

УДК 534

## К ОПИСАНИЮ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В СТРУННОЙ РЕШЁТКЕ, ВИБРИРУЮЩЕЙ НАПРОТИВ ОГРАНИЧИТЕЛЯ

© Виталий Львович Крупенин

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Россия, Москва

<sup>2</sup>Московский государственный университет печати им. Ивана Федорова

[krupeninster@gmail.com](mailto:krupeninster@gmail.com)

**Аннотация.** Рассмотрена динамика двумерной решетчатой конструкции, соударяющейся с неподвижным ограничителем хода. Рассмотрение данных систем проводится в предположении, что удар описывается не по Ньютону, а при помощи гипотезы, предполагающей конечность времени ударного взаимодействия. Описание неньютоновских виброударных процессов проводится посредством методов сингуляризации и частотно-временного анализа. Приводятся примеры, рассчитываются резонансные режимы, выводятся определяющие соотношения.

**Ключевые слова:** струнная решетка, метод сингуляризации, гипотеза удара, импульс взаимодействия, время взаимодействия, синхронные соударения, хлопки, резонансные режимы.

## THE DESCRIPTION OF NON-NEWTONIAN VIBRO-IMPACT PROCESSES IN A STRING GRID, VIBRATING AGAINST OF THE OBSTACLE

©V.L. Krupenin

IMASH RAS, Russia, Moscow  
Moscow State University of Printing Arts

**Abstract.** The dynamics of a two-dimensional lattice structure, colliding with a fixed stroke limiter. Consideration of these systems is carried out under the assumption that the impact is not described by Newton, and with the help of a hypothesis, the intended end impact interaction time. Description of non-Newtonian vibro-impact processes carried out by singularization methods and time-frequency analysis. Examples are calculated resonant modes, displays the defining relations.

**Keywords:** string grille, singularisation method, the hypothesis of impact, interaction of momentum during the interaction, synchronous collision, claps, resonant modes.

**1. Объект исследования.** Рассмотрим струнную решетку, находящуюся в прямоугольной раме и снабженную ограничителем хода [1-4] – рис.1.

Решетка предполагается составленной из двух семейств взаимно перпендикулярных одинаковых упругих линейных струн, заземленных на концах и имеющих длины  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 1). Пронумеруем струны посредством индексов  $k = 1, 2, \dots, N_1$  и  $q = 1, 2, \dots, N_2$ ; в узлах решетки поместим точечные абсолютно твердые тела с одинаковыми массами  $m$ .

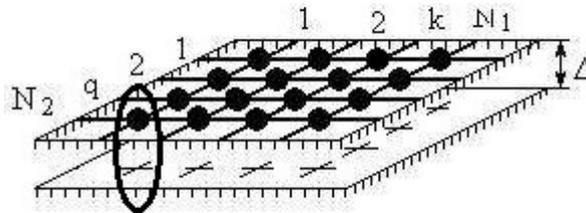


Рис.1

Прямоугольные ячейки решетки одинаковы, но длины и ширины их сторон, вообще говоря, не равны между собой. В общем случае решетка может быть анизотропной. Считаем струнные элементы безынерционными. Крепления струн в узлах предполагаем абсолютно жесткими, а натяжения - большими, так что их возможными изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь.

Пусть каждая «горизонтальная сторона» ячеек имеет длину  $\Delta L_1$ ; «вертикальная» -  $\Delta L_2$ . Обозначим натяжение соответствующих безынерционных участков -  $T_1$  и  $T_2$ .

Динамика решетчатой конструкции описывается посредством  $N$  функций прогиба  $u_{kq}(t)$ , где индексы  $k=1, 2, \dots, N_1$ ;  $q=1, 2, \dots, N_2$ . Каждая из функций  $u_{kq}(t)$  изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки. Будем предполагать, что индекс  $q$  - нумерует струны «снизу-вверх», а индекс  $k$  - «слева-направо» - рис. 1.

Предположим, что параллельно плоскости статического равновесия решетки на фиксированном расстоянии  $\Delta < 0$  установлена плоская стенка, являющаяся ограничителем хода. С этой стенкой узлы решетки и взаимодействуют. В задачах такого рода возможны разные случаи расстановки ограничителей. Будем предполагать, что удар - прямой.

В случае мгновенного удара применяется известная гипотеза Ньютона (или в данном случае упругого взаимодействия - гипотезы Гюйгенса и целого ряда предшественников Ньютона [5]). Сила удара в этом случае записывается при помощи сингулярной обобщенной функции [6, 7]. Однако, если, важен учет конечной продолжительности силы удара или при учете потерь энергии во время взаимодействия необходимо принять во внимание какие-либо специальные теории контактной диссипации, основанные, например, на свойствах материалов взаимодействующих тел необходимо отказаться от предположения о мгновенности взаимодействия и перейти к описанию удара при помощи так называемых пороговых функций из класса  $\{\Phi\}_\Delta$  [8, 9].

