

УДК 534.1

**ФРИКЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ШАЙБЫ,  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ЖЕСТКИМ СТЕРЖНЕМ,  
ВРАЩАЮЩИМСЯ С ПОСТОЯННОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТЬЮ**

© Владимир Иванович Ерофеев, Владимир Владимирович Кажяев

*Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия*[erf04@sinn.ru](mailto:erf04@sinn.ru)

**Аннотация.** *Исследуются автоколебания в круглой деформируемой шайбе, взаимодействующей с вращающимся жестким стержнем. Показано, что собственные частоты системы неэквидистантны, а внутреннее трение в материале шайбы, описываемое моделью Фойхта, ограничивает спектр частот возбуждаемых колебаний. За счет фрикционного механизма в шайбе возбуждаются квазигармонические автоколебания с ограниченным спектром.*

**Ключевые слова:** *фрикционные автоколебания, вращение, деформируемая шайба, жесткий стержень.*

**SELF-EXCITED FRICTIONAL OSCILLATIONS OF A DEFORMABLE  
WASHER, INTERACTING WITH A RIGID ROD ROTATING WITH  
CONSTANT ANGULAR VELOCITY**

© Vladimir I. Erofeev, Vladimir V. Kazhaev

*Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,  
Nizhny Novgorod, Russia.*[erf04@sinn.ru](mailto:erf04@sinn.ru)

**Abstract.** *Explores self-oscillations in circular deformable washer, interacting with a rotating rigid rod. It is shown that the natural frequencies of the system neviditelny and internal friction in the material of the washers, described by Voigt model, limits the frequency spectrum of the excited oscillations. Due to the friction of the washer mechanism in the excited quasi-harmonic self-oscillations with a limited range.*

**Key words:** *frictional self-oscillations, rotation, deformable washer, hard rod.*

**Введение**

Автоколебания, представляющие собой (согласно [1]) незатухающие колебания в диссипативных динамических системах с нелинейными обратными связями, поддерживающиеся за счет энергии постоянных, то есть непериодических внешних воздействий, часто наблюдаются в природе и технике, и поэтому находятся в центре внимания исследователей уже многие годы.

Среди автоколебаний важное место в технических системах занимают те, которые генерируются при трении – фрикционные автоколебания [2]. Обзор работ по изучению динамических процессов, обусловленных трением, можно найти в [3].

Если общую теорию автоколебаний в системах с сосредоточенными параметрами можно считать достаточно хорошо развитой [4-12], то для распределенных систем этого сказать нельзя. Лишь в [13-15] рассмотрены некоторые задачи теории автоколебаний распределенных систем.

В настоящей работе исследуются особенности возбуждения автоколебаний в круглой деформируемой шайбе, взаимодействующей с вращающимся жестким стержнем.

### Постановка задачи

Внутри однородной деформируемой круглой шайбы с внутренним диаметром  $R_1$ , и внешним диаметром  $R_2$  вращается жесткий стержень с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Шайба жестко закреплена по внешнему диаметру рис. 1.

