector Fields*, Springer, 1996.
14. Holmes P.J., Center manifolds, normal forms and bifurcations of vector fields with application to coupling between periodic and steady motions. *Physica*, 20, 449-481.
15. Thompson, J.M.T. and Stewart, H.B., *Nonlinear Dynamics and Chaos, 2nd Edition*, Wiley, 2002.
16. Kapitaniak T. and Bishop S.R., *A Dictionary of Nonlinear Dynamics*, John Wiley & Sons, Chichester, 1999.
17. Blekhman I.I., *Vibrational Mechanics*, World Scientific, Singapore, 2000.
18. Strogatz S.H., *Nonlinear Dynamics and Chaos. With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Westview Press, 2000.
19. Landa P.S., *Regular and Chaotic Oscillations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
20. Kreuzer E., *Numerische Untersuchung nichtlinearer Dynamischer Systeme*, Springer-Verlag, 1987, p. 194.
21. Moon F.C., *Chaotic vibrations*, Wiley, New York, 1987.
22. Shaw S.W., Holmes P.J., Forced vibrations of a beam with one-sided amplitude constraint: theory and experiment, *Journal of Sound and Vibration*, 99(2), 1985, pp. 199-212.
23. Szemplinska-Stupnicka W., Bifurcations of Harmonic Solution Leading to Chaotic Motion in the Softening Type Duffing's Oscillator, *Int. J. Nonlinear Dynamics*, 1988, 23, p. 257-277.
24. Thomsen J.J., *Vibrations and Stability. Advanced Theory, Analysis, and Tools, 2nd Edition*, Springer, 2003.
25. Zevin A.A., Existence, stability and some properties of the class of periodic motions in nonlinear mechanical systems, *Izv. AN SSSR. Mekh. Tverdogo Tela*, 20(4), 45-55.
26. Ueda, Y. *The Road to Chaos*, Aerial Press, Inc., 1992.
27. Zakrzhevsky M., Rare Attractors and Protuberances in Nonlinear Systems, in V.K.Astashev, V.L.Krupenin and E.B.Semenova (eds.), *The Dynamics of Vibroimpact (Strongly Nonlinear) Systems*, Russian Academy of Science, Moscow-Zvenigorod, 2003, p. 86-91.
28. Zakrzhevsky M., Rare Attractors and Rare Catastrophic Phenomena in Oscillatory and Vibro-Impact Systems, in the Proceedings of the Fifth International Conference on Vibration Problems ICOVP-2001, Moscow, Russia, p. 230-233.

Рижский технический университет, Институт механики, Латвия, Рига

Поступила: 7 декабря 2007 г.