

УДК 621.01:534.1

**ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА УСЛОВНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ СОВМЕСТНОМ
УЧЁТЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СВЯЗЕЙ**

© Иосиф Исаакович Вульфсон

jvulf@yandex.ru

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна

Санкт-Петербург, Россия.

Аннотация. Предложена новая модификация метода условного осциллятора, на базе которой возможно аналитическое исследование колебательных систем не только с нестационарными, но и с нелинейными связями. Применительно к задачам динамики цикловых механизмов получены условия динамической устойчивости при совместном учете параметрических и вынужденных колебаний и влиянии нелинейных упругодиссипативных характеристик. Для типовых колебательных режимов приведены результаты компьютерного моделирования.

Ключевые слова: колебания, механизмы, метод условного осциллятора, упругодиссипативные характеристики, динамическая устойчивость, параметрический резонанс.

**A MODIFICATION OF THE METHOD OF CONDITIONAL OSCILLATOR AT JOINT
ACCOUNTING RHEONOMIC AND NONLINEAR CONSTRAINTS**

Iosif I. Vulfson

jvulf@yandex.ru

Saint Petersburg State University of of Industrial Technologies and Design
Russia, Saint-Petersburg.

Abstract. A new modification of the method of conditional oscillator by which it is possible analytical study of the oscillating systems, not only with rheonomic, but also with nonlinear constraints. With regard to the problems of the dynamics of cyclic mechanisms the dynamic stability conditions are obtained for the joint account of parametric and forced vibrations and impact of nonlinear elastic and dissipative characteristics. For typical vibrational regimes the computer simulation results are presented.

Key words: vibrations, mechanisms, method of conditional oscillator, nonlinear elastic and dissipative characteristics, dynamic stability, parametric resonance.

1. При решении задач динамики машин приходится сталкиваться с анализом колебательных систем, включающих нестационарные и нелинейные связи. В частности, нестационарные и нелинейные связи могут значительно повысить виброактивность цикловых механизмов, реализующих программное движение рабочих органов

технологических машин, а также существенно повлиять на условия динамической устойчивости.

Наиболее известным примером проявления нестационарных связей является параметрический резонанс, при котором на определённых частотных диапазонах система приобретает способность накапливать энергию. В машинах с цикловыми механизмами обычно имеет место медленное изменение параметров. При этом реализуемый частотный диапазон параметрического возбуждения существенно удалён от наиболее опасного главного параметрического резонанса, а параметрические резонансы высших порядков оказываются подавленными даже при малых диссипативных силах. В практике это нередко приводит к ложному выводу, что влиянием нестационарных связей можно пренебречь. Следует, однако, иметь в виду, что в современных технологических машинах часто возникает необходимость в осуществлении многокомпонентного движения рабочего органа, когда приведенные инерционные и упругие характеристики содержат не только низкочастотные, но и высокочастотные составляющие. Аналогичная ситуация также возникает при использовании вибрационной линеаризации с целью уменьшения эффективных значений сил кулонова трения. В подобных случаях мы сталкиваемся с проблемой подавления параметрических резонансов при полигармоническом характере параметрического возбуждения. Кроме того, нередко приведенные упругие характеристики оказываются нелинейными.

В общетеоретическом плане исследование подобных задач базируется на фундаментальных работах Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского и ряда других известных учёных – математиков и механиков [1, 2]. В прикладном плане здесь следует выделить монографии В.В.Болотина и Г. Шмидта [3, 4]. Практические приёмы определения областей динамической неустойчивости обычно базируются на различных модификациях метода малого параметра и на других асимптотических методах, либо на численных методах. Отметим, что процедура практического решения подобных задач на инженерном уровне далеко не элементарна и нуждается в дальнейшем совершенствовании, особенно, если иметь в виду реальные колебательные системы современных машин и механизмов и растущие скорости технологических процессов.

Метод условного осциллятора был предложен в работе [5] а в дальнейшем развит в работах [6–11], применительно к решению задач динамики машин с цикловыми механизмами. Он базируется на используемом в физике методе фазовых интегралов, связанном с именами Вентцеля, Крамера, Бриллюэна и Джеффриса [12]. Широкое распространение получила разновидность этого метода для решения задач с медленно изменяющимися параметрами, получившая название ВКБ-приближения первого порядка. Метод условного осциллятора изначально был предназначен для аналитического расчета и исследования линейных нестационарных систем, содержащих «большой» параметр. Этот метод опирается на одну аналогию между параметрическими колебаниями в исходной системе и вынужденными колебаниями в некоторой вспомогательной модели, названной *условным осциллятором*. В отличие от ВКБ-приближения он не ограничен медленным изменением параметров и позволяет определять условия динамической устойчивости и подавления параметрических резонансов, а также решать задачи при совместном учете параметрических и вынужденных колебаний. В этой статье рассматривается расширенная модификация метода условного

осциллятора при учете нелинейных упругодиссипативных характеристик. Статья является продолжением, ранее опубликованных работ автора, однако с целью облегчения чтения мы сочли целесообразным в лаконичной форме привести некоторые сведения, освещающие узловые вопросы по рассматриваемой проблеме.