Полагая вначале удар упругим, отметим, что выбор соответствующей гипотезы - суть задание (получение) представления силы взаимодействия. Если ударная пара  $(n, j)$  - односторонняя и несимметричная, то несимметричной будет и соответствующая, пороговая функция  $\lambda \Phi_{nj}(u)$ , при посредстве коей, собственно, и устанавливается гипотеза удара. Здесь  $\lambda \gg 1$  - большой параметр,  $u$  - текущая координата. Класс пороговых функций в данном случае определяется так:

$$\Phi_{nj}(u) \in \{\Phi\}_\Delta \equiv \{\Phi(u); \Phi(u) = -\psi(u-\Delta)\eta(u-\Delta); \Delta \leq 0; \psi(u) \equiv 0; u \geq 0\}. \quad (1)$$

Предполагаем, что  $\psi(u)$  непрерывно дифференцируема на всей числовой оси, монотонно возрастает и является выпуклой при  $u \leq 0$  (рис. 2);  $\eta(u)$  – единичная функция.

После первых работ такой подход был позже развит в [6], а для систем со многими ударными парами в [10].

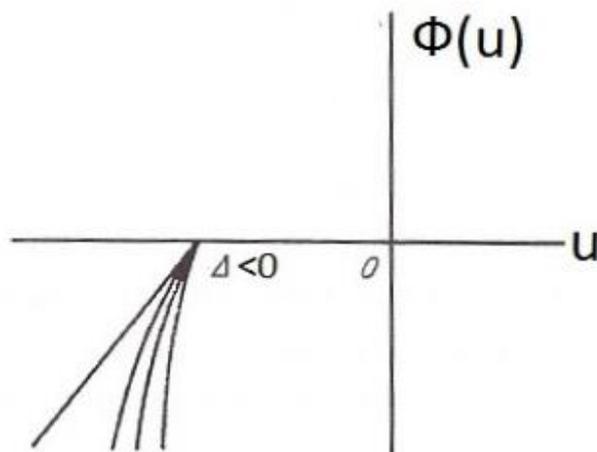


Рис. 2

Выбрав гипотезу удара, можем записать уравнения движения в виде:

$$m \ddot{u}_{kq} + c_1(2u_{kq} - u_{k-1,q} - u_{k+1,q}) + c_2(2u_{kq} - u_{k,q-1} - u_{k,q+1}) - \lambda \Phi_{kq}(u_{kq}, \dot{u}_{kq}) = \varepsilon g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq}). \quad (2)$$

Обозначения:  $u_{kq}$  – перемещения узлов решетки;  $\varepsilon$  – малый параметр;  $\varepsilon g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq})$  – неконсервативные силы, приложенные к узлам решетки;  $\lambda \Phi_{kq}(u_{kq}, \dot{u}_{kq})$  – большие силы взаимодействия, которые, при учете контактной диссипации, зависят от скоростей  $\dot{u}_{kq}$ ;  $\lambda$  – большой параметр;  $c_{1,2} = T_{1,2} / \Delta L_{1,2}$  – коэффициенты упругости. Условия защемления концов струн можно записать как

$$u_{kq} = 0, \quad k=0; N_1; q=0; N_2. \quad (3)$$

Не ограничивая общности, можно положить  $m=1$ .

Ставится задача решить задачу (2), (3) для какой-либо гипотезы удара (1).

**2. Интегральные уравнения свободных колебаний.** Переходя к исследованию задачи, внесем в уравнения (2) некоторые упрощения. Ограничиваясь пока, консервативной моделью, положим  $\varepsilon=0$  и, как и указывалось ранее, пренебрежем потерями энергии при взаимодействии. Уравнение (2) теперь записывается так:

$$\ddot{u}_{kq} + c_1(2u_{kq} - u_{k-1,q} - u_{k+1,q}) + c_2(2u_{kq} - u_{k,q-1} - u_{k,q+1}) - \lambda \Phi_{kq}(u_{kq}) = 0. \quad (4)$$

Будем исследовать задачу (3), (4). Перейдем к операторной форме записи уравнений движения [6, 7]. Система операторов динамической податливости  $L_{kq,nj}(p)$  ( $p \equiv d/dt$ ), для задачи (3), (4) построена в работе [2].

Вместо (4), имеем:

$$u_{kq} = \sum_{\kappa=1}^{N_1-1} \sum_{q=1}^{N_2-1} L_{kq,nj}(p) [\lambda \Phi_{nj}(u_{nj})]. \quad (5)$$

В соответствии с найденным в [2]:

$$L_{kq,nj}(p) = \zeta \sum_{\alpha=1}^{N_1-1} \sum_{\beta=1}^{N_2-1} \sin(k\alpha\pi N_1^{-1}) \sin(q\beta\pi N_2^{-1}) \sin(\alpha n\pi N_1^{-1}) \sin(\beta j\pi N_2^{-1}) (\Omega_{\alpha\beta}^2 + p^2)^{-1}, \quad (6)$$

причем нормировочный коэффициент  $\zeta=2[(N_1-1)(N_2-1)]^{-2}$ . Спектр собственных частот решетки  $\{\Omega_{\alpha\beta}\}$  определяют соотношения [1]:

$$\Omega_{\alpha\beta}^2 = \frac{2T_1}{\Delta L_1} [1 - \cos(\alpha\pi N_1^{-1})] + \frac{2T_2}{\Delta L_2} [1 - \cos(\beta\pi N_2^{-1})]. \quad (7)$$

