УДК 534.11

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ШИРОКИМ КЛАССОМ УСЛОВИЙ НА ДВИЖУЩИХСЯ ГРАНИЦАХ

© Владислав Львович Литвинов, Валерий Николаевич Анисимов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Самарский государственный технический университет" СамГТУ, Самара, Россия

vladlitvinov@rambler.ru, anisimov170159@mail.ru

Аннотация. *Описан аналитический метод решения волнового уравнения с условиями, заданными на движущихся границах. С помощью замены переменных в системе функциональных уравнений исходная краевая задача сведена к системе дифференциально - разностных уравнений с одним постоянным смещением, которая может быть решена с помощью интегрального преобразования Лапласа. Получено выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n-ой динамической моде в случае граничных условий, отличных от условий первого рода. Данный метод позволяет рассмотреть более широкий класс граничных условий по сравнению с другими аналитическими методами решения краевых задач с движущимися границами.*

Ключевые слова: *волновое уравнение, колебания систем с движущимися границами, законы движения границ, амплитуда колебаний.*

ANALYTICAL METHOD OF SOLVING WAVE EQUATION WITH A WIDE RANGE OF CONDITIONS FOR A MOVING BOUNDARY

© Vladislav L. Litvinov, Valeriy N. Anisimov

Samara State Technical University, Samara, Russia

Abstract*. The analytical method of solving the wave equation with the conditions, assigned on the moving boundaries, is described. With the aid of the replacement of variables in the system of functional equations initial boundary-value problem is brought to the system of differential - difference equations with one fixed bias, which can be solved with the aid of the integral transform of Laplace. An expression for the amplitude of the vibrations corresponding to the n-th mode if the dynamic boundary conditions different from the conditions of the first kind. This method makes it possible to examine the broader class of boundary conditions in comparison with other analytical methods of solving the boundary-value problems with the moving boundaries.*

Key words: *wave equation, variations of systems with moving boundaries, laws of boundary moving, the amplitude of oscillation.*

Одномерные системы, границы которых движутся, широко распространены в технике (канаты грузоподъемных установок [1], гибкие звенья передач [2] и т.д.). Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем, поэтому здесь в основном используются приближенные методы решения [3,4]. Из аналитических методов наиболее эффективным является метод, предложенный в [5], который заключается в подборе новых переменных, останавливающих границы и оставляющих уравнение инвариантным. В [6] решение ищется в виде суперпозиции двух волн, бегущих навстречу друг другу. В результате этого автору удалось решить волновое уравнение с граничными условиями, отличными от условий первого рода, заданными на одной движущейся и одной неподвижной границах. Эффективен также метод, используемый в [7], заключающийся в замене геометрической переменной на чисто мнимую переменную, что позволяет свести волновое уравнение к уравнению Лапласа и применить для решения методику теории функций комплексного переменного.

Решения, полученные с помощью перечисленных методов, ограничены граничными условиями первого рода. К недостаткам методов относится также то, что в случае двух движущихся границ начальные условия, заданные при $t = 0$, не могут быть учтены.

Перечисленных недостатков лишен развиваемый в данной статье метод решения таких задач, в котором удачно сочетается методика используемая в [5,6].

Пусть движение системы описывается волновым уравнением

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau) - U_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0 \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\begin{gathered} U(\ell_1(\tau),\tau) = F_1(\tau);\ \ \ell_1(0) = 0; \\ U_\xi(\ell_2(\tau),\tau) = F_2(\tau);\ \ell_2(0) = 1;\ \ell_2(\tau) > \ell_1(\tau) \end{gathered} \tag{2}$$

и начальных условиях

$$U(\xi,0) = \Phi_0(\xi);\ \ U_\tau(\xi,0) = \Phi_1(\xi). \tag{3}$$

Здесь τ,ξ безразмерное время $(\tau \ge 0)$ и безразмерная пространственная координата $(\ell_1(\tau) \le \xi \le \ell_2(\tau))$; $\ell_1(\tau), \ell_2(\tau)$ законы движения границ; $\Phi_0(\xi), \Phi_1(\xi), F_1(\tau), F_2(\tau)$ заданные функции, допускающие разрывы первого рода.

Для решения задачи используем представление Даламбера. Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$U(\xi,\tau) = g(\tau+\xi) + G(\tau-\xi), \tag{4}$$

где $g(y)$ и $G(y)$ произвольные функции, которые необходимо определить из начальных и граничных условий, $y-$ независимая переменная.