2. Цикловые механизмы как составная часть колебательной системы машины обладают особенностями, выделяющими их исследование в самостоятельный класс динамических задач. Одна из главных особенностей качественного характера состоит в том, что цикловые механизмы одновременно являются источником возбуждения колебаний и объектом виброзащиты. Это требует специальных подходов к расчету виброактивности и динамических ошибок, а также при разработке способов их уменьшения. Другая особенность обусловлена повышенной сложностью цикловых колебательных систем, поскольку наличие цикловых механизмов обычно приводит к возникновению параметрических и нелинейных эффектов, вызванных как нелинейной трансформацией координат, так и конструктивными факторами. Для колебательной системы с одной степенью свободы дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + p^2(t)q = w(t), \quad (1)$$

где $p(t) = \sqrt{c(t)/a(t)}$ – переменная «собственная» частота; $c(t), a(t)$ – квазиупругий и инерционный коэффициенты; $n(t) = n_0(t) + n_1(t)$; $n_0(t) = \mathfrak{G}_0 p(t) / (2\pi)$ – диссипативная составляющая (\mathfrak{G}_0 – логарифмический декремент); $n_1(t) = 0,5\dot{a}(t)/a(t)$ – гироскопическая составляющая.

Поскольку метод условного осциллятора изложен в ряде статей, монографий, справочников и учебных пособий, мы ограничимся здесь лишь некоторыми соображениями общего порядка. Эффективность рассматриваемого метода связана со следующими особенностями. Введём новую переменную $v = q \exp\left[\int_0^t n_1(t) dt + 0,5z\right]$ и безразмерное время $\Phi = p^* \int_0^t \exp(z(t) dt)$, где $z(t)$ – некоторая функция, p^* – константа с размерностью частоты, в качестве которой удобно принять среднее значение $\bar{p}^2(t)$. Можно показать, что при условии

$$\ddot{z} - 0,5\dot{z}^2 + 2p^{*2} \exp(2z) = 2p^2(t), \quad (2)$$

уравнение (1) в новых координатах принимает вид дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами [7, 9, 10].

$$\frac{d^2 v}{d\Phi^2} + 2\delta \frac{dv}{d\Phi} + (1 + \delta^2)v = Q(\Phi), \quad (3)$$

где $\delta = n_0 p^*$; $Q = w(t) p^{*-2} \exp\left[\int_0^t n_1(t) dt - 1,5z\right]$.

Так как уравнение (3) имеет точное решение, приведенная трансформация уравнения (1) свидетельствует о том, что точность его решения определяется лишь точностью решения дифференциального уравнения (2). Это уравнение соответствует некоторой фиктивной колебательной системе с «жесткой» нелинейной характеристикой, названной *условным осциллятором*. Роль вынуждающей силы здесь играет функция, пропорциональная квадрату «собственной» частоты. В качестве «удобного» положительного свойства условного осциллятора отметим, что *его параметры, отражённые в левой части уравнения, носят общий характер и не зависят от параметров системы*. Уравнение (2) является нелинейным, однако, как показано в работах [8 – 11], с достаточной для инженерных расчётов точностью можно воспользоваться линеаризованным уравнением

$$\ddot{z} + 4p_*^2 z = 2(p^2 - p_*^2), \quad (4)$$

где p_* – среднее значение функции p .

При практических расчётах обычно удовлетворяется условие $|z| < 1$, поэтому вынужденные колебания условного осциллятора можно определять из простого уравнения (4). На основании (4) наглядно видно, что резонанс при вынужденных колебаниях условного осциллятора происходит при равенстве частоты пульсации удвоенной средней частоте исходной системы. Это соответствует главному параметрическому резонансу. Таким образом, резонанс при вынужденных колебаниях условного осциллятора отвечает параметрическому резонансу исходной системы. В нерезонансных режимах функция $n_1(t)$ и вынужденные колебания условного осциллятора $z(t)$ являются периодическими функциями периода $\tau = 2\pi / \omega$, где ω – средняя угловая скорость входного звена. Очевидно, что при этом функция $Q(\Phi)$ также является периодической, причём безразмерное значение периода этой функции равно $\Phi(\tau) = \bar{p}\tau = 2\pi\bar{p} / \omega$. Безразмерное время Φ является монотонно возрастающей функцией времени, так как $d\Phi / dt = p^* e^z > 0$. Следовательно, приведенная выше трансформация приведет лишь к переменному масштабу по времени, не нарушая причинно-следственных связей. При медленном изменении параметров в уравнении (2) достаточно сохранить «статическую» составляющую. Тогда $z \approx \ln(p / p^*)$, и метод условного осциллятора совпадает с ВКБ-приближением первого порядка [12]. При этом решение уравнения (1) приводится к виду [7,9,10]

$$q = A_0 \exp\left[-\int_0^t n_0 dt\right] \sqrt{\frac{a(0)p_0(0)}{a(t)p_0(t)}} \cos\left[\int_0^t p_0 dt + \gamma\right] + \frac{1}{\sqrt{p_0(t)}} \int_0^t \frac{w(u)}{\sqrt{p_0(u)}} \exp\left[-\int_u^t n(\xi) d\xi\right] \sin\left[\int_u^t p_0(\xi) d\xi\right] du,$$

где A_0, γ – определяются начальными условиями; p_0 – медленная составляющая «собственной частоты p ».

