УДК 531.36:534.1

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУМЕРНОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЫ ВСАСЫВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬ

© Станислав Николаевич Веричев
Институт проблем машиностроения РАН, г. Нижний Новгород, Россия
s.verichev@mail.ru

Аннотация. *В данной работе рассматривается двумерная модель консольно закрепленной трубы, всасывающей жидкость. Практическим примером подобной системы являютя, например, погружные трубы плавучих систем добычи и сжижения природного газа (FPSO), всасывающих морскую воду для нужд охлаждения. На практике оказывается, что такие трубы являются, как правило, неустойчивыми, что приводит к дополнительным циклическим нагрузкам, приводящим к их преждевременному выходу из строя. Достаточно большое количество исследователей пыталось построить соответствующие модели, а также смоделировать эффект экспериментально. Однако, все эти попытки были неудачными. Пока, в конце прошлого десятилетия, не был поставлен первый успешный эксперимент. Однако, на практике оказалось, что динамика консольно закрепленной трубы, всасывающей жидкость, является более сложной, чем это могут описать современные модели. Целью данной работы является поиск методов их усовершенствования на примере двумерной математической модели.*

Ключевые слова: *консольно закрепленная балка, неустойчивость, плавучий газовоз, метод конечных разностей, взаимодействие жидкость-структура*

INSTABILITY OF LATERAL VIBRATIONS OF TWO-DIMENSIONAL VERTICAL PIPE ASPIRATING FLUID

© S.N. Verichev
Institute of Problems in Machine Engineering of the Russian Academy of Sciences, 603024, Belinskogo st., 85, Nizhny Novgorod, Russia
s.verichev@mail.ru

Abstract. *This paper outlines a study of a two-dimensional model of cantilevered pipe aspirating fluid. A practical example of such a system are the submerged pipes of floating production, storage and offloading units (FPSO) aspirating sea water for cooling needs. In practice it appears that such pipes are usually unstable, which leads to additional cyclic stresses, leading to their premature failure. Quite a number of researchers have tried to build a relevant model and to simulate such an effect experimentally. However, all these attempts were unsuccessful until the end of the last decade, when a first successful experiment has been performed. It has been found out, however, that the dynamics of a cantilevered pipe aspirating fluid is more complex than one that current models could predict. The aim of this work is to fill this gap by improving the models based on a two-dimensional mathematical model.*

Keywords: *cantilevered beam, instability, FPSO, finite difference method, fluid-structure interaction*

Введение. Данная работа является продолжением исследования, проведенного автором на основе одномерной модели вертикальной консольно закрепленной трубы, всасывающей жидкость [1]. Было установлено, что, используя общепринятые три типа граничных условий, нельзя предсказать перемежаемость колебательных режимов, в то время, как, используя модифицированные граничные условия, предложенные в [1] –

можно. Поскольку рассмотренная модель является одномерной, то для уточнения, соответствуют ли периодические колебания одномерной балки вращательным режимам, установленным экспериментально, необходимо повысить размерность системы. Что и сделано в настоящей работе.

Постановка задачи. Рассмотрим модель однородной двумерной консольной трубы (балки), всасывающей жидкость с некоторой постоянной скоростью. Труба полностью погружена в жидкость (см. рис. 1).

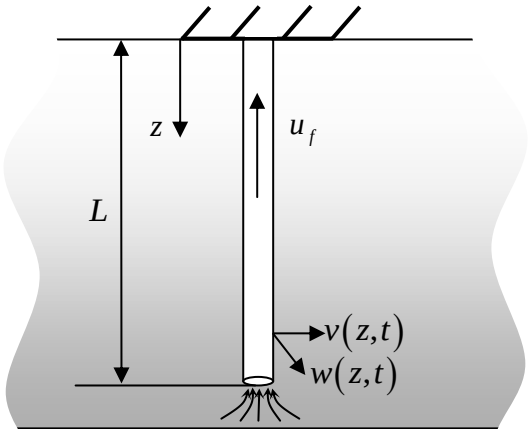


Рис. 1. Рассматриваемая модель.