Подставляя решение (4) в граничные (2) и начальные (3) условия, соответственно получим

$$\begin{cases} g(\tau+\ell_1(\tau)) + G(\tau-\ell_1(\tau)) = F_1(\tau); \\ g'(\tau+\ell_2(\tau)) - G'(\tau-\ell_2(\tau)) = F_2(\tau); \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} g(\xi) + G(-\xi) = \Phi_0(\xi),\ 0 \le \xi \le 1; \\ g'(\xi) + G'(-\xi) = \Phi_1(\xi),\ 0 \le \xi \le 1. \end{cases} \tag{6}$$

Из системы (6) найдем функции $g(\xi)$ и $G(\xi)$:

$$\begin{cases} g(\xi) = \dfrac{1}{2}[\Phi_0(\xi) + \displaystyle\int_0^\xi \Phi_1(\zeta)d\zeta],\ 0 \le \xi \le 1; \\ G(\xi) = \dfrac{1}{2}[\Phi_0(-\xi) + \displaystyle\int_0^\xi \Phi_1(-\zeta)d\zeta],\ -1 \le \xi \le 0. \end{cases} \tag{7}$$

В отличие от метода А.И. Весницкого [5], где в дифференциальном уравнении вводятся новые переменные, останавливающие границы и оставляющие уравнение инвариантным, для упрощения задачи введем в систему (5) новые функции

$$g'(y) = r(\varphi(y));\ G'(y) = R(\psi(y)). \tag{8}$$

После преобразований система уравнений (5) примет вид

$$\begin{cases} r\left(\varphi(\tau+\ell_1(\tau))\right)+R\left(\psi(\tau-\ell_1(\tau))\right)=F_1'(\tau); \\ r\left(\varphi(\tau+\ell_2(\tau))\right)-R\left(\psi(\tau-\ell_2(\tau))\right)=F_2(\tau). \end{cases} \qquad (9)$$

Введем обозначения в первом уравнении системы (9)

$$\varphi(\tau+\ell_1(\tau))=z;\ \psi(\tau-\ell_1(\tau))=z$$

и во втором уравнении этой системы

$$\varphi(\tau+\ell_2(\tau))=z;\ \psi(\tau-\ell_2(\tau))=z-1.$$

Если функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \varphi(\tau+\ell_1(\tau))=\psi(\tau-\ell_1(\tau)); \\ \varphi(\tau+\ell_2(\tau))=\psi(\tau-\ell_2(\tau))+1, \end{cases} \qquad (10)$$

то система (9) примет вид

$$\begin{cases} r(z)+R(z)=\theta_1'(z); \\ r(z)-R(z-1)=\theta_2(z), \end{cases} \qquad (11)$$

где $\theta_1'(z)=F_1'(0,5\bar{\varphi}(z)+0,5\bar{\psi}(z));\ \theta_2(z)=F_2(0,5\bar{\varphi}(z)+0,5\bar{\psi}(z-1))$.

Здесь $\bar{\varphi}(z), \bar{\psi}(z)$ функции, обратные к $\varphi(y)$ и $\psi(y)$.

Заметим, что из системы (10) функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ определяются с точностью до константы в том смысле, что если $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ решение системы (10), то $\varphi(y)+C$ и $\psi(y)+C$ также являются решением (здесь $C-$ произвольная постоянная). Поэтому для определенности можно выбрать такую функцию $\psi(y)$, что $\psi(-1)=-1$. При этом из второго уравнения системы (10) при $\tau=0$ следует, что $\varphi(1)=0$. Из первого уравнения системы (10) при $\tau=0$ получим $\varphi(0)=\psi(0)$.

С учетом замены (8) начальные условия (6) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} &r(z)=g'(\bar{\varphi}(z));\quad \varphi(0)\le z\le 0; \\ &R(z)=G'(\bar{\psi}(z));\ -1\le z\le\psi(0), \end{aligned} \qquad (12)$$

где функции $g(y)$ и $G(y)$ определяются выражениями (7).

Таким образом, начальная задача (1)-(3) сведена к системе дифференциально-разностных уравнений (11) с одним постоянным смещением при начальных условиях (12).