Данный метод хорошо приспособлен к специфике решения задач динамики механизмов. В частности, сохраняя единство подхода, этим методом удаётся исследовать параметрические явления и построить приближённые решения, как при «медленных», так и при «быстрых» изменениях параметров. Резонанс линеаризованного условного осциллятора соответствует главному параметрическому резонансу, который возникает в окрестности «плавающей» частоты $2p_0$, где. Частное решение уравнения (1) имеет вид модифицированной формулы Дюамеля

$$z = \frac{1}{\sqrt{p_0(\varphi)}} \int_0^{\varphi} \frac{[p(u)^2 - p_0(u)^2]}{\sqrt{p_0(u)}} \sin\left[2 \int_u^{\varphi} p_0(\tau) d\tau\right] du. \quad (5)$$

Заметим, что аналитический подход в данном случае играет большую роль при инженерных расчетах для оценок не только количественного, но и качественного характера, а также при оптимизации параметров и динамическом синтезе механизмов.

Во многих технологических машинах исполнительные органы совершают периодические программные движения, которые осуществляются так называемыми цикловыми механизмами – рычажными, кулачковыми, мальтийскими и др. Кинематические характеристики цикловых механизмов являются не только источником возмущений, но и формируют нестационарные динамические связи, которые могут привести к нарушению динамической устойчивости. В цикловых механизмах связь между координатами на «входе» и «выходе» описывается нелинейной функцией положения $\Pi(\varphi)$. Для идеального механизма, в котором отсутствуют зазоры и все звенья принимаются абсолютно жёсткими $\varphi = \varphi_* = \omega t$, где ω – угловая скорость входного звена. Пусть $\varphi = \varphi_* + q$, где q – динамическая ошибка, возникающая при колебаниях. Принимая во внимание, что функция положения непрерывна и дифференцируема, произведём линеаризацию этой функции в окрестности программного движения: $\Pi(\varphi_* + q) \approx \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_*)q$, где $\Pi' = d\Pi/d\varphi$ – первая геометрическая передаточная функция механизма (аналог скорости). Таким образом, при малых колебаниях, несоизмеримых с «идеальной» координатой практически без ущерба для точности мы заменили нелинейную связь нестационарной. Нестационарные связи могут быть источником значительного повышения виброактивности цикловых механизмов. В частности, при этом эффективный коэффициент диссипации, соответствующий нелинейным позиционным диссипативным силам, существенно снижается и даже может стать отрицательным, что, приводит к появлению локальных участков, на которых амплитуда свободных колебаний растёт.

Наиболее известным примером проявления нестационарных связей является параметрический резонанс, при котором на определённых частотных диапазонах система приобретает способность накапливать энергию. Так, в частности, для уравнения

$$\ddot{y} + 2n_0\dot{y} + k_0^2(1 - \varepsilon \sin \omega_p t)y = 0, \quad (6)$$

где k_0 , ε – среднее значение и глубина пульсации собственной частоты.

Области параметрического резонанса (рис.1) располагаются в окрестности частот $2k_0/j$ ($j=1,2,\dots$). Заштрихованные области отвечают зонам динамической неустойчивости, в которых амплитуда колебаний $A \rightarrow \infty$. Для главного параметрического резонанса ($j=1$) критическое пороговое значение глубины пульсации $\varepsilon_* = \psi/\pi = 2\vartheta/\pi$; здесь ψ – коэффициент рассеяния. Заметим, что одной из характерных ошибок в данном классе задач является основанное на (6) допущение $\varepsilon = 0$ при $\varepsilon \ll 1$, которое лишь на первый взгляд кажется приемлемым. Дело в том, что принимая во внимание высокую интенсивность нарастания амплитуд в зоне параметрического резонанса (по экспоненте), должно быть выполнено с некоторым запасом более «жесткое» условие $\varepsilon < \varepsilon_* = \psi/\pi$ [7,9,11].

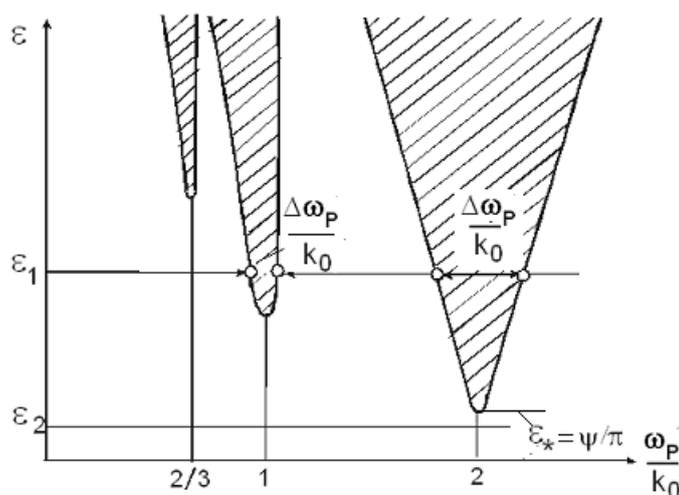


Рис.1. Области динамической неустойчивости

Используя это условие на основании (5) мы с некоторым запасом получаем лаконичное условие динамической устойчивости в области главного параметрического резонанса при совместном учете быстрых и медленных изменений параметров:

$$\vartheta > 0,5|\Delta z|/p_*, \quad (7)$$

где $\Delta z = z(2\pi) - z(0)$; $p_* = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} p_0(\varphi) d\varphi$.

Одной из особенностей параметрического возбуждения в колебательных системах с цикловыми механизмами является «плавающий» характер перемещения областей

неустойчивости вдоль оси абсцисс, что связано с медленно изменяющейся компонентой частоты $p_0(t)$. Это обстоятельство в определенной степени снижает точность и надежность полученных результатов при определении границ областей неустойчивости, однако, в то же время, повышает роль диссипативных характеристик. Причем, как справедливо отметил Г. Шмидт относительно важнейших очередных задач в развитии теории параметрических колебаний, – «...на первом месте стоит уточнение наших представлений о нелинейном демпфировании» [4].