Для анализа периодических свободных колебаний, в соответствии с алгоритмами методов частотно-временного анализа перейдем к системе нелинейных интегральных уравнений гаммерштейновского типа [6, 7]:

$$u_{kq}(t) = \sum_{\kappa=1}^{N_1-1} \sum_{q=1}^{N_2-1} \int_0^T \chi_{kq,nj}(t-s) \{\lambda \Phi_{nj}[u_{nj}(t-s)]\} ds \quad (8)$$

Ядра уравнения (8)  $\{\chi_{kq,nj}(t-s)\}$  - суть семейство периодических функций Грина (ПФГ) [2] рассматриваемой решетчатой конструкции, члены которого, в свою очередь, определяются членами семейства  $\{L_{kq,nj}(p)\}$  (6) посредством рядов Фурье вида:

$$\chi_{kq,nj}(t) = T^1 \zeta \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{N_1-1} \sum_{\beta=1}^{N_2-1} \sin(k\alpha\pi N_1^{-1}) \sin(q\beta\pi N_2^{-1}) \sin(\alpha n\pi N_1^{-1}) \sin(\beta j\pi N_2^{-1}) \frac{\exp(i\sigma\omega t)}{\Omega_{\alpha\beta}^2 - \sigma^2 \omega^2}.$$

которые на полуинтервале периодичности  $0 \leq t < T$  записывается в виде

$$\chi_{kq,nj}(t) = \zeta \sum_{\alpha=1}^{N_1-1} \sum_{\beta=1}^{N_2-1} \sin(k\alpha\pi N_1^{-1}) \sin(q\beta\pi N_2^{-1}) \sin(\alpha n\pi N_1^{-1}) \sin(\beta j\pi N_2^{-1}) \chi_{\alpha\beta}(t), \quad (9)$$

где  $\chi_{\alpha\beta}(t)$  - ПФГ линейных осцилляторов с частотами  $\{\Omega_{\alpha\beta}\}$ . При  $0 \leq t < T$ :

$$\chi_{\alpha\beta}(t) = (2\Omega_{\alpha\beta})^{-1} \cos[\Omega_{\alpha\beta}(t-T/2)] \sin^{-1}(\Omega_{\alpha\beta}T/2). \quad (10)$$

**3. Сингуляризация.** Рассматриваемая система содержит  $N=(N_1-1)(N_2-1)$  ударных пар. Для каждой пары  $(n,j)$  зафиксируем какую-либо гипотезу удара  $\Phi_{nj}(u) \in \{\Phi\}_\Delta$ . Большой параметр  $\lambda \gg 1$  определяет крутизну характеристики силы взаимодействия. В [8] было показано, что при  $\lambda \rightarrow \infty$  решения уравнений подобных (8) переходят в решения, отвечающие гипотезе о мгновенном (в данном случае упругом) ударе. Этот факт, очевидно, сохраняется и для рассматриваемой  $2D$  системы.

При этом постулируется, что во время ударного взаимодействия в произвольной ударной паре действием любых сил, приложенным в точке её локализации, а также любых сил, включая силы взаимодействия в других точках системы, можно пренебречь.

Используем метод сингуляризации [9], сопоставляющий немгновенному короткому взаимодействию мгновенный удар, но происходящий в «сдвинутый момент времени». Входящие в уравнение (8) силы можно приближенно представить, как сингулярную обобщенную функцию. В частности, для  $T$ -периодического процесса:

$$\lambda \Phi_{nj}[u_{nj}(t)] = J_{\lambda nj} \delta^T(t - t_{nj} - \tau_{\lambda nj}); \quad (11)$$

где  $t_{nj}$  -фиксированный момент начала  $k$ -го взаимодействия в ударной паре  $(n,j)$ , причем  $t_{knj} \in [0, T]$ ;  $\tau_{\lambda nj} = \frac{1}{2} t_{\lambda nj}$  – половина времени взаимодействия в этой паре, определяемая из полученных ранее формул [9, 6 ];  $T$ - периодическая  $\delta$ -функция Дирака  $\delta^T(t)$  (гребенка Дирака) определяется как

$$\delta^T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\omega t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \delta(t - hT); T=2\pi\omega^{-1}. \quad (12)$$

Использование формулы (11) означает, что здесь отыскиваются именно периодические режимы движения в консервативной системе и, кроме того, силы взаимодействия, как и при действии гипотезы о мгновенном ударе, даются уравнениями движения, содержащими сингулярные обобщенные функции. Такие уравнения движения называются сингуляризованными.

В формуле (11)  $J_{\lambda nj}$ -импульс взаимодействия в соответствующей паре:

$$J_{\lambda nj} = \left| \int_0^{t_{\lambda nj}} \lambda \Phi_{nj}[u_{nj}(s)] ds \right|. \quad (13)$$

Из (8) найдем:

$$u_{kq}(t) = \sum_{\kappa=1}^{N_1 - 1} \sum_{q=1}^{N_2 - 1} J_{\lambda nj} \chi_{kq,nj}(t - t_{nj} - \tau_{\lambda nj}). \quad (14)$$

Представление (14) определяет решение через  $2N$  параметров – импульсы взаимодействия и моменты начала взаимодействия. Как и в задачах с мгновенным ударом будем называть его  $2N_{2D}$  - параметрическим представлением [7].