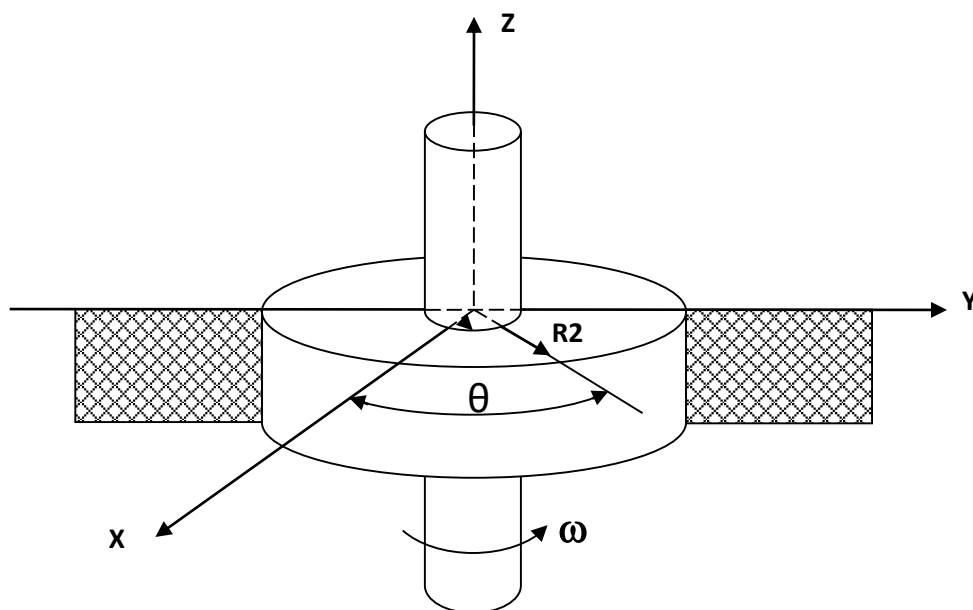


рис. 1.

Будем исследовать процессы деформации в шайбе в рамках плоской задачи линейной теории упругости, которая в полярных координатах  $(r, \theta)$  описывается системой уравнений [16]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \\ \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho$  - плотность материала шайбы,  $u_r(\theta, r, t)$  и  $u_\theta(\theta, r, t)$  - радиальные и окружные смещения соответственно (рис. 2),  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  - нормальные напряжения,  $\tau_{r\theta}$  - касательные напряжения.

Напряжения, деформации и перемещения связаны следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta^{(1)} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta), \\ \tau_{r\theta}^{(1)} &= \mu \gamma_{r\theta}, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \\ \gamma_{r\theta} &= 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $E$  - модуль Юнга,  $\mu, \nu$  - константы упругости, индекс 1 – означает упругую компоненту напряжения. Полное напряжение в вязкоупругом материале можно представить в виде суммы упругой  $\sigma_{ij}^{(1)}$  и диссипативной  $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$  компоненты напряжения [17]:

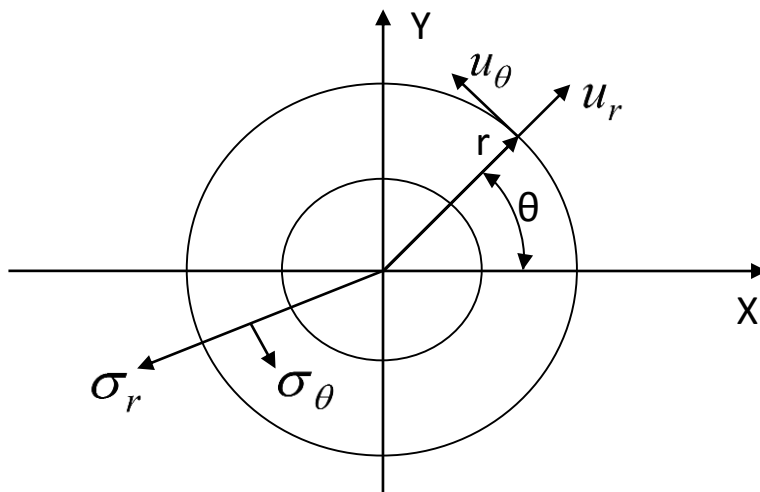


Рис. 2.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(\alpha)}; \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^{(1)} + \tau_{r\theta}^{(\alpha)} \quad (3)$$

Для вязкоупругого материала Фойхта диссипативные компоненты тензора напряжения выражаются через производные от  $\sigma_i$  и  $\tau_{r\theta}$  следующим образом

$$\sigma_i^\alpha = \eta \frac{\partial}{\partial t} \sigma_i^{(1)}, \tau_{r\theta}^\alpha = \eta \frac{\partial}{\partial t} \tau_{r\theta}^{(1)} \quad (4)$$

Считаем, что по внешнему диаметру ( $2R_2$ ) шайба жестко закреплена, т.е.