Поскольку $a(\varphi) = a(2\pi)$, работа этой составляющей за период $2\pi/\omega$ равна нулю, что свойственно гироскопическим силам. Следовательно, эта функция не влияет на пороговые условия возбуждения параметрического резонанса. Однако в пределах цикла возможны зоны, в которых амплитуда колебаний A возрастает, т.е. $dA/d\varphi > 0$, что может привести к существенным динамическим ошибкам при реализации программного движения [9,10,13,14]. Этот эффект иллюстрируется на рис.2 результатами, полученными компьютерным моделированием и экспериментально. Отметим, что при $p = p_0$ (медленное изменение), неравенство (7) совпадает с результатами, полученными на основании прямого метода Ляпунова, устанавливающего достаточное условие динамической устойчивости [1–4].

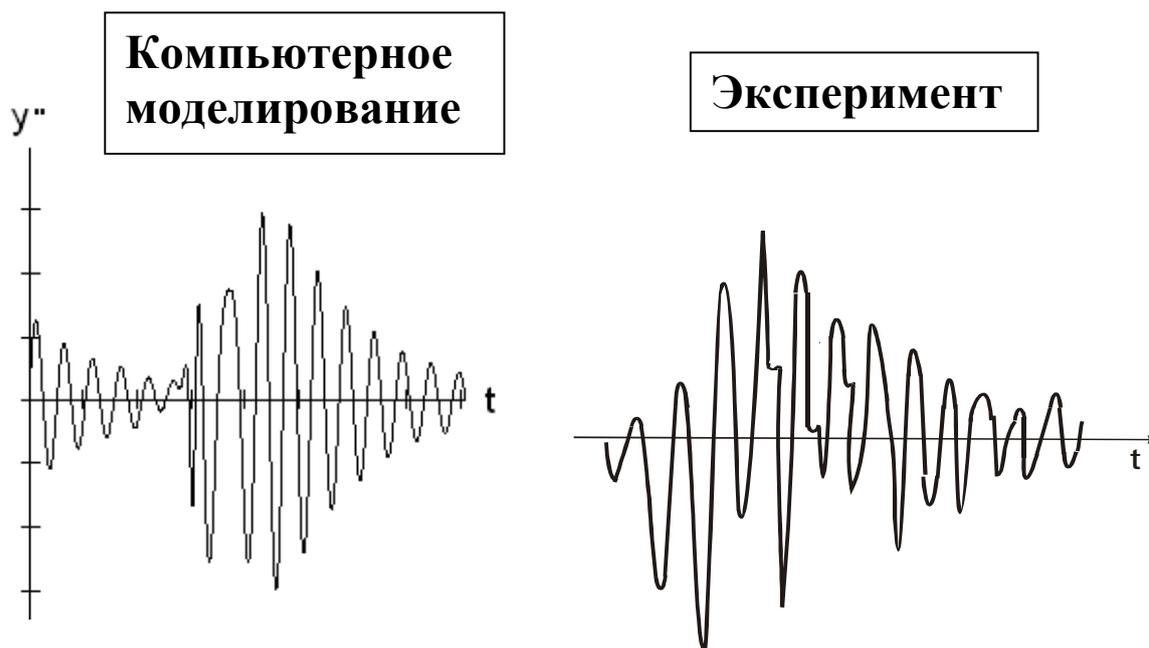


Рис.2. Графики $y''(t)$

3. Далее рассмотрим обобщенную математическую модель циклового механизма, в которой помимо нестационарных связей учтена нелинейность упругодиссипативных параметров [3, 6, 7]. После приведенной выше линеаризации в окрестности программного движения эта модель описывается дифференциальным уравнением

$$J_1(1 + \mu\Pi_*'^2)\ddot{q} + R(q, \dot{q}) + 2\mu J_1\Pi_*'\Pi_*''\omega\dot{q} + c_1(1 + \zeta\Pi_*'^2)K(q) = M(t)\Pi_*' - \mu J_1\Pi_*'\Pi_*''\omega^2. \quad (8)$$

Здесь $a(\varphi_*) = J_1(1 + \mu\Pi_*'^2)$, $c(\varphi_*, q) = c_1(1 + \zeta\Pi_*'^2)K(q)$ – приведенные к входному звену моменты инерции и коэффициенты жёсткости, где $K(q)$ – нелинейная функция μ, ζ – коэффициенты приведения. (В частном случае $\mu = J_2/J_1$, $\zeta = c_2/c_1$; J_i, c_i – моменты инерции и коэффициенты жёсткости входного и выходного звеньев); $R(q, \dot{q})$ – позиционная диссипативная сила, соответствующая коэффициенту рассеяния Ψ (подробнее см. ниже); $M(\varphi_*)$ – внешний момент, приложенный к выходному звену; $\Pi_*' = \Pi'(\varphi_*)$; $\Pi_*'' = \Pi''(\varphi_*)$; $(\quad)' = d/d\varphi_*$.

Уравнение (8), свидетельствует о следующих факторах, формирующих основные источники повышения виброактивности рассматриваемого класса систем:

- Переменность инерционных и упругих характеристик, которая в зонах параметрических резонансов может привести к нарушению условий динамической устойчивости;
- Наличие медленных и быстрых составляющих в передаточных функциях и в приведенных вынуждающих силах, что при учёте нелинейности диссипативных сил влияет на пороговые значения глубины пульсации параметров системы;
- Взаимовлияние вынужденных и параметрических колебаний;
- Возбуждение низкочастотных резонансов цикловых механизмов на частоте биений.