Чтобы определить  $N$  неизвестных параметров движения возьмём условия начала (окончания) взаимодействия:

$$u_{kq}(t_{nj}) \equiv u_{kq}(t_{nj} + t_{\lambda nj}) = \Delta_{nj}, \quad (15)$$

где  $\Delta_{nj}$  - значения зазоров в каждой ударной паре. Здесь  $\Delta_{nj} \equiv \Delta$ . То есть имеем первые  $N$  соотношений, определяющих параметры движения:

$$\Delta = \sum_{\kappa=1}^{N_1 - 1} \sum_{q=1}^{N_2 - 1} J_{\lambda nj} \chi_{kq,nj}(\tau_{\lambda nj}). \quad (16)$$

Еще  $N$  условий могут быть получены исходя из дополнительных соотношений, следующих из (13) и конкретизации гипотез взаимодействия. При рассмотрении консервативной задачи целесообразно привлечение соображений симметрии.

**4. Решетка с четырьмя степенями свободы.** Выведенные соотношения применимы для численного и аналитического анализа систем большой размерности. Чтобы проиллюстрировать эффективность методики, оставаясь в рамках обозримых аналитических решений, рассмотрим квадратную решетку конфигурации « $2 \times 2$ ». Система уравнений движения (2), с учетом условий защемления струн в данном случае имеет вид:

$$\ddot{u}_{11} + c_1(2u_{11} - u_{12}) + c_2(2u_{11} - u_{21}) + \lambda \Phi(u_{11}) = 0; \quad \ddot{u}_{12} + c_1(2u_{12} - u_{11}) + c_2(2u_{12} - u_{22}) + \lambda \Phi(u_{12}) = 0$$

$$\ddot{u}_{21} + c_1(2u_{21} - u_{11}) + c_2(2u_{21} - u_{22}) + \lambda \Phi(u_{21}) = 0; \quad \ddot{u}_{22} + c_1(2u_{22} - u_{12}) + c_2(2u_{22} - u_{21}) + \lambda \Phi(u_{11}) = 0, \quad (17)$$

где гипотезы взаимодействия одинаковы во всех четырех ударных парах.

Даже, несмотря на анизотропию решетки, система (17) обладает многими свойствами симметрии. В работах по теории виброударных систем с распределенными ударными элементами и большим числом ударных пар особую роль играют хлопки [11-13] режимы движения, характеризующиеся синхронными взаимодействиями, локализованными в нескольких, возможно, удаленных друг от друга точках.

Опишем периодические хлопки в решетке, совместив начало взаимодействия (по предположению взаимодействия во всех четырех ударных парах начинаются одновременно) с началом отсчета времени. Из (16) находим:

$$\begin{aligned} \Delta &= J_{11} \chi_{11,11}(\tau_{\lambda 11}) + J_{12} \chi_{11,12}(\tau_{\lambda 12}) + J_{21} \chi_{11,21}(\tau_{\lambda 21}) + J_{22} \chi_{11,22}(\tau_{\lambda 22}); \\ \Delta &= J_{11} \chi_{12,11}(\tau_{\lambda 11}) + J_{11} \chi_{12,12}(\tau_{\lambda 11}) + J_{21} \chi_{12,21}(\tau_{\lambda 21}) + J_{22} \chi_{12,22}(\tau_{\lambda 22}); \\ \Delta &= J_{11} \chi_{21,11}(\tau_{\lambda 11}) + J_{12} \chi_{21,12}(\tau_{\lambda 12}) + J_{21} \chi_{21,21}(\tau_{\lambda 21}) + J_{22} \chi_{21,22}(\tau_{\lambda 22}); \\ \Delta &= J_{11} \chi_{22,11}(\tau_{\lambda 11}) + J_{12} \chi_{22,12}(\tau_{\lambda 12}) + J_{21} \chi_{22,21}(\tau_{\lambda 21}) + J_{22} \chi_{22,22}(\tau_{\lambda 22}). \end{aligned} \quad (18)$$

Величины  $\tau_{\lambda nj}$  определяются от выбранной гипотезы взаимодействия и, следовательно, от импульса взаимодействия. В работах [6, 9, 10] даны определяющие соотношения при выборе гипотезы взаимодействия в виде

$$\lambda \Phi_{nj}(x) = (x - \Delta)^\alpha \eta(x - \Delta), \quad \alpha \geq 1. \quad (19)$$

В распространенном случае гипотезы о линейности нагружения в зоне контакта, когда здесь  $\alpha=1$  показано, что при больших импульсах время взаимодействия не зависит от их значений и величины  $\tau_{\lambda nj}$  оцениваются как:

$$\tau_{\lambda nj} = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}, \quad (20)$$

так что в (18) [(16)] для всех  $n$  и  $j$  можно положить  $\tau_{\lambda nj} \equiv \tau_\lambda = \text{const}(J_\lambda)$ . При отказе от предположения, что импульсы взаимодействия – большие, время взаимодействия становится от них зависимым, однако, эта зависимость оказывается достаточно слабой. Кроме того, при  $\alpha > 1$  всегда  $\tau_{\lambda nj} \equiv \tau_\lambda \neq \text{const}(J_\lambda)$ , но при больших импульсах эта зависимость – также слабая [6, 10].