Из первого уравнения системы (11) получим

$$R(z)=\theta_1'(z)-r(z). \qquad (13)$$

После подстановки (13) во второе уравнение (11) будем иметь

$$r(z)+r(z-1)=\theta(z), \qquad (14)$$

где $\theta(z)=\theta_2(z)+\theta_1'(z-1)$.

С учетом того, что функция $\theta_1(z)$ на интервале $[-1,\varphi(0)]$ равна нулю [8], начальные условия для уравнения (14) будут иметь следующий вид:

$$r(z)=\begin{cases} -R(z),\ -1\le z\le\varphi(0); \\ r(z),\ \varphi(0)\le z\le 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Таким образом, задача сведена к решению разностного уравнения (14) при начальных условиях (15).

Для решения полученной задачи используем интегральное преобразование Лапласа

$$\bar{r}(p)=\int_0^\infty r(z)e^{-pz}dz.$$

В результате получим:

$$r(z)=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{z}\theta(\zeta)\cos[k_n(z-\zeta)]d\zeta+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-1}^{0}r(\zeta)\cos[k_n(z-\zeta)]d\zeta, \tag{16}$$

где $k_n=\pi(2n-1)$.

Нас интересует только функция напряжений

$$U_{\xi}(\xi,\tau)=r(\varphi(\tau+\xi))-R(\psi(\tau-\xi)). \tag{17}$$

Рассмотрим свободные колебания, когда $\theta_1(z)=\theta_2(z)=0$.

В этом случае из (17) с учетом (16) и (13) получим:

$$U_{\xi}(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n^*(\xi,\tau),$$

где

$$V_n^*(\xi,\tau)=\cos\left\{\frac{k_n}{2}\left[\varphi(\tau+\xi)-\psi(\tau-\xi)\right]\right\}\times$$

$$\left(A_n^*\cos\left\{\frac{k_n}{2}\left[\varphi(\tau+\xi)+\psi(\tau-\xi)\right]\right\}+B_n^*\sin\left\{\frac{k_n}{2}\left[\varphi(\tau+\xi)+\psi(\tau-\xi)\right]\right\}\right); \tag{18}$$

$$A_n^*=4\int_{-1}^{0}r(\zeta)\cos(k_n\zeta)d\zeta;\ B_n^*=4\int_{-1}^{0}r(\zeta)\sin(k_n\zeta)d\zeta.$$

Заметим, что в случае граничных условий вида (2) роль динамических мод, характеризующих форму колебаний, играют функции

$$\cos\left\{\frac{k_n}{2}\left[\varphi(\tau+\xi)-\psi(\tau-\xi)\right]\right\}.$$

Точка $\xi=\xi_0(\tau)$, соответствующая максимальному размаху колебания напряжений, находится из уравнения

$$\cos\left\{\frac{k_n}{2}\left[\varphi(\tau+\xi)-\psi(\tau-\xi)\right]\right\}=\pm1.$$

Перейдем к рассмотрению вынужденных колебаний при нулевых начальных условиях. В этом случае из (17) с учетом (16) и (13) получим:

$$U_{\xi}(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(\xi,\tau)+D(\xi,\tau), \tag{19}$$

где

$$V_n(\xi,\tau)=\cos\left\{\frac{k_n}{2}\left[\varphi(\tau+\xi)-\psi(\tau-\xi)\right]\right\}\times$$

$$\times\left(\cos\left\{\frac{k_n}{2}\left[\varphi(\tau+\xi)+\psi(\tau-\xi)\right]\right\}4\int_{0}^{\psi(\tau-\xi)}\theta(\zeta)\cos(k_n\zeta)d\zeta+\right.$$

$$\left.+\sin\left\{\frac{k_n}{2}\left[\varphi(\tau+\xi)+\psi(\tau-\xi)\right]\right\}4\int_{0}^{\psi(\tau-\xi)}\theta(\zeta)\sin(k_n\zeta)d\zeta\right); \tag{20}$$

$$D(\xi,\tau)=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\psi(\tau-\xi)}^{\varphi(\tau+\xi)}\theta(\zeta)\cos[k_n(\varphi(\tau+\xi)-\zeta]d\zeta-\theta_1(\psi(\tau-\xi)).$$

Заметим, что последнее выражение представляет собой ряд Фурье для функции

$$D(\xi,\tau)=\begin{cases}-\theta_1(\psi(\tau-\xi)),\ \xi=\ell_1(\tau);\\ \theta(\varphi(\tau+\xi))-\theta_1(\psi(\tau-\xi)),\ \ell_1(\tau)<\xi\le\ell_2(\tau).\end{cases}$$

Как отмечалось в [8], функцией $D(\xi,\tau)$ в выражении (19) можно пренебречь. Тогда вынужденные колебания представляют собой суперпозицию колебаний, соответствующих различным динамическим модам.

