

УДК 534.11

## ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ СТРУНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

© Владислав Львович Литвинов, Валерий Николаевич Анисимов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Самарский государственный технический университет"

СамГТУ, Самара, Россия

[vladlitvinov@rambler.ru](mailto:vladlitvinov@rambler.ru), [anisimov170159@mail.ru](mailto:anisimov170159@mail.ru)

**Аннотация.** С помощью метода Канторовича - Галеркина находится приближенное решение задачи о поперечных колебаниях струны с движущейся границей, лежащей на упругой подложке. Учитываются внешние силы сопротивления движению струны. Решение получено с точностью до величин второго порядка малости относительно малого параметра, характеризующего медленный характер движения границы. Приводятся количественные характеристики для амплитуды колебаний при установившемся резонансе и при прохождении через резонанс. Резонансные явления исследуются для наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения гармонического характера действуют на движущейся границе.

**Ключевые слова:** колебания систем с движущимися границами, установившийся резонанс, прохождение через резонанс, упругое основание, сопротивление среды.

## INVESTIGATION OF RESONANCE CHARACTERISTICS STRING VARIABLE LENGTH ON AN ELASTIC FOUNDATION WITH CONSIDERING THE INFLUENCE OF THE RESISTANCE FORCES ENVIRONMENTAL

© Vladislav L. Litvinov, Valeriy N. Anisimov

Samara State Technical University, Samara, Russia

**Abstract.** Using the method of Kantorovich - Galerkin is located approximate solution of the problem of transverse vibrations of a string with a moving boundary lying on elastic substrate. Taking into account the external forces of resistance to movement of the string. The solution is obtained up to the second order in the small parameter characterizing the slow of the movement of the border. Found quantitative characteristics of the vibration amplitude at steady resonance and the passage through resonance. Resonance phenomena are investigated for the most common case in practice, when external disturbances acting on the moving boundary.

**Key words:** fluctuations in systems with moving boundaries, steady resonance, passage through resonance, elastic base, environmental resistance.

Многие элементы машиностроительных конструкций с движущимися границами (железнодорожная контактная сеть [1,2], ленточные конвейеры [3] и т.д.) рассматриваются в виде одномерной системы, взаимодействующей с деформируемым основанием. Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем [4]. Точные методы решения ограничены волновым уравнением и сравнительно простыми граничными условиями [5-7]. Из приближенных методов наиболее эффективен метод Канторовича – Галеркина, описанный в работах [8-10]. Данный метод позволяет учитывать действие на систему сил сопротивления [11] и жесткость подложки.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания струны, лежащей на упругом основании с учетом влияния сил сопротивления среды, имеет вид

$$\rho Z_{tt}(x,t) - TZ_{xx}(x,t) + \lambda Z_t(x,t) + k_0 Z(x,t) = 0, \quad (1)$$

где  $\rho$  – линейная плотность массы струны,  $T$  – сила натяжения струны,  $\lambda$  – сила сопротивления среды, действующая на единицу длины струны при единичной скорости поперечного движения,  $k_0$  – жесткость подложки;  $Z(x,t)$  – поперечное смещение точки струны с координатой  $x$  в момент времени  $t$ .

Рассмотрим граничные условия с возмущением гармонического вида на движущейся границе:

$$Z(0,t) = 0; \quad Z(l_0(t),t) = B \cos W_0(\omega_0 t). \quad (2)$$

Здесь  $l_0(t) = L_0 + v_0 t$  – закон движения правой границы;  $L_0$  – начальная длина струны;  $v_0$  – скорость движения границы;  $W_0(z)$  – функция класса  $C^1$ ;  $B, \omega_0$  – постоянные величины (в случае действия гармонического возмущения  $\omega_0$  является частотой этого возмущения).

Введем в задачу (1), (2) безразмерные переменные:

$$\xi = \omega_0 x / a; \quad \tau = \omega_0 t + (\omega_0 L_0 - a) / v_0$$

и новую функцию

$$Z(x,t) = B e^{-\alpha \tau} U(\xi, \tau), \quad (3)$$

где

$$a = \sqrt{T / \rho}; \quad \alpha = \lambda / (2\omega_0 \rho).$$

Тогда, после преобразований получим:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \beta^2 U(\xi, \tau) = 0; \quad (4)$$

$$U(0, \tau) = 0; \quad U(l(\varepsilon\tau), \tau) = e^{\alpha\tau} \cos W(\tau). \quad (5)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \quad \varepsilon = v_0 / a; \quad \beta^2 = \alpha^2 - \frac{k_0}{\rho\omega_0^2};$$

$$W(\tau) = W_0(\tau + \gamma_0); \quad \gamma_0 = (a - \omega_0 L_0) / v_0.$$

Чтобы применить метод Канторовича-Галеркина, необходимо преобразовать граничные условия к однородным. Для этого введём новую функцию согласно методике, изложенной в [8]:

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau),$$

где  $V(\xi, \tau)$  удовлетворяет уравнению

$$[V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau)]_{\tau\tau} - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \beta^2 [V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau)] = 0 \quad (6)$$