$$u_r|_{r=R_2} = 0 \quad (5)$$

$$u_\theta|_{r=R_2} = 0 \quad (6)$$

а по внутреннему диаметру ( $2R_1$ ) она обжимает стержень

$$\sigma_r|_{r=R_1} = 0 \quad (7)$$

где  $\sigma_0$  - напряжение обжатия. Между стержнем и шайбой действует момент сил сухого трения  $M_{TP}$ , зависящий от разности скоростей проскальзывания контактирующих поверхностей стержня ( $V_b = \omega R_1 t$ ) и шайбы ( $V_w = \frac{\partial u_\theta}{\partial t}$ )

$$\left[ \tau_{r\theta} = -M_{TP} \left( \omega R_1 t - \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right) \right]_{r=R_1} \quad (8)$$

Зависимость  $M_{TP}$  от скорости проскальзывания поверхностей имеет тот же характер, что и в классической работе А.А. Витта [18].

Осевая симметрия шайбы позволяет предполагать независимость компонент перемещений ( $u_\theta, u_r$ ) от угловой координаты « $\theta$ ». В радиальном же направлении считаем процессы квазистатическими. Это приводит к тому, что радиальная компонента смещения ( $u_r$ ), является функцией только координаты « $r$ » (т.е.  $\frac{\partial}{\partial t} u_r \equiv 0$ ). В силу этих предположений

краевая задача (1)-(8), записанная в перемещениях, расщепляется на две независимые задачи. Одна из них, статическая

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_r}{r} \right) = 0 \quad (9)$$

$$u_r|_{r=R_2} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu \frac{u_r}{r} \right) \Big|_{r=R_1} = \sigma_0 \quad (11)$$

описывает радиальные деформации и напряжения в шайбе, а другая, динамическая

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right) + \eta \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (12)$$

$$u_\theta|_{r=R_2} = 0 \quad (13)$$

$$\left[ \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = -M_{TP} \left( \omega R_1 t - \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right) \right]_{r=R_1} \quad (14)$$

описывает сдвиговые колебания шайбы.

### Решение статической задачи

Задача (9)-(11) подобна задаче Ламе о нахождении напряженного состояния круглой трубы под действием внешнего и внутреннего давления [17]. Его решение имеет вид

$$u_r(r) = \frac{\sigma_0 (1-\nu^2) R_1^2}{E[(\nu-1)-(1+\nu)(R_1/R_2)^2]} \frac{1-(r/R_2)^2}{r} \quad (15)$$

где  $R_1 \leq r \leq R_2$ . Так как физические компоненты напряжений ( $\sigma_r, \text{физ} = \sigma_r$ ;  $\sigma_\theta, \text{физ}$ ), то

$$\sigma_r = \sigma_0 \frac{(\nu-1)-(1+\nu)(r/R_2)^2}{(\nu-1)-(1+\nu)(R_1/R_2)^2} \quad (16) \quad \sigma_\theta = \sigma_0 \frac{(\nu-1)+(1+\nu)(r/R_2)^2}{(\nu-1)-(1+\nu)(R_1/R_2)^2} \quad (17)$$

Из (16) следует, что материал шайбы испытывает сжатие вдоль радиальных направлений, величина которого уменьшается по мере приближения к внешнему радиусу. В то же время в азимутальном (окружном:  $r = \text{const}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) направлении материал находится под действием растягивающих напряжений  $\sigma_\theta(r)$ . Эти зависимости показаны на рис. 3 для различных материалов: сталь  $\nu = 0,3$ ; медь  $\nu = 0,25$ ; резина  $\nu = 0,5$ .

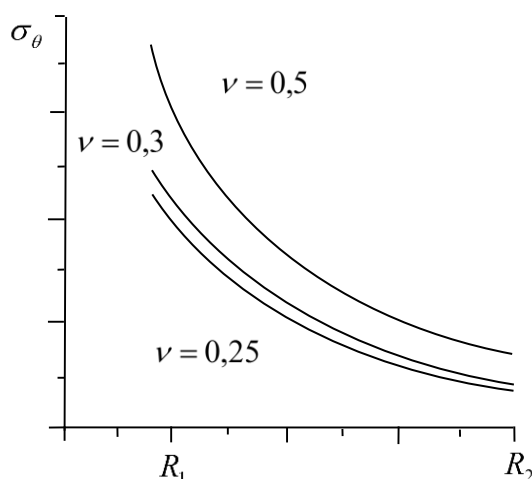


Рис. 3.