Уравнения движения имеют вид:

$$EI\frac{\partial^4 w(z,t)}{\partial z^4}-\frac{\partial}{\partial z}\left(T(z,t)\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right)+m_f u_f^2\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}-2m_f u_f\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z\partial t}$$

$$+D_o\left(\frac{\mu A_1}{D_o}\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}+\frac{\rho_f A_2}{2}\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\sqrt{\left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right)^2}\right)+(m_f+M)\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2}=0$$

$$EI\frac{\partial^4 v(z,t)}{\partial z^4}-\frac{\partial}{\partial z}\left(T(z,t)\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}\right)+m_f u_f^2\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}-2m_f u_f\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z\partial t} \qquad (1)$$

$$+D_o\left(\frac{\mu A_1}{D_o}\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}+\frac{\rho_f A_2}{2}\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\sqrt{\left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right)^2}\right)+(m_f+M)\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}=0$$

$$T(z,t)=\rho_r g(A_e-A_i)(L-z)-\rho_f gL(A_e-A_i)$$

Здесь $w(z,t)$ и $v(z,t)$ – поперечные смещения трубы, EI – её изгибная жесткость, $T(z,t)$ – сила натяжения, m_f,ρ_f,u_f – погонная масса, плотность жидкости и скорость ее движения, соответственно, D_o – внешний диаметр трубы, μ – динамическая вязкость жидкости, A_1,A_2 – постоянные коэффициенты, ρ_r,M – плотность материала трубы и её масса, включая присоединенную массу, L – длина трубы, A_e,A_i – площади поперечного сечения, соответствующие внешнему и внутреннему диаметрам трубы, соответственно, g – ускорение свободного падения.

Граничные условия имеют вид:
на закрепленном конце балки ($z=0$):

$$w(z,t)\big|_{z=0}=0$$
$$\left.\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=0$$
$$v(z,t)\big|_{z=0}=0 \qquad (2)$$
$$\left.\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=\alpha$$

на свободном конце ($z=L$):
граничные условия №1

$$\left.\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L}=0$$
$$\left.\frac{\partial^3 w(z,t)}{\partial z^3}\right|_{z=L}=0$$
$$\left.\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L}=0 \qquad (3)$$
$$\left.\frac{\partial^3 v(z,t)}{\partial z^3}\right|_{z=L}=0$$

граничные условия №2

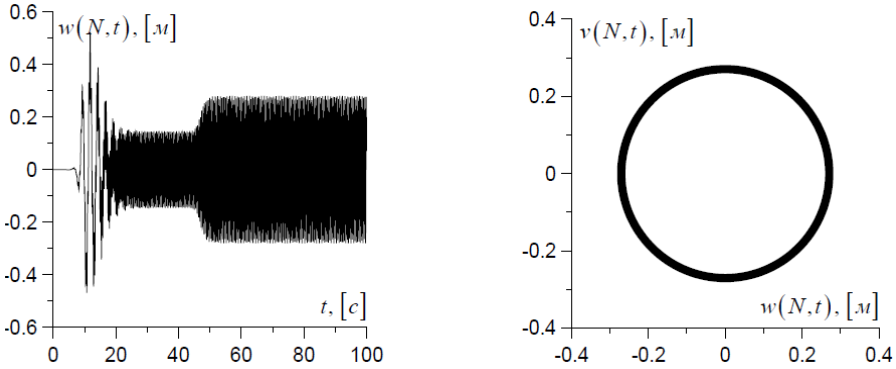
$$\left.\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L}=0$$
$$EI\frac{\partial^3 w(z,t)}{\partial z^3}-m_f u_f\left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}-u_f\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=L}=0$$
$$\left.\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L}=0 \qquad (4)$$
$$EI\frac{\partial^3 v(z,t)}{\partial z^3}-m_f u_f\left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}-u_f\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=L}=0$$

граничные условия №3

$$\left.\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L}=0$$
$$EI\frac{\partial^3 w(z,t)}{\partial z^3}-m_f u_f\left.\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\right|_{z=L}=0$$
$$\left.\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L}=0 \qquad (5)$$
$$EI\frac{\partial^3 v(z,t)}{\partial z^3}-m_f u_f\left.\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right|_{z=L}=0$$

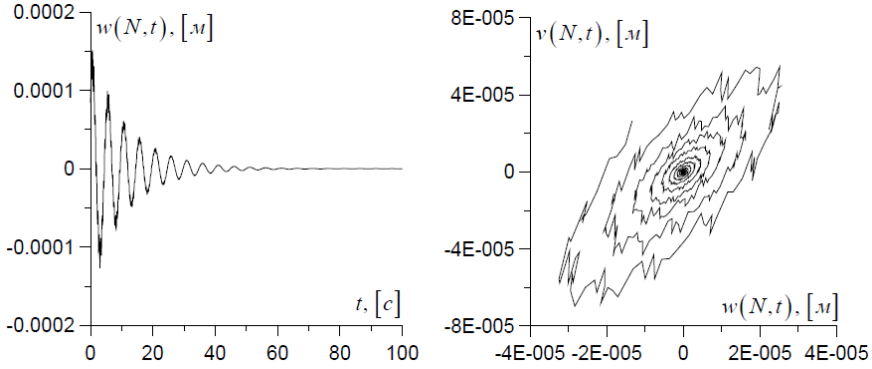
Для исследования рассматриваемой системы используется метод конечных разностей [1]. Для начала рассмотрим вышеупомянутые три типа общепринятых граничных условий (3)-(5).