и граничным условиям

$$V(0, \tau) = 0; \quad V(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0, \quad (7)$$

а  $H(\xi, \tau)$  находится как решение следующей задачи:

$$H_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (8)$$

$$H(0, \tau) = 0; \quad (9)$$

$$H(l(\varepsilon\tau), \tau) = e^{\alpha\tau} \cos W(\tau). \quad (10)$$

Из уравнения (8) и условий (9), (10) нетрудно получить, что

$$H(\xi, \tau) = \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau). \quad (11)$$

Уравнение (6) с учетом (11) примет следующий вид:

$$\left[ V(\xi, \tau) + \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau) \right]_{\tau\tau} - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \beta^2 \left[ V(\xi, \tau) + \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau) \right] = 0. \quad (12)$$

В дальнейшем предполагается, что  $\varepsilon$  имеет небольшой порядок малости по сравнению с единицей. Это является необходимым условием применения метода Канторовича-Галеркина [8]. При  $\varepsilon = 0$  метод дает точное решение задачи (12), (7).

Возьмем собственные функции в виде

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \sin \frac{\pi n \xi}{l(\varepsilon\tau)}.$$

Данная функция является собственной функцией задачи (12), (7) в случае неподвижных границ.

Согласно методу Канторовича-Галеркина будем искать решение в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau). \quad (13)$$

Подставляя  $n$ -ый член ряда (13) в уравнение (12), получим:

$$\left[ f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau) \right]_{\tau\tau} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2(\varepsilon\tau)} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) - \beta^2 \left[ f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau) \right] = 0. \quad (14)$$

Функцию  $f_n(\tau)$  будем определять из условия ортогональности левой части уравнения (14) с функцией  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  на интервале  $[0, l(\varepsilon\tau)]$ . В этом случае будем иметь:

$$\int_0^{l(\varepsilon\tau)} \left[ f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau) \right]_{\tau\tau} X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi + A_{n1}(\varepsilon\tau) f_n(\tau) \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) - \beta^2 e^{\alpha\tau} \cos W(\tau) \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_n(\xi, \varepsilon\tau) \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} d\xi = 0, \quad (15)$$

где

$$A_{n1}(\varepsilon\tau) = \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) d\xi = \frac{l(\varepsilon\tau)}{2}; \quad \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) = \frac{\pi^2 n^2}{l^2(\varepsilon\tau)} - \beta^2.$$

Введем в уравнение (15) новую функцию

$$f_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau) y_n(\tau) + Q_n(\varepsilon\tau) e^{\alpha\tau} \cos W(\tau),$$

где

$$Q_n(\varepsilon\tau) = -\frac{1}{A_{n1}(\varepsilon\tau)} \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_n(\xi, \varepsilon\tau) \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} d\xi = \frac{2(-1)^n}{\pi n};$$

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{l(\varepsilon\tau)}.$$

Функция  $y_n(\tau)$  с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  удовлетворяет уравнению

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = M_n(\varepsilon\tau)e^{\alpha\tau} \cos W(\tau). \quad (16)$$

Здесь используются следующее обозначение:

$$M_n(\varepsilon\tau) = -2(-1)^n \pi n l^{-\frac{3}{2}}(\varepsilon\tau).$$

Два линейно независимые решения однородного уравнения соответствующего (16) имеют вид

$$y_{1n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \sin w_n(\tau); \quad y_{2n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau).$$

Применяя метод малого параметра [12], с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  получим следующие формулы для функций  $a_n(\varepsilon\tau)$  и  $w_n(\tau)$ :

$$a_n(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad w_n(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon} \left[ S(\varepsilon\tau) - \frac{1}{2} \ln \frac{1+S(\varepsilon\tau)}{1-S(\varepsilon\tau)} \right];$$

$$S(\varepsilon\tau) = \sqrt{1 - \beta^2(1 + \varepsilon\tau)^2 / (\pi^2 n^2)}.$$

После преобразований с учётом (3) получим формулу амплитуды колебаний, соответствующих  $n$ -ной динамической моде [8]:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[ \int_0^\tau F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^\tau F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$E_n^2(\tau) = \frac{e^{-2\alpha\tau}}{4l(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta);$$

$$F_n(\zeta) = -2\pi n(-1)^n e^{\alpha\zeta} / \sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\zeta)l^3(\varepsilon\zeta)}.$$

Установившийся резонанс в рассматриваемой системе наблюдается, если

$$W(\zeta) = w_n(\zeta) + \gamma,$$

где  $\gamma$  – постоянная величина.

Амплитуда при этом имеет вид

$$A_n(\tau) = \frac{\pi n e^{-\alpha\tau}}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)}} \int_0^\tau \frac{e^{\alpha\zeta}}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\zeta)l^3(\varepsilon\zeta)}} d\zeta.$$

Численное исследование этого равенства показывает, что при уменьшении длины струны ( $\varepsilon < 0$ ) амплитуда колебаний непрерывно возрастает. При увеличении длины ( $\varepsilon > 0$ ) амплитуда сначала возрастает, достигая некоторого максимального значения, потом начинает убывать. Результаты исследований сведем в таблицу.