Если $\theta(z) = B\cos W(\tau)$, то после соответствующих преобразований полную амплитуду колебаний на n-ной динамической моде в точке $\xi = \xi_0(\tau)$ можно записать в виде

$$A_n^2(\tau) = 4B^2\left\{\left[\int_0^{b(\tau)} \cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_0^{b(\tau)} \sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}, \qquad (21)$$

где $b(\tau) = \psi(\tau - \xi_0(\tau))$; $\Phi_n(\zeta) = k_n\zeta - W(\zeta)$.

Заметим, что возможность решения задачи (1)-(3) зависит от степени сложности граничных условий, а также от того, сможем ли мы решить систему (10). Для решения таких систем в [5] использован обратный метод, т.е. по заданным $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из получающейся системы уравнений находятся законы движения границ $\ell_1(\tau)$ и $\ell_2(\tau)$. При задании функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в них вводится несколько произвольных постоянных. Зависимость найденных законов движения $\ell_1(\tau)$ и $\ell_2(\tau)$ от величин этих констант позволяет аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи.

Совокупность обратных решений достаточно широка. Приводимые ниже решения удовлетворяют соотношениям:

$$\ell_1(0) = 0;\ \ell_2(0) = 1;\ \psi(-1) = -1.$$

Множество полученных законов движения границ разбито на классы:

1. Решения, приведенные в таблице 1, относятся к классу А, когда левая граница неподвижна и $\varphi(z) = \psi(z)$. Решения под номерами 1 - 6 приведены в работах [5, 8], решение 7 получено впервые.

Таблица 1

	$l_2(\tau)$	$\varphi(z) = \psi(z)$
1	$v\tau + 1$	$\frac{Ln\left[(vz+1)/(1-v)\right]}{Ln\left[(1+v)/(1-v)\right]} - 1$
2	$\sqrt{B\tau + B^2}\ /\lvert B\rvert$	$\sqrt{Bz + B + 0,25} -$ $- \sqrt{B^2 - B + 0,25} - 1$
3	$1/(4B\tau + 1)$	$Bz^2 + 0,5z - B - 0,5$
4	$\frac{1}{\alpha} arcsh\left[\frac{0,5}{B_1e^{\alpha\tau} - B_2e^{-\alpha\tau}}\right]$	$B_1(e^{\alpha z} - e^{-\alpha}) + B_2(e^{-\alpha z} - e^{\alpha}) - 1,$ $B_1 = B_2 + 1/(e^{\alpha} - e^{-\alpha}), \quad \alpha > 0$
5	$\sqrt{(\tau + B)^2(\alpha^2 - 1) + 1 + 2\alpha B + B^2} - \alpha(\tau + B)$	$\frac{Ln\left[(z+B)^2 + 1 + 2\alpha B + B^2\right]}{Ln\left[(1+\alpha)/(1-\alpha)\right]} -$ $\frac{Ln\left[(B-1)^2 + 1 + 2\alpha B + B^2\right]}{Ln\left[(1+\alpha)/(1-\alpha)\right]} - 1$

6	$\frac{1}{\alpha}\left[-d+\sqrt{1+d^2+(\alpha\tau+B)^2}\right]$, $d=\frac{1+B^2-\alpha^2}{2\alpha}$	$\frac{arctg(\alpha z+B)}{arcctg\left[(1+B^2-\alpha^2)/(2\alpha)\right]}-\frac{arctg(B-\alpha)}{arcctg\left[(1+B^2-\alpha^2)/(2\alpha)\right]}-1$
7	$\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1+4A^2e^{2\alpha\tau}}}{2A}\right)-\tau$	$Ae^{\alpha z}+B,\ \alpha=\ln\frac{1+\sqrt{1+4A^2}}{2A}$

Решение под номером один в таблице 1 может быть использовано при изучении колебаний канатов грузоподъемных установок при равномерном подъеме (спуске) [1,4].