### Динамическая задача

Сдвиговые автоколебания шайбы описываются нелинейной краевой задачей (12)-(14). Вблизи точки перегиба, где  $M_{TP} = 0$ , момент силы трения представим кубическим полиномом по степеням  $\partial u / \partial t$  и имеет падающий участок [18]

$$M_{TP} \left( \omega R_1 t - \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right) = M_0 - M_1 u_{\theta t} + M_3 u_{\theta t}^3 \quad (18)$$

Введем новые безразмерные переменные

$$t_H = \sqrt{\mu / \rho} \cdot t / R, \quad r_H = r / R_1, \quad 1 \leq r \leq R_2 / R_1$$

и новую искомую функцию  $\psi(r, t)$

$$u_\theta = \psi(r, t) - \frac{M_0 R_1^2}{2 \mu R_2^2} \frac{r^2 - R_2^2}{r} \quad (19)$$

Здесь последнее слагаемое описывает статическое распределение сдвиговых смещений  $\frac{M_0 R_1^2}{2 \mu R_2^2} \frac{r^2 - R_2^2}{r}$ , которые возникают из-за наличия постоянной составляющей в моменте трения, а  $\psi(r, t)$  описывает сдвиговые колебания около этого состояния равновесия

$$\psi_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial r} (\psi_r + \psi / r) + \varepsilon \frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} (\psi_r + \psi / r) \quad (20)$$

$$\psi|_{r=R} = 0 \quad (21)$$

$$\left[ (\psi_r + \psi / r) = (\alpha \psi_t - \beta \psi_t^3) \right]_{r=1} \quad (22)$$

где  $\varepsilon = h R_1 / \sqrt{\mu / \rho}$ ,  $\alpha = M_1 / \sqrt{\mu / \rho}$ ,  $\beta = M_3 \sqrt{\mu / \rho}$

### Собственные функции и собственные значения динамической задачи.

Остановимся более подробно на анализе собственных функций и собственных значений краевой задачи без учета внутреннего трения и фрикционного взаимодействия ( $\varepsilon = 0$ ,  $\alpha = \beta = 0$ ). Ниже будет показано, что неконсервативные слагаемые в первом приближении не вносят поправок в реальную часть собственных частот колебаний шайбы.

Решение (20)-(22) будем искать в виде ряда по собственным функциям соответствующей линейной консервативной задачи.

Собственные функции и собственные значения для (20)-(22) являются решением задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} r^2 X''(r) + rX'(r) + (\lambda^2 r^2 - 1)X(r) &= 0 \\ X'(1) - X(1) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Общее решение (23) есть линейная суперпозиция функций Бесселя I-ого и II-ого рода первого порядка  $J_1(\lambda r)$ ,  $Y_1(\lambda r)$ .

$$X(r) = C_1 J_1(\lambda r) + C_2 Y_2(\lambda r) \quad (24)$$

Нетривиальное решение (24), удовлетворяющее граничным условиям, приводит к спектральному уравнению

$$\lambda = \frac{J_1(\lambda R)Y_1'(\lambda) - Y_1(\lambda R)J_1'(\lambda)}{J_1'(\lambda R)Y_1'(\lambda) - Y_1'(\lambda R)J_1'(\lambda)} \quad (25)$$

Аналитическое решение этого уравнения неизвестно. В таблице приведены величины первых 5-ти собственных значений, вычисленных для различных отношений внутреннего и внешнего радиусов шайбы  $\Delta R = R_2 / R_1$ .