Симметрия решетки позволяет существенно упростить (16). Все локальные ПФГ [6] в одни и те же моменты времени, в частности, когда  $t = \tau_\lambda$ , равны между собой:

$\chi_{11,11}(\tau_\lambda) = \chi_{12,12}(\tau_\lambda) = \chi_{21,21}(\tau_\lambda) = \chi_{22,22}(\tau_\lambda)$ . Равны и однотипные производные ПФГ:  $\chi_{11,12}(\tau_\lambda) = \chi_{11,21}(\tau_\lambda) = \chi_{12,22}(\tau_\lambda) = \chi_{22,12}(\tau_\lambda)$ ;  $\chi_{11,22}(\tau_\lambda) = \chi_{12,21}(\tau_\lambda)$ ; так как согласно принципу взаимности всегда  $\chi_{kq,nj} = \chi_{nj,kq}$ . Указанные равенства можно получить и аналитически при помощи представлений (9), (10).

Из формулы (7) для собственных частот линейной решетки найдем:

$$\Omega_{11}^2 = \frac{T_1}{\Delta L_1} + \frac{T_2}{\Delta L_2}; \Omega_{12}^2 = \frac{T_1}{\Delta L_1} + \frac{3T_2}{\Delta L_2}; \Omega_{21}^2 = \frac{3T_1}{\Delta L_1} + \frac{T_2}{\Delta L_2}; \Omega_{22}^2 = \frac{3T_1}{\Delta L_1} + \frac{3T_2}{\Delta L_2}, \quad (21)$$

причем для изотропной модели ( $\frac{2T_1}{\Delta L_1} = \frac{2T_2}{\Delta L_2}$ ) формулы (21) упрощаются; ещё большее упрощение происходит в случае квадратных решеток.

Соображения симметрии и приведенные выше соотношения приводят к равенству всех четырех искомым импульсов удара:  $J_{11} = J_{12} = J_{21} = J_{22} \equiv J$ . Величина  $J$  однозначно зависит от полной энергии системы и является интегралом движения. Другой интеграл движения – произвольный момент начала взаимодействия [7]. Из формулы (14) найдем приближенное решение:

$$u_{kq}(t) \equiv u(t) = J[\chi_{11,11}(t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}) + 2\chi_{11,12}(t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}) + \chi_{11,22}(t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}})], \quad (22)$$

Таким образом, например, из первого уравнения (18), принимая во внимание (20) и (22), найдем для больших импульсов:

$$J = \Delta [\chi_{11,11}(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}) + 2\chi_{11,12}(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}) + \chi_{11,22}(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}})]^{-1}. \quad (23)$$

Учитывая гладкость ПФГ  $\chi_{kq,nj}$  внутри интервала периодичности запишем:  $\chi_{kq,nj}(\tau_\lambda) \approx \chi_{kq,nj}(0) + \frac{\pi A}{2\sqrt{\lambda}} \dots$ ,  $A = \text{const}$ . Тогда формулу (23) можно приближенно переписать так:

$$J \approx \Delta [\chi_{11,11}(0) + 2\chi_{11,12}(0) + \chi_{11,22}(0) + \frac{\pi A}{2\sqrt{\lambda}}]^{-1} \approx J_0 - \frac{\pi A}{2\sqrt{\lambda}}, \quad (24)$$

где  $J_0$  – импульс в синхронном хлопке при выполнении гипотезы о мгновенном ударе.

Для анализа решения выпишем представления для фигурирующих в (22) ПФГ. При посредстве (9) и (10) имеем после преобразований для  $t \in [0, T]$ :

$$\begin{aligned} \chi_{11,11}(t) &= \frac{9}{128} \left[ \frac{\cos \Omega_{11}(t - T/2)}{\Omega_{11} \sin(\Omega_{11} T/2)} + \frac{\cos \Omega_{12}(t - T/2)}{\Omega_{12} \sin(\Omega_{12} T/2)} + \frac{\cos \Omega_{21}(t - T/2)}{\Omega_{21} \sin(\Omega_{11} T/2)} + \frac{\cos \Omega_{22}(t - T/2)}{\Omega_{22} \sin(\Omega_{22} T/2)} \right]; \\ \chi_{11,12}(t) &= \frac{9}{128} \left[ \frac{\cos \Omega_{11}(t - T/2)}{\Omega_{11} \sin(\Omega_{11} T/2)} + \frac{\cos \Omega_{12}(t - T/2)}{\Omega_{12} \sin(\Omega_{12} T/2)} - \frac{\cos \Omega_{21}(t - T/2)}{\Omega_{21} \sin(\Omega_{11} T/2)} - \frac{\cos \Omega_{22}(t - T/2)}{\Omega_{22} \sin(\Omega_{22} T/2)} \right]; \\ \chi_{11,22}(t) &= \frac{9}{128} \left[ \frac{\cos \Omega_{11}(t - T/2)}{\Omega_{11} \sin(\Omega_{11} T/2)} - \frac{\cos \Omega_{12}(t - T/2)}{\Omega_{12} \sin(\Omega_{12} T/2)} - \frac{\cos \Omega_{21}(t - T/2)}{\Omega_{21} \sin(\Omega_{11} T/2)} + \frac{\cos \Omega_{22}(t - T/2)}{\Omega_{22} \sin(\Omega_{22} T/2)} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Для моментов времени  $t$ , лежащих вне полуинтервала  $[0, T]$  необходимо пользоваться либо представлением ПФГ в виде ряда Фурье, либо иными способами записи в конечном виде [6]. Внося (25) в (22), находим