2. Следующий класс B определяется тем, что границы движутся по одинаковому закону:

$$\ell_1(\tau)=\ell(\tau);\ \ell_2(\tau)=1+\ell(\tau);\ \ell(0)=0.$$

Поскольку движение границ взаимосвязано, то между функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ также существует взаимосвязь. Она выражается функциональным уравнением:

$$\varphi(\overline{\varphi}(\psi(z))+1)-\psi(z-1)=1. \qquad (22)$$

Система (10) в данном случае может удовлетворяться только функциями, которые являются решениями уравнения (22). Приведем два решения класса B:

1) $\ell=v\tau;\ \varphi(z)=(1-v)z/2+(1+v)/2-1;$
$\psi(z)=(1+v)z/2+(1+v)/2-1;$

2) $\ell(\tau)=\frac{1}{\alpha}\ln[(Be^{-\alpha\tau}-Ce^{\alpha\tau})/(B-C)];$
$\varphi(z)=B(e^{-\alpha z}-1)-C(e^{-\alpha}-1)-1;\ B=C+1/(e^{-\alpha}-1);$
$\psi(z)=C(e^{\alpha z}-1)-C(e^{-\alpha}-1)-1.$

Данные решения могут быть использованы при изучении колебаний гибких звеньев передач [2].

3. Для решений класса C границы движутся симметрично в разные стороны, т.е.

$$\ell_1(\tau)=-\ell(\tau);\ \ell_2(\tau)=\ell(\tau).$$

Уравнение взаимосвязи функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ здесь имеет вид:

$$\varphi(z)=\psi(z)+0,5$$

Решения класса C получаются из решений класса A по следующим формулам:

$$\ell(\tau)=\ell_A(\tau);\ \psi(z)=\frac{1}{2}\psi_A(z);\ \varphi(z)=\psi(z)+0,5,$$

где с индексом A обозначены соответствующие функции решений класса A.

4. Решение класса D получено для случая, когда обе границы движутся равномерно:

$$\ell_1(\tau)=(B_2-B_1)\tau/(B_2+B_1);\ \ell_2(\tau)=(B_2e^{1/c}-B_1)\tau/(B_1+B_2e^{1/c})+1;$$
$$\varphi(z)=C\ Ln(B_1z+D)-C\ Ln(D-B_2)-1;$$
$$\psi(z)=C\ Ln(B_1z+D)-C\ Ln(D-B_2)-1;$$
$$D=(B_1+B_2e^{1/c})/(e^{1/c}-1).$$

Приведенная методика позволяет получить выражение для амплитуды колебаний, соответствующих *n*-ой динамической моде для широкого класса краевых условий:

$$U(\ell_1(\tau),\tau)=F_1(\tau);U(\ell_2(\tau),\tau)=F_2(\tau); \quad (23)$$

$$U_\xi(\ell_1(\tau),\tau)=F_1(\tau);U_\xi(\ell_2(\tau),\tau)=F_2(\tau); \quad (24)$$

$$U_\tau(\ell_1(\tau),\tau)=F_1(\tau);U_\tau(\ell_2(\tau),\tau)=F_2(\tau); \quad (25)$$

$$U_\tau(\ell_1(\tau),\tau)=F_1(\tau);U_\xi(\ell_2(\tau),\tau)=F_2(\tau); \quad (26)$$

$$U(\ell_1(\tau),\tau)=F_1(\tau);U_\xi(\ell_2(\tau),\tau)=F_2(\tau); \quad (27)$$

$$U(\ell_1(\tau),\tau)=F_1(\tau);U_\tau(\ell_2(\tau),\tau)=F_2(\tau). \quad (28)$$

Полученные результаты сведем в таблицу 2.