В зависимости от одного из трех граничных условий балка либо находится в режиме квазипериодических вращений (граничные условия №1, (3), см. рис. 2), либо является устойчивой (граничные условия №2 (4), см. рис. 3), находится в режиме периодических вращений (граничные условия №3 (5), см. рис. 5).



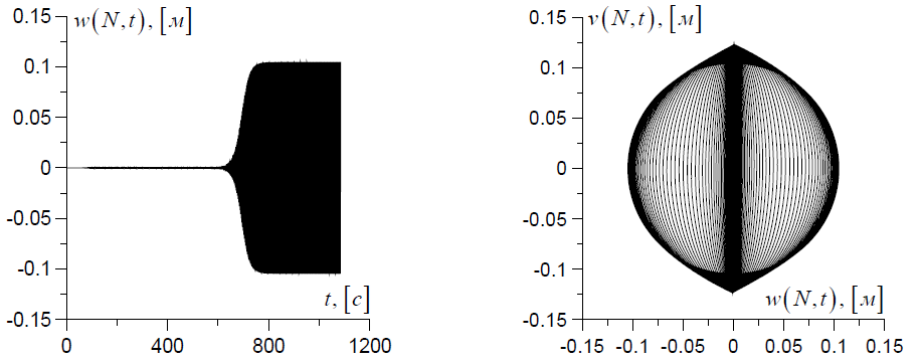
(а) (б)

Рис. 2. Колебания свободного конца балки в случае граничных условий №1: (а) временная зависимость поперечного смещения $w(N,t)$, (б) траектория движения



(а) (б)

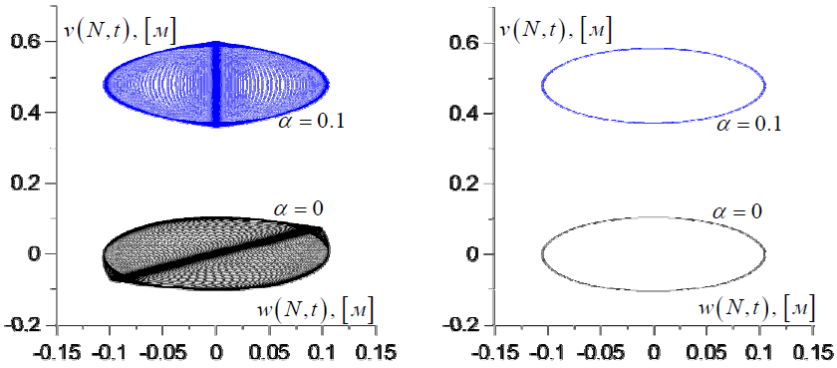
Рис. 3. Колебания свободного конца балки в случае граничных условий №2: (а) временная зависимость поперечного смещения $w(N,t)$, (б) траектория движения



(а) (б)

Рис. 4. Колебания свободного конца балки в случае граничных условий №3: (а) временная зависимость поперечного смещения $w(N,t)$, (б) траектория движения

Так же, как и в случае одномерной модели, учет угла закрепления α приводит лишь к пространственному сдвигу траектории движения конца балки (см. рис. 5) [1].



(а) (б)

Рис. 5. Колебания свободного конца балки в случае граничных условий №3 для $\alpha = 0$ (темные линии (снизу)) и для $\alpha = 0.1$ (светлые линии (сверху)): (а) включая переходный процесс, (б) установившийся режим

Попытаемся модифицировать существующие граничные условия с учетом соображений, изложенных в [1], а именно, попытаемся учесть тот факт, что поток всасываемой жидкости движется с некоторой временной задержкой по отношению к балке. Рассмотрим маятник, жестко связанный с концом балки (рис. 6). Наличие вязко-упругой связи в направлении перпендикулярном серединной линии балки обеспечивает временную задержку колебаний массы маятника в данном направлении (по отношению к свободному концу балки).