$$u(t) = J \left[ \frac{27}{128} \frac{\cos \Omega_{11}(t - \tau_\lambda - T/2)}{\Omega_{11} \sin(\Omega_{11} T/2)} + \frac{9}{64} \frac{\cos \Omega_{12}(t - \tau_\lambda - T/2)}{\Omega_{12} \sin(\Omega_{12} T/2)} - \frac{9}{64} \frac{\cos \Omega_{21}(t - \tau_\lambda - T/2)}{\Omega_{21} \sin(\Omega_{21} T/2)} \right]; \tau_\lambda = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}. \quad (26)$$

Представление (26) сохраняет силу при  $0 < t - \tau_\lambda \leq T$ , а при других значениях  $t$  нуждается в продолжении по периодичности. Из формул (23), (25) и, например, из первого уравнения (18), находим:

$$J = \Delta \left[ \frac{27}{128} \frac{\cos \Omega_{11}(\tau_\lambda + T/2)}{\Omega_{11} \sin(\Omega_{11} T/2)} + \frac{9}{64} \frac{\cos \Omega_{12}(\tau_\lambda + T/2)}{\Omega_{12} \sin(\Omega_{12} T/2)} - \frac{9}{64} \frac{\cos \Omega_{21}(\tau_\lambda + T/2)}{\Omega_{21} \sin(\Omega_{21} T/2)} \right]^{-1}. \quad (27)$$

Формулы (26), (27) вместе с (21) определяют  $2N_2D$  – параметрическое представления для  $T$  – периодических хлопков в синхронно взаимодействующей, в соответствии с выбранной гипотезой удара, анизотропной решетке с четырьмя узлами. Данная форма колебаний характеризуется одинаковыми видами прогибов  $u_{kq}$  для всех значений индексов.

Рассмотрим случай изотропной квадратной решетки, когда  $N_1 = N_2$  в (21)  $T_1/\Delta L_1 \approx T_2/\Delta L_2$  и  $\Omega_{12} \approx \Omega_{21}$ . Представление (26), (27) упрощается:

$$u(t) = JB\chi_{11}(t - \tau_\lambda); J = \Delta / B\chi_{11}(\tau_\lambda); \tau_\lambda = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}; B = \frac{27}{64}, \quad (28)$$

где  $0 < t - \tau_\lambda \leq T$  и использована формула (10) при  $\alpha = \beta = 1$

При  $\tau_\lambda = 0$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) (28) становится аналогичным соответствующему представлению для классического ударного осциллятора [12]. После преобразования можно найти:

$$u(t) = \Delta \frac{\cos \Omega_{11}(t - \tau_\lambda - T/2)}{\cos \Omega_{11}(\tau_\lambda + T/2)}; 0 < t - \tau_\lambda \leq T, \quad (29)$$

причем при  $\tau_\lambda = 0$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) решение в точности отвечает решению для случая гипотезы о мгновенном ударе.

Можно показать, что в общей системе (4), (3) существуют аналогичные формы режимов движения. На рис. 3 показан профиль решетки в момент реализации хлопка конечной продолжительности в решетке «4×4». Здесь же показаны модели

демпфирующих элементов при взаимодействии: общего вида, как в уравнении (2) и в частном случае модели демпфера сухого трения (см. ниже).

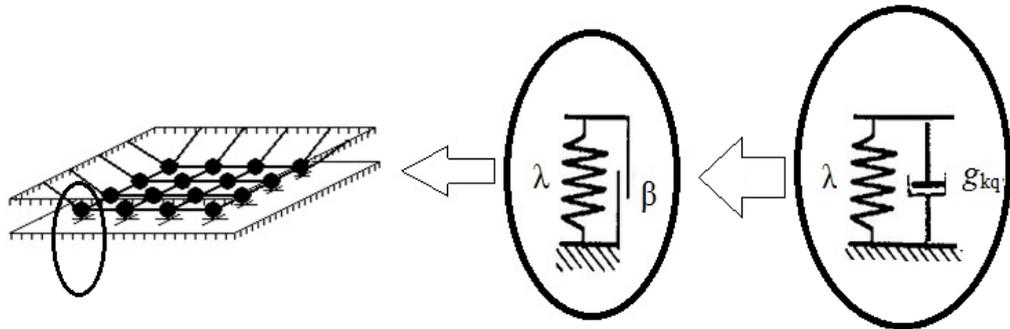


Рис.3

На рис. 4 показан характер зависимости  $J(\omega)$  для рассматриваемого случая. Легко увидеть, что график аналогичен получаемому для ударного осциллятора [6, 12]. На рисунке отмечены частоты  $\Omega_0 \approx \Omega_{11}$ ;  $\Omega^0 \approx 2\Omega_{11}$  (при больших  $\lambda$ ).