Таблица 2

<table>
<tr><td>Вид граничных условий</td><td>$U(\ell_1(\tau),\tau);$
$U(\ell_2(\tau),\tau)$</td><td>$U_\xi(\ell_1(\tau),\tau);$
$U_\xi(\ell_2(\tau),\tau)$</td><td>$U_\tau(\ell_1(\tau),\tau);$
$U_\xi(\ell_2(\tau),\tau)$</td><td>$U(\ell_1(\tau),\tau);$
$U_\xi(\ell_2(\tau),\tau)$</td><td>$U_\tau(\ell_1(\tau),\tau);$
$U_\tau(\ell_2(\tau),\tau)$</td><td>$U(\ell_1(\tau),\tau);$
$U_\tau(\ell_2(\tau),\tau)$</td></tr>
<tr><td>Замена переменных</td><td>$g(y)=r(\varphi(y));$
$G(y)=R(\psi(y))$</td><td>$g'(y)=r(\varphi(y));$
$G'(y)=-R(\psi(y))$</td><td colspan="4">$g'(y)=r(\varphi(y));$
$G'(y)=R(\psi(y))$</td></tr>
<tr><td>Разностное уравнение</td><td colspan="2">$r(z)-r(z-1)=\theta(z)$</td><td colspan="2">$r(z)+r(z-1)=\theta(z)$</td><td colspan="2">$r(z)-r(z-1)=\theta(z)$</td></tr>
<tr><td>Функция $\theta(z)$</td><td colspan="2">$\theta(z)=\theta_2(z)-\theta_1(z-1)$</td><td>$\theta(z)=\theta_2(z)+$
$+\theta_1(z-1)$</td><td>$\theta(z)=\theta_2(z)+$
$+\theta_1'(z-1)$</td><td>$\theta(z)=\theta_2(z)-$
$-\theta_1(z-1)$</td><td>$\theta(z)=\theta_2(z)-$
$-\theta_1'(z-1)$</td></tr>
<tr><td>Начальные условия</td><td colspan="6">$r(z)=\begin{cases}-R(z), -1\le z\le\varphi(0);\\ r(z), \varphi(0)\le z\le 0\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Общее решение</td><td>$U(\xi,\tau)=$
$=r(\varphi(\tau+\xi))+$
$+R(\psi(\tau-\xi)).$</td><td>$U_\xi(\xi,\tau)=$
$=r(\varphi(\tau+\xi))+$
$+R(\psi(\tau-\xi)).$</td><td colspan="4">$U_\xi(\xi,\tau)=r(\varphi(\tau+\xi))-R(\psi(\tau-\xi)).$</td></tr>
<tr><td>Форма колебаний (мода)</td><td colspan="2">$\sin\left\{\pi n\left[\varphi(\tau+\xi)-\psi(\tau-\xi)\right]\right\}$</td><td colspan="2">$\cos\left\{\frac{k_n}{2}\left[\varphi(\tau+\xi)-\psi(\tau-\xi)\right]\right\}$</td><td colspan="2">$\cos\left\{\pi n\left[\varphi(\tau+\xi)-\psi(\tau-\xi)\right]\right\}$</td></tr>
<tr><td>Полная амплитуда</td><td colspan="6">$A_n^2(\tau)=4B^2\left\{\left[\int_0^{b(\tau)}\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int_0^{b(\tau)}\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}$</td></tr>
<tr><td>Функции $\Phi_n(\zeta), b(\tau)$</td><td colspan="2">$\Phi_n(\zeta)=2\pi n\zeta-W(\zeta);$
$b(\tau)=\psi(\tau-\xi_0(\tau))$</td><td colspan="2">$\Phi_n(\zeta)=k_n\zeta-W(\zeta);$
$b(\tau)=\psi(\tau-\xi_0(\tau))$</td><td colspan="2">$\Phi_n(\zeta)=2\pi n\zeta-W(\zeta);$
$b(\tau)=\psi(\tau-\xi_0(\tau))$</td></tr>
</table>

Насколько известно, решения волнового уравнения при граничных условиях (26) – (28) другими известными аналитическими методами не получались.

Список литературы

1. *Савин Г.Н., Горошко О.А.* Динамика нити переменной длины // Наук.думка, Киев, 1962, 332 стр.

2. *Самарин Ю.П., Анисимов В.Н.* Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. вузов. Машиностроение, 1986, (12), 17-21.

3. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки», 2009, 1 (18), 149-158.
4. *Горошко О.А., Савин Г.Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины // Наук. думка, Киев, 1971, 270 стр.
5. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками // Физматлит, М., 2001, 320 стр.
6. *Весницкий А.И.* Обратная задача для одномерного резонатора изменяющего во времени свои размеры // Изв. вузов. Радиофизика, 1971, (10), 1538-1542.
7. *Барсуков К.А., Григорян Г.А.* К теории волновода с подвижными границами // Изв.вузов. Радиофизика, 1976, (2), 280-285.
8. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009, 131 стр.
9. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки», 2012, 3 (28), 145-151.
10. *Лежнева А.А.* Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – №1. – С. 159-161.

Дата поступления статьи: 28 февраля 2016 года.