Таблица

$\Delta R \setminus \lambda_i$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0,1	2,4	5,2	8,4	11,1	14,3
0,5	2,2	4,5	7,0	9,1	14,9
1,0	1,8	3,6	8,1	9,9	14,4
5,0	0,2	0,5	1,7	2,2	2,7
10,0	0,1	0,3	0,6	0,9	1,2

### Энергетические оценки ширины спектра автоколебаний

Как известно, наличие внутреннего трения приводит к частотно-зависимому затуханию упругих волн  $\sim \omega^2$  [19]. Поэтому в спектре автоколебаний могут присутствовать только такие спектральные составляющие, для которых потери энергии из-за внутреннего трения (декремент колебаний) меньше притока энергии за счет работы сил «отрицательного» трения во фрикционном контакте (инкремент колебаний). Колебания системы на частотах, не удовлетворяющих этому условию, естественным образом затухают и их можно не учитывать в дальнейшем анализе. Условия самовозбуждения системы находятся из рассмотрения линеаризованной задачи (19)-(21) при  $\beta = 0$ .

$$\psi_{tt} = \frac{\partial}{\partial r}(\psi_r + \psi / r) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial r \partial t}(\psi_r + \psi / r) \quad (26)$$

$$\psi|_{r=R} = 0 \quad (27)$$

$$[\psi_r - \psi / r = \alpha \psi_t]_{r=1} \quad (28)$$

### Инкремент системы

Для определения инкремента системы, отвечающего за вклад в энергию колебаний системы фрикционным механизмом, воспользуемся уравнением баланса энергии. Умножая (26) на  $\psi_t$  и проводя соответствующую группировку слагаемых, получим уравнение переноса энергии (уравнение Умова-Пойнтинга [20].)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial r} + \varepsilon r \psi_t (\psi_r + \psi / r) \quad (29)$$

где  $W = \frac{r}{2} (\psi_t^2 + (\psi_r - \psi / r)^2)$  - плотность энергии системы,  $S = r \psi_t (\psi_r - \psi / r)$  - плотность потока энергии.

Проинтегрируем (29) по пространственной переменной « $r$ » с учетом граничных условий (27) (28). В результате получим уравнение изменения полной энергии системы

$$\frac{d}{dt} W = S \Big|_{r=1} + \varepsilon \int_1^R r \psi_t (\psi_r + \psi / r) dr \quad (30)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения баланса энергии (30) описывает приток энергии за счет работы сил «отрицательного» трения на границе  $r = 1$ , а второе – потери энергии в материале шайбы. При определении изменения энергии системы за счет работы сил сухого трения на границе, можно положить  $\varepsilon = 0$ . В этом случае из (30) следует

$$S \Big|_{r=1} = \alpha \psi_t^2 \Big|_{r=1}$$

или

$$\frac{d}{dt} W(t) = \alpha W(t) \quad (31)$$

Энергия системы, в соответствии с (31), растет по экспоненциальному закону  $W \sim e^{\alpha t}$  независимо от частоты колебаний. Показатель экспоненты  $\alpha$  является энергетическим инкрементом колебаний, амплитудный же инкремент соответственно равен  $\alpha / 2$ .

#### Декремент системы

При определении декремента затухания, отвечающего за частотно-зависимое поглощение энергии материалом шайбы, не будем учитывать источники энергии на границе (т.е. положим  $\alpha = 0$ ). В (25) подставим решение

$$\psi = e^{i\omega t} X(\lambda r) \quad (32)$$

где  $X(\lambda r)$ ,  $\lambda$  - собственная функция и собственное значение соответственно, удовлетворяющее (22). После несложных преобразований получаем комплексное уравнение для определения частоты колебаний  $\omega$

$$\omega^2 = \lambda^2 + i\varepsilon\omega\lambda^2 \quad (33)$$

Будем искать его решение в виде разложения по степеням  $\varepsilon$

$$\omega = \omega_1 + \varepsilon\omega_2 + \dots \quad (34)$$

Ограничиваясь членами порядка  $\varepsilon$  из (33), (34) имеем

$$\omega_1^2 = \lambda^2; \quad \omega_2 = +i\lambda^2 / 2$$

или

$$\omega = \lambda + i\varepsilon\lambda^2 / 2 \quad (35)$$

Отсюда следует, что диссипативное слагаемое не вносит в первом приближении поправок в действительную часть частоты. Мнимая же часть является декрементом затухания  $\varepsilon\lambda^2 / 2$  и амплитуда волны (32) убывает как  $e^{-\varepsilon\lambda^2 t / 2}$ .