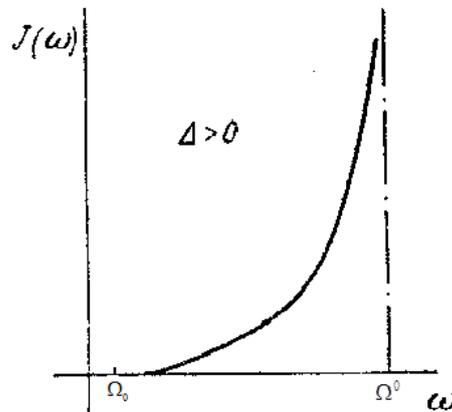


Рис.4

Характер функции прогиба  $u(t)$  дан на рис. 5.

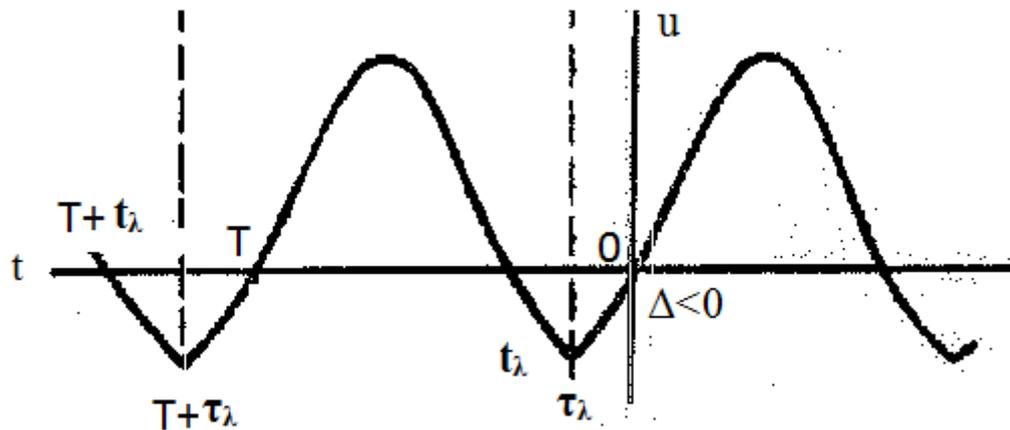


Рис. 5

Появление приведенных зависимостей говорит об аналогиях между режимами движения решетчатой конструкции и ударным осциллятором при любой корректной гипотезе взаимодействия (явления затягиваний по частоте и амплитуде, жесткого запуска, срыва хлопков и др. [6, 12]). В случае обращения к гипотезам немгновенного взаимодействия получаем необходимые количественные поправки практически при любой гипотезе, а также возможность использовать более реалистические модели ударной диссипации (см. ниже).

Найденный периодический режим, очевидно, не единственен. Заметим, впрочем, что во многих аналогичных исследованиях была показана особая роль именно режимов движения типа хлопков, что оказывается связанным с их резонансным характером.

Описание других типов периодических режимов представляет собой самостоятельную проблему. При обращении к двухстороннему симметричному взаимодействию появляется возможность построить аналитические представления для симметричных форм хлопков любого порядкового номера (во многом аналогичные построения проделаны в работе [13]).

**5. Резонансные режимы.** Вернемся к исходным уравнениям (2), считая нашу квадратную решетку изотропной. Предположим, что в зоне контакта на взаимодействующие тела действует сила сухого трения. Пусть, в виду малости времени взаимодействия  $\beta = O(1)$ . Кроме того, установим соотношение между большим ( $\lambda$ ) и малым ( $\varepsilon$ ) параметрами:  $(\lambda)^{-0.5} = O(\varepsilon)$ . Предположим также, что решетка вибрирует в вязкой среде с коэффициентом демпфирования  $2\varepsilon b$ , и колебания возбуждаются синусоидальными силами. Вместо (2) получаем ( $m=1$ ):

$$\ddot{u}_{kq} + c(4u_{kq} - u_{k-1,q} - u_{k+1,q} - u_{k,q-1} - u_{k,q+1}) - \lambda \Phi_{kq}(u_{kq}) + \beta(\text{sign } \dot{u}_{kq})\eta(u_{kq} - \Delta) = -2\varepsilon b \dot{u}_{kq} + \varepsilon P_{kq} \cos(\omega_0 t + \varphi_{kq}).$$

При анализе этой задачи с граничными условиями (3) рассмотрим синфазные резонансные режимы, под которыми понимаются режимы движения близкие к описанным выше периодическим режимам соответствующей консервативной системы. В предположении, малости уровней сил возбуждения и диссипации при реализации резонансных режимов происходит взаимная компенсация работ этих сил на периодическом движении. Такое понимание резонансного режима было принято, в частности, в [6, 12].

Рассмотрим основные резонансы. Частоты  $\omega_0 \in ]\Omega_{11}, 2\Omega_{11}[$  - промежутку существования синхронных хлопков. Предположим, что все внешние воздействия  $P_{kq}(t) = \varepsilon P_{kq} \cos(\omega_0 t + \varphi_{kq})$  - синфазные и имеют близкие амплитуды, то есть для всех  $k$  и  $q$   $\varphi_{kq} = \varphi$ ;  $P_{kq} = P$ .