**Таблица** - Зависимость максимальной амплитуды от  $\alpha$  и  $\varepsilon$  при  $k_0 = 0$

$\alpha \backslash \varepsilon$	0,001	0,005	0,010	0,100	0,200
0,00	1000	201	101	10,1	5,1
0,05	51,3	27,1	20,1	5,4	3,3

0,1	31,5	17,3	13,4	4,2	2,7
-----	------	------	------	-----	-----

Исследуем явление прохождения через резонанс, возникающее в струне под действием силы постоянной частоты, т.е.  $W(\tau) = \tau$ , что в исходной системе соответствует действию силы постоянной частоты  $\omega_0$ .

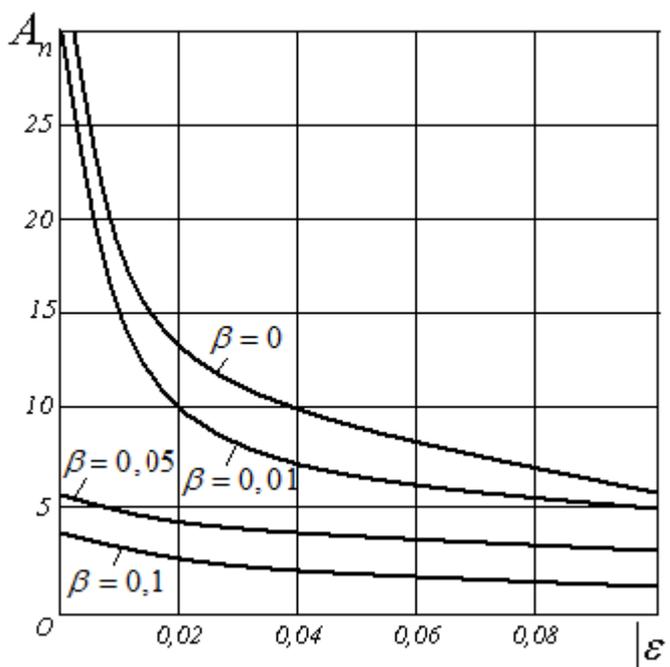
Максимально возможная амплитуда колебаний совпадает с максимумом выражения

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (17)$$

Прохождение через резонанс начинается не доходя до точки  $\tau_0$  ( $\tau_1 < \tau_0$ ) и заканчивается за этой точкой ( $\tau_2 > \tau_0$ ). Сама точка  $\tau_0$  определяется по формуле

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\pi n}{\sqrt{1 + \beta^2}} - 1 \right].$$

Равенство (17) было исследовано на максимум численно. Зависимость амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс на первой динамической моде от  $\beta$  и  $\varepsilon$  приведена на рисунке.



**Рис.** Зависимость амплитуды колебаний струны от  $\beta$  и  $\varepsilon$  при прохождении через резонанс на первой динамической моде.

Анализ графика показывает, что амплитуда при  $\beta = 0$  является оценкой сверху для амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс, когда  $\beta > 0$ . Когда действие сил сопротивления среды и жесткость упругой подложки не учитывается, задача (4), (5) может быть решена точным методом. Это сделано в работе [9]. Сравнение результатов показывает, что метод Канторовича—Галеркина дает в рассматриваемом случае удовлетворительные по точности результаты (погрешность лежит в пределах 5% при  $\varepsilon < 0,1$ ).

## Список литературы

1. *Ryue J., Thompson D.* Decay rates of propagating waves in railway tracks at high frequencies = Скорость задержки распространения волн в железнодорожных рельсах на высоких частотах // *J. Sound and Vibr.* № 4-5. — 2009. — 955-976. — J08608129. — Общие вопросы механики. Общая механика. — 2010. — № 07.
2. *Lei Xiao-yun.* Влияние резких изменений жесткости основания железнодорожного полотна на его вибрацию при движущейся нагрузке // *Zhendong gongcheng xuebao = Journal of Vibration Engineering.* № 2. — 2006. — 195-199. — J06316562. — Общие вопросы механики. Общая механика. — 2010. — № 03.
3. *Мулухов К.К.* Особенности динамического расчета ленточно-колесных конвейеров // Труды Северо-Кавказского государственного технологического университета № 7. - 2000. - 266-269: 3 ил. - J03419859. - Общие вопросы механики. Общая механика. - 2004. - № 5.
4. *Савин Г.Н., Горошко О.А.* Динамика нити переменной длины // *Наук.думка, Киев, 1962, 332 стр.*
5. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
6. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки», 2012, 3 (28), 145-151.*
7. *Самарин Ю.П.* О волновых явлениях в областях с подвижными границами // *Волжский математический сборник. — Куйбышев, 1967. — В. 5. — С. 337-340.*
8. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина // *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки», 2009, 1 (18), 149-158.*
9. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009, 131 стр.
10. *Лежнева А.А.* Изгибные колебания балки переменной длины // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1970. — №1. — С. 159-161.*
11. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки». №2 (19). — 2009.*
12. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.