Превышение инкремента системы над декрементом

$$\alpha \geq \varepsilon\lambda^2 \quad (36)$$

является условием самовозбуждения системы, при этом автоколебания будут происходить только с теми спектральными составляющими  $\lambda_i$ , которые удовлетворяют (36).

#### Определение амплитуды стационарных автоколебаний

Амплитуда стационарных автоколебаний определяется решением исходного уравнения (19), удовлетворяющего граничным условиям (20) и (21). В автоколебательной системе периодические движения существуют лишь с определенными амплитудами, соответствующими равенству притока энергии за счет работы сил «отрицательного» трения и величины нелинейных диссипативных потерь во фрикционном механизме. Как известно, в системах с кубической нелинейностью имеет место мягкий режим возбуждения автоколебаний [12]. В этом режиме может быть лишь одна стационарная амплитуда. Следуя приближенному методу, описанному в [8], будем искать решение в виде

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots \quad (37)$$

где  $\psi_0$  - одно из решений для консервативной системы, удовлетворяющее уравнению (19) при  $\varepsilon = 0$  и граничным условиям, соответствующим (22).

$$\psi_0 = A \left( J_1(\lambda r) - \frac{J_1(\lambda r)}{Y_1(\lambda r)} Y_1(\lambda r) \right) \sin \lambda t \quad (38)$$

Здесь амплитуду  $A$  надо подобрать так, чтобы она была близка к амплитуде предельного цикла. В этом случае малая поправка  $\varepsilon\psi_1$  и члены, соответствующие более высоким приближениям, не должны возрастать со временем (т.е. отсутствуют секулярные слагаемые). Подставляя (38) в (19)-(21) для первой поправки, получим

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} (\psi_{1r} + \psi_1 / r) = -\varepsilon \lambda^3 A \left( J_1''(\lambda r) - \frac{J_1(\lambda r)}{Y_1(\lambda r)} Y_1''(\lambda r) \right) \cos \lambda t \quad (39)$$

$$\psi|_{r=R} = 0 \quad (40)$$

$$[\psi_{1r} + \psi_1 / r]_{r=1} = -\varepsilon \lambda A X(1) (\alpha \cos \lambda t - \beta \lambda^2 A^2 X^2(1) \cos^3 \lambda t) \quad (41)$$

где  $X(1)$  - значения собственной функции при  $r = 1$ . Уравнения возмущений (39)-(41) имеют вид уравнений, описывающих динамику системы, на которую действуют внешние периодические силы. В выражения для этих сил входят компоненты с частотами  $\lambda$  и  $3\lambda$ . Так как спектр частот неэквивалентен (см. таблицу) то компонента силы, зависящая от частоты, не является резонансной и не создает в системе движения с заметной амплитудой, поэтому этой составляющей силы можно пренебречь. Тогда краевое условие (41) примет вид

$$[\psi_{1r} + \psi_1 / r]_{r=1} = -\lambda A X(1) (\alpha - 3/4 \beta \lambda^2 A^2 X^2(1)) \cos \lambda t \quad (42)$$

Таким образом, на консервативную систему с соответственной частотой действует сила резонансной частоты, приводящая к появлению секулярных слагаемых в решении (37). Стационарное (ограниченное) решение в данном случае возможно лишь при выполнении условия ортогональности  $\psi_0$  и  $\psi_1$  (т.к.  $\psi_0$  изменяется по закону  $\sin \lambda t$ , то, следовательно,  $\psi_1$  должна изменяться по закону  $\cos \lambda t$ ).