Анализ каждого из перечисленных факторов преследует цель разработки инженерных рекомендаций, направленных на подавление критических колебательных режимов, повышающих динамические нагрузки и нарушающих точность воспроизведения заданного программного движения рабочих органов технологических машин.

Учет перечисленных выше факторов в основном нашел отражение в работах [11–14]. В частности, было установлено, что при $\mu = \zeta \neq 0$, несмотря на переменность параметров, наблюдается эффект квазистационарности, когда «собственная» частота $p = \sqrt{c(t)/a(t)} = \text{const}$. Пусть $\Pi' = \Pi'_\omega + \Pi'_\nu$, где слагаемые соответствуют медленным и быстрым движениям. Для определённости примем $\Pi'(\varphi) = h[\sin \varphi + \varepsilon \sin(\nu\varphi + \gamma)]$; первое слагаемое отвечает «медленной», а второе – «быстрой» гармонике с частотой ν и глубиной пульсации ε . (Здесь и ниже звездочка при φ опускается.). Таким образом, структуре функции Π' соответствуют «медленные» и «быстрые» компоненты собственных частот. Как показано в работе [11] с помощью метода условного осциллятора, устранение роста амплитуд ($dA/d\varphi < 0$) при параметрическом возбуждении может быть достигнуто при

$$\vartheta = 2\pi\delta > \vartheta^* = \pi p_0^{-1} |a'/a + p'/p - p'_0/p_0|, \quad (9)$$

На рис. 3,а для ряда типовых случаев приведены графики $p_0(\varphi)$, $p(\varphi)$ при $h = 1$; $\varepsilon = 0, 2$; $\nu = 7$.

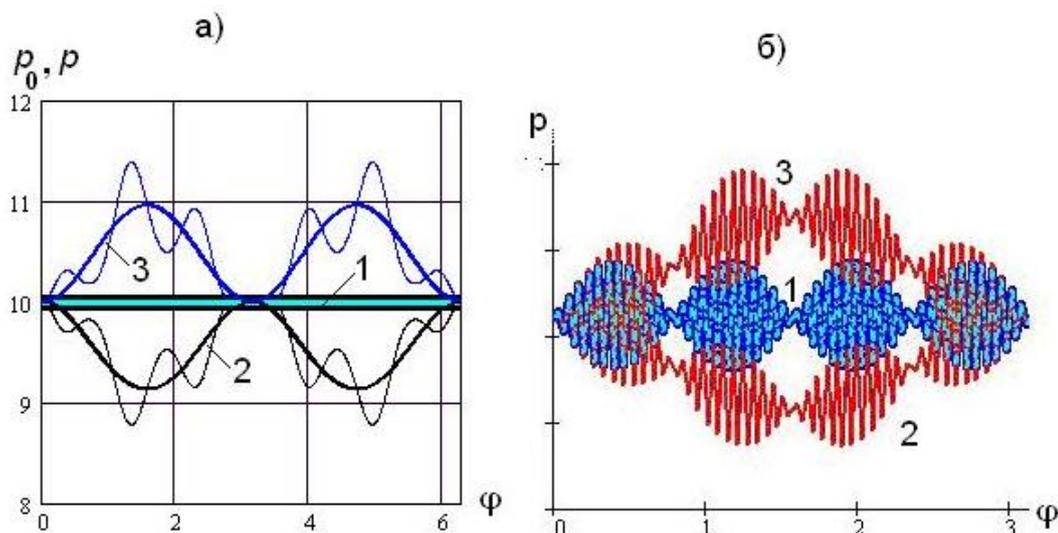


Рис.3. Типовые графики изменения «собственных» частот $p(\varphi)$: 1– $\mu = \zeta = 2$

2. $\mu = 2, \zeta = 0$; 3. – $\mu = 0, \zeta = 2$ (жирная линия соответствует $p_0(t)$).

Высокочастотное возбуждение при движении входного звена может привести к появлению биений (рис.3,б). (Здесь и ниже использованы нормированные безразмерные частоты, отнесённые к ω , что соответствует переходу к безразмерному времени $\varphi = \omega t$. Практически это легко достигается заменой коэффициентов жесткости c_i на c_i / ω^2 .)

4. Выше диссипативные силы учитывались на основании заданного значения коэффициента рассеяния ψ (или ϑ, δ). Этими параметрами обычно пользуются для определения эквивалентной линейной силы сопротивления, например $R_* = b\dot{q}$, где $b = \psi c / (2\pi p_0)$. Для описания нелинейной позиционной диссипативной силы при полигармонических колебаниях требуется определенная коррекция этой зависимости. Физические предпосылки для этой коррекции связаны с тем, что мы обычно располагаем ограниченной исходной информацией, заимствованной из экспериментальных материалов в форме некоторых интегральных диссипативных характеристик, таких как коэффициент рассеяния ψ или логарифмический декремент ϑ , которые получены при гармонических колебаниях некоторых эталонных моделей. Однако, «настраивая» для определения этих параметров реальную механическую систему на гармонический режим, мы по существу экспериментальным методом осуществляем гармоническую линейризацию диссипативных сил. Поэтому полученная таким образом информация о диссипативных свойствах системы является далеко не полной и отражает их лишь в той мере, в какой