Обозначим режимы (28) [(29)] при  $\omega = \omega_0$ :  $u^{(0)}(\omega_0; t)$ . Таким образом, в данном случае для всех  $k$  и  $q$  приближенно полагается:

$$u_{kq}(t) \approx u^{(0)}(\omega_0; t) + \dots \quad (30)$$

Импульс взаимодействия  $J^{(0)}(\omega_0)$  дается при помощи второго соотношения (28), когда  $\omega = \omega_0$ . Предположение, о больших импульсах согласуется с представлением о резонансном характере движения. Считая, что начало взаимодействия совпадает с началом отсчета времени, полагаем, что фаза  $\varphi$  - неизвестна. Для её нахождения запишем уравнение баланса работ неконсервативных сил на движении  $\dot{u}^{(0)}(\omega_0; t)$  за период  $T_0$ :

$$\int_0^{T_0} \{ \beta [\text{sign } \dot{u}^{(0)}(\omega_0; t)] \eta [ \dot{u}^{(0)}(\omega_0; t) - \Delta ] + 2\varepsilon b \dot{u}^{(0)}(\omega_0; t) - \varepsilon P \cos(\omega_0 t + \varphi) \} \dot{u}^{(0)}(\omega_0; t) dt = 0. \quad (31)$$

Строго говоря, такое соотношение должно выписываться для всех координат  $u_{kq}$ . Сделанные предположения позволили обойтись только уравнением (31) для фазы  $\varphi$ . Несмотря на свою громоздкость, полные выражения могут быть легко получены. После преобразований и вычисления необходимых квадратур находим с учетом обозначения, введенного в формуле (28):

$$\frac{8\beta}{T} B [\chi_{11}(\tau_\lambda) - \chi_{11}(0)] + \frac{\varepsilon b}{\sin^2(1/2 \Omega T_0)} J^{(0)}(\omega_0) \left( 1 - \frac{\sin \Omega T_0}{\Omega T_0} \right) = \frac{2\omega_0^2 P \sin \omega_0 (\varphi + \tau_\lambda)}{\pi(\omega_0^2 - \Omega^2)}, \quad (32)$$

откуда определяются два значения фазы, одно из которых отвечает неустойчивому режиму и условие существования резонансного режима (31) ( $|\sin \omega(\varphi + \tau_\lambda)| \leq 1$ ). Имеем:

$$\left| \frac{\pi(\omega^2 - \Omega^2)}{2P\omega_0^2} \left[ \frac{\omega_0 \beta}{\pi \sqrt{\lambda}} B + \frac{\varepsilon b}{\sin^2(1/2 \Omega T_0)} J^{(0)}(\omega_0) \left( 1 - \frac{\sin \Omega T_0}{\Omega T_0} \right) \right] \right| \leq 1.$$

### 6. Заключительные замечания.

**А.** Уравнение (32) позволяет определить при необходимости некое эффективное значение коэффициента восстановления, исходя из принятой здесь гипотезы сухого трения и теоремы Карно. Подобные соотношения могут иметь место и для других гипотез контактной диссипации.

**Б.** Рассмотрение высших форм хлопков рассмотренного типа возможно, вероятно, только для систем с двусторонними симметричными ограничителями. Отметим, что само понятие нелинейных форм колебаний связано с определенными свойствами симметрии системы.

**В.** Подобная методика применима для отыскания субгармонических и комбинационных синхронных резонансных режимов. Но, как и для задачи, рассмотренной выше, проблема устойчивости может решаться вполне корректно только численно.

Г. Большая часть упрощений и допущений, сделанных выше, принципиальна только для избежания громоздких финальных соотношений.

**Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда  
(проект №15-19-30026).**

### Список литературы

1. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. 272 с.
2. Крупенин В.Л. Анализ сингуляризованных уравнений движения решетчатых виброударных 2D-систем при отказе от гипотезы Ньютона // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. №2. С. 20-26.
3. Крупенин В.Л. Виброударные процессы в решетчатых двумерных конструкциях//Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. №2. С. 13-22.
4. Крупенин В.Л. Вибрационные и виброударные процессы в машинных конструкциях, собранных из решетчатых составляющих//Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. №6. С.11-18.
5. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара.– М.: Наука. 1976. 328 с.
6. V.I. Babitsky, V.L. Krupenin Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. 404 p.p.
7. Крупенин В. Л. О представлении периодических виброударных процессов через параметры движения "импульс-фаза" // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 1. С. 34-42
8. Крупенин В. Л. О колебаниях систем с большими упругими силами порогового типа // Изв. АН СССР. МТТ.1983. №4. С. 76-84.
9. Крупенин В. Л. Расчет механизмов с пороговыми нелинейностями методом сингуляризации // Машиноведение. 1984. № 1. С. 6-12.
10. Крупенин В.Л. Виброударные процессы в семействе упругих систем с взаимодействующими граничными элементами посредством неньютоновских ударов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 4. С. 10 -20.

*Дата поступления статьи: 15 декабря 2015 года.*