Пусть

$$\psi_1 = V(r) \cos \lambda t \quad (43)$$

подстановка (43) в (39) дает

$$\frac{\partial}{\partial r} (V_r + V / r) + \lambda^2 V = A \lambda^3 X''(r) \quad (44)$$

Частное решение неоднородного уравнения (44) имеет вид

$$V(r) = A \lambda \frac{r}{2} X(r) \quad (45)$$

где функция  $X(r)$  удовлетворяет граничному условию (40). Подставляя (43) в (42) с учетом (45) получим выражение



$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r}{2} X(r) \right)_{r=1} - \frac{X(1)}{2} = -X(1) (\alpha - 3/4 \beta \lambda^2 A^2 X^2(1)) \quad (46)$$

которое является уравнением для определения амплитуды фрикционных автоколебаний шайбы

$$A^2 = \frac{4\alpha}{3\lambda^2 \beta X^2(1)} \quad (47)$$

Возвращаясь к (38) видим, что закон сдвиговых одночастотных автоколебаний шайбы имеет вид

$$\psi(r, t) \approx \psi_0 + \psi_1 = \sqrt{\frac{4\alpha}{3\lambda^2 \beta X^2(1)}} \left( \sin \lambda t + \varepsilon \frac{\lambda r}{2} \cos \lambda t \right) \left( J_1(\lambda r) - \frac{J_1(\lambda R)}{Y_1(\lambda R)} Y_1(\lambda r) \right) \quad (48)$$

где  $\lambda$  - одно из собственных значений удовлетворяющее условию возбуждения (36). Из (48) следует, что амплитуда автоколебаний уменьшается обратно пропорционально частоте.

Поскольку в реальной системе всегда присутствует флуктуационные возмущения, то, в конечном итоге, на каждой частоте, удовлетворяющей условию возбуждения, установится автоколебание, описываемое (48). Так как из неэквидистантности спектра эти автоколебания не взаимодействуют друг с другом, то, пользуясь (48), можно записать установившийся многочастотный режим автоколебаний шайбы:

$$\psi(r, t) = \sqrt{\frac{4\alpha}{3\beta}} \sum_{i: \alpha \geq \varepsilon \lambda_i} \frac{1}{\lambda_i X_i(1)} \left( \sin \lambda_i t + \varepsilon \frac{\lambda_i r}{2} \cos \lambda_i t \right) X_i(r) \quad (49)$$

где  $\lambda_i$  -  $i$ -ая собственная функция (см. (23)).

Работа выполнялась при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-08-01836).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физика. Большой энциклопедический словарь / Гл.ред. А.М. Прохоров. – 4-е изд. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. С.83-85.
2. Крагельский И.В., Гитис Н.В. Фрикционные автоколебания. М.: Наука, 1987. 183 с.
3. Martins J.A.C., Oden J.T., Simoes F.M.E. A study of static and kinetic friction // Int. J. Engng. Sci., 1990. Vol. 28. No 1. P. 29-92.
4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
5. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
6. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. М.: Гостехиздат, 1952.
7. Харкевич А.А. Автоколебания. М.: Гостехиздат. 1953.
8. Основы теории колебаний / Под ред. В.В. Мигулина. –М.: Наука, 1978. 392 с.
9. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти томах. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И.И. Блехмана. М.: Машиностроение, 1979. 350 с.
10. Magnus K. Schwingungen. Stuttgart: Teubner-Verlag. 1961. 251 p.
11. Jenkins A. Self-oscillation // Physics Reports. 2013. Vol. 525. No 2. P. 167-222.
12. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Издательская группа URSS. 2016. 360 с.
13. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Издательская группа URSS. 2015. 320 с.
14. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит. 2002. 208 с.

15. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В. Хаотические фрикционные автоколебания упругого слоя, контактирующего с движущимся полупространством // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 4. С. 3-7.
16. Аминзаде Ю.А. Теория упругости. –М.: Высшая школа, 1976, 274 с.
17. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
18. Витт А.А. К теории скрипичной струны // Журнал технической физики. 1936. Т.6. С.1459.
19. Постников В.С. Внутреннее трение в металлах. –М.: Металлургия, 1974, 350 с.
20. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит. 2001. 320 с.

*Дата поступления статьи: 10 февраля 2016 года.*