гармонически линеаризованная диссипативная сила соответствует действительному сопротивлению. Естественно, что при многочастотных колебаниях это соответствие нарушается, причём при определённых условиях – существенным образом. В общем виде позиционная диссипативная сила, отражающая так называемое конструкционное демпфирование, может быть представлена как $R(q, \dot{q}) = -|R|u(|\dot{q}| - |v|)\text{sign}\dot{q}$, где v - скорость, связанная с дополнительным движением («чужие» гармоники, переносное движение и т.п.); u – единичная функция ($u = 1$ при $|\dot{q}| > |v|$ и $u = 0$ при $|\dot{q}| < |v|$). При этом эффективные значения диссипативных характеристик зависят от вынужденных колебаний и могут существенным образом уменьшиться. Корректирующий множитель $0 < \sigma < 1$ определяется зависимостью $\sigma = \lambda(0,4 + 0,5\lambda) / (1 + 0,5\lambda^2)$, где $\lambda = \max \dot{q} / \max v$ [7, 9, 10, 15]. При малых значениях λ функция $\sigma(\lambda)$ близка к линейной, т.е. пропорциональна амплитуде. С этим, в частности, связан эффект вибрационной линеаризации сил сухого трения.

На рис.4 приведены графики, полученные компьютерным моделированием уравнения (8) при пороговом значении ω без коррекции диссипативных параметров (рис.4,а) и с учетом коррекции при учете возбуждаемых вынужденных колебаний (рис.4,б)

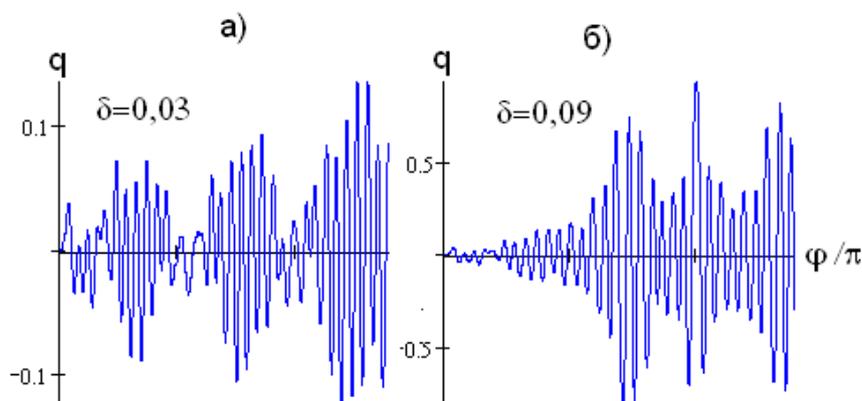


Рис. 4. К анализу коррекции диссипативных параметров

Как следует из анализа графиков, для выполнения условий динамической устойчивости исходное значение диссипативного параметра $\delta = 0,03$ увеличивается в три раза, а также существенно возрастает интенсивность параметрического возбуждения.

5. В предыдущих работах автора, посвященных методу условного осциллятора, учитывались лишь нестационарные связи. Ниже предложена модификация этого метода применительно к колебательной системе, с нестационарными и нелинейными связями. В данном случае учтем нелинейность упругой характеристики. Запишем уравнение (8), в виде

$$(1 + \mu\Pi_*'^2)\ddot{q} + f(q, \dot{q}) + k^2(1 + \zeta\Pi_*'^2)K(q) = w \sin \omega t \cos \Omega t - 0,5\mu\omega^2 \sin 2\omega t, \quad (10)$$

где $f(q, \dot{q}) = R(q, \dot{q}) / J_1$; $w(t) = M_* \cos(\Omega t) \Pi_*' / J_1$; $k = \sqrt{c_1 / J_1}$; M_*, Ω – амплитуда и частота момента, приложенного к выходному звену ($\Omega \gg \omega$).

В уравнении (10) опущена гироскопическая составляющая, пропорциональная \dot{q} , работа которой за период $2\pi / \omega$ обращается в нуль.

Пусть $\Pi' = h \sin \varphi$, $\Pi'' = h \cos \varphi$, а нелинейная восстанавливающая сила отвечает муфте с кубической характеристикой. Тогда $K(q) = q(1 + \beta q^2)$, а «собственная» частота после гармонической линеаризации равна

$$p(\varphi, A) = k \sqrt{(1 + \zeta \Pi_*'^2) ((1 + 0,75\beta A^2) / (1 + \mu \Pi_*'^2))}. \quad (11)$$

Для аналитического решения задачи метод условного осциллятора был совмещен с методом гармонической линеаризации. При этом возникает проблема, связанная с выбором амплитуды, требующая в данном случае согласно уравнению (10) совместного учета параметрического возбуждения колебаний, а также силового и кинематического возбуждения вынужденных колебаний. Разумеется, в подобной ситуации речь идет скорее об аналитической оценке, позволяющей выбрать направление динамического синтеза с целью снижения виброактивности колебательной системы.

Сначала произведем коррекцию полученных результатов при $\beta = 0$, совместном силовом и параметрическом возмущениях, а также при учете влияния высокочастотных воздействий на резонансные колебания (см. выше). Принимая во внимание полученные выше скорректированные диссипативные параметры, можно показать, что для наиболее неблагоприятного соотношения фаз максимальная резонансная амплитуда определяется как $A^* = \chi A$. Здесь A – амплитуда при отсутствии высокочастотного возбуждения, χ – коэффициент возрастания резонансной амплитуды (рис.5), который определяется как

$$\chi = 0,5 \left[1 + sL + \sqrt{(1 + sL)^2 + 4s(1 - L)} \right] / (1 - L), \quad (12)$$

где $L = 2\pi\varepsilon / \vartheta$, $s = \sigma^{-1}(\lambda) - 1$.

Параметр L отражает влияние параметрического возбуждения, а параметр s – высокочастотную компоненту вынуждающей силы. Согласно (12) при $L \rightarrow 1$ нарушаются условия динамической устойчивости, поэтому $\chi \rightarrow \infty$ не зависимо от значения s .

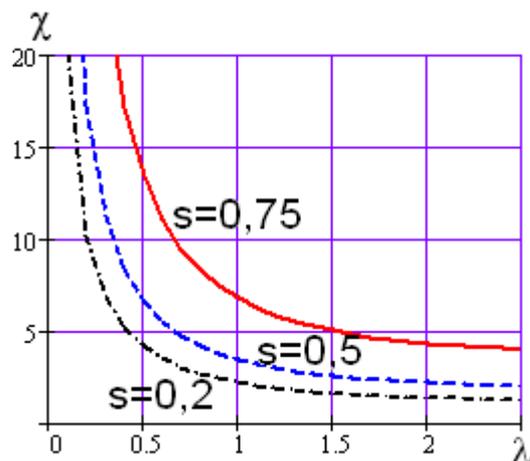


Рис.5. Графики коэффициента возрастания резонансной амплитуды

Далее в качестве наиболее «опасного» случая примем часто встречающуюся ситуацию, которая возникает при совпадении частоты гармоники вынуждающей силы с частотой главного параметрического резонанса. Можно показать, что тогда при выполнении условий динамической устойчивости амплитуда вынужденных колебаний обратно пропорциональна функции

$$\vartheta_{\text{д\ddot{a}c}} = \left| \vartheta - \vartheta^* \cos 2\Delta\gamma \right|, \quad (13)$$

где $\Delta\gamma$ — фазовый сдвиг между силовым и параметрическим возбуждением [1–3]. Таким образом, резонансная амплитуда A отвечает некоторой условной системе с измененным уровнем диссипации.

На рис.6 приведены нормированные результаты компьютерного моделирования для трёх резонансных режимов при заданном значении логарифмического декремента $\vartheta = 0,39$. Режим 1 (кривые 1) отвечает вынужденным колебаниям, при котором коэффициент динамичности $\kappa = \pi / \vartheta = 8,05$. При режимах 2 и 3 наряду с силовым возбуждением имеет место параметрическое возбуждение с глубиной пульсации $\varepsilon = 0,2$ и $\Delta\gamma = \pi/2; 0$ (кривые 2, 3).

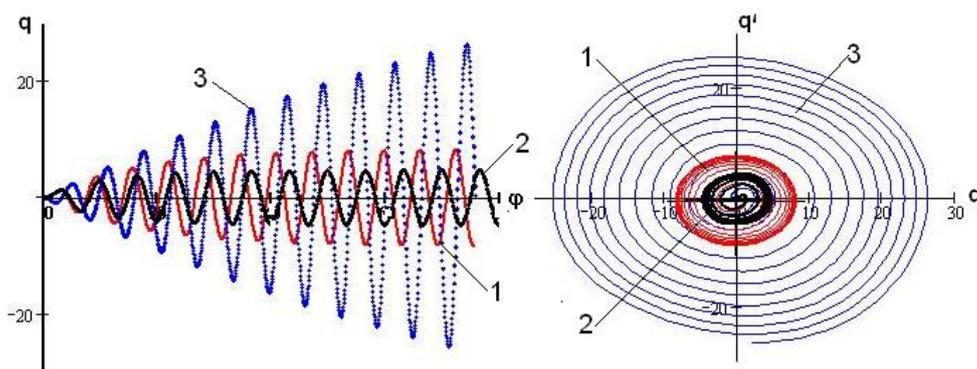


Рис.6. Влияние фазового сдвига $\Delta\gamma$ на резонансный режим ($\beta = 0$)

Согласно (8), (9) $\vartheta^* = 0,31$; тогда при режиме 2 имеем $\vartheta_{\text{двс}} = \vartheta_{\text{max}} = 0,7$ (кривая 2), а при режиме 3 – $\vartheta_{\text{двс}} = \vartheta_{\text{min}} = 0,08 < \vartheta^*$. В этом случае $\vartheta_{\text{двс}} < \vartheta^*$, следовательно вопрос о максимальной амплитуде теряет смысл, так как система динамически неустойчива. Отметим, что при $\vartheta^* < \vartheta < 2\vartheta^*$, фазовый сдвиг $\Delta\gamma$ существенно влияет на интенсивность роста резонансной амплитуды. На рис.7,а показано изменение фазовых портретов условного осциллятора при учете нелинейности упругой характеристики. Значению $\min z$ соответствует $\max A$. Приведенные фазовые траектории свидетельствуют о существенном увеличении Δz при нелинейной упругой характеристике (кривая 2) по сравнению с линейной (кривая 1). При этом значительно возросла амплитуда колебаний (рис.7,в), что, в свою очередь, привело к повышенной пульсации «собственных» частот p_1, p_2 (рис. 7,б), а, следовательно, к изменению пороговых условий параметрического возбуждения.

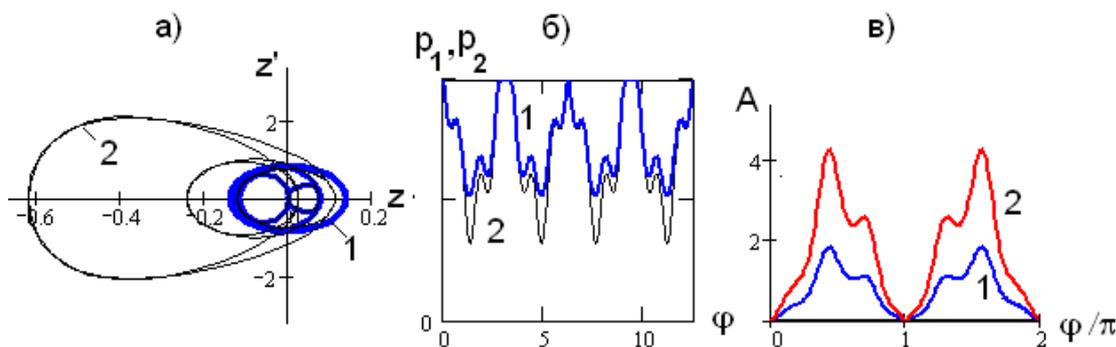


Рис.7. К анализу влияния нелинейностей: 1. $\beta = 0$; 2. $\beta = -0,25$

Следует отметить, что при малой диссипации переходный процесс выхода на установившийся режим часто завершается потерей устойчивости и затягиванием в зону повышенных амплитуд (рис.8). Аналогичная картина иногда также наблюдается при изменении фазовых сдвигов между силовым и параметрическим возбуждением.

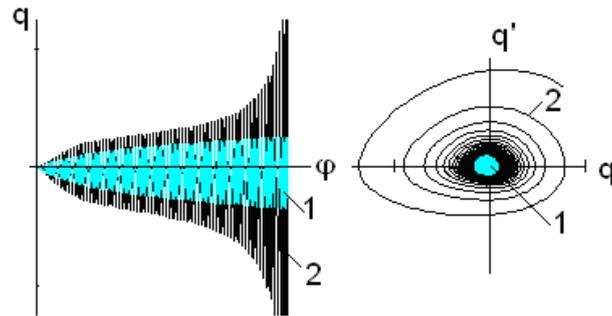


Рис.8. К анализу эффекта затягивания: 1. $\delta = 0,036$; 2. $\delta = 0,07$

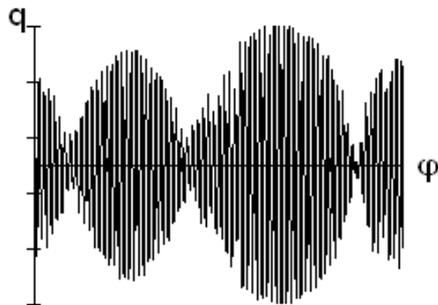


Рис.9. Возбуждение резонанса на частоте биений

В заключение отметим, что в работах [11,16,17] применительно к задачам динамики цикловых механизмов был исследован выявленный М.З.Коловским [18] источник параметрического возбуждения на частоте биений, возникающий в нелинейных системах при высокочастотной амплитудной модуляции (рис.9).

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.
2. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. – М.: Наука, 1964. – 432 с.
3. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 600 с.
4. Шмидт Г. Параметрические колебания. – М.: Мир. 1978. – 336 с.
5. Вульфсон И. И. О колебаниях систем с параметрами, зависящими от времени. // Прикладная математика и механика. 1969. Т.33, №2. – С. 331–337.
6. Вульфсон И.И. Динамические расчёты цикловых механизмов. – Л.: Машиностроение. 1976. – 328 с.
7. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с.
8. Vulfson, I. On the analytical investigation of nonstationary vibratory systems by the method of fictitious oscillator // Вестник научно-технического развития. 2008. №3 (7). С. 26–38.
9. Вульфсон И.И. Динамика цикловых машин. – СПб.: Политехника, 2013. – 425 с.
10. Vulfson, I. Dynamics of Cyclic Machines. – Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. – 410 p.
11. Вульфсон И.И. Условия динамической устойчивости при совместном учете медленных и быстрых движений. // Вестник научно-технического развития. №3(91), 2015. – С. 3 –13.

12. Фреман Н., Фреман П. У. ВКБ - приближение. М.: Мир, 1967. – 168 с.
13. Вульфсон И.И. К проблеме квазистационарности динамических характеристик цикловых механизмов // Теория механизмов и машин. 2015. № 1. С. 6 – 15
14. Vulfson I.I. Quasistationarity of Dynamic Modes in Cyclic Mechanisms Forming Rheonomic Oscillating Systems with Lattice Structure // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2015. Vol. 44. No. 4. Pp. 312–318.
15. Vulfson I.I. Some Nonlinear Effects of Machine Dynamics // Journal of Vibroengineering. 2008. Vol. 10, No. 4. – Pp. 442–450.
16. Вульфсон И.И. Нелинейные резонансные колебания привода на частоте амплитудной модуляции высокочастотного возбуждения // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2005. № 6. – С. 17–22.
17. Вульфсон И.И. Скрытый источник параметрического возбуждения колебаний в механизмах с нелинейными кинематическими и упругодиссипативными характеристиками. Вестник научно-технического развития. 2015. №6 (91) С.2-11.
18. Коловский М.З. О влиянии высокочастотных возмущений на резонансные колебания в нелинейной системе // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ. № 226. М., Л.: Машгиз, 1963.– С. 7–17.

Дата поступления статьи: 1 мая 2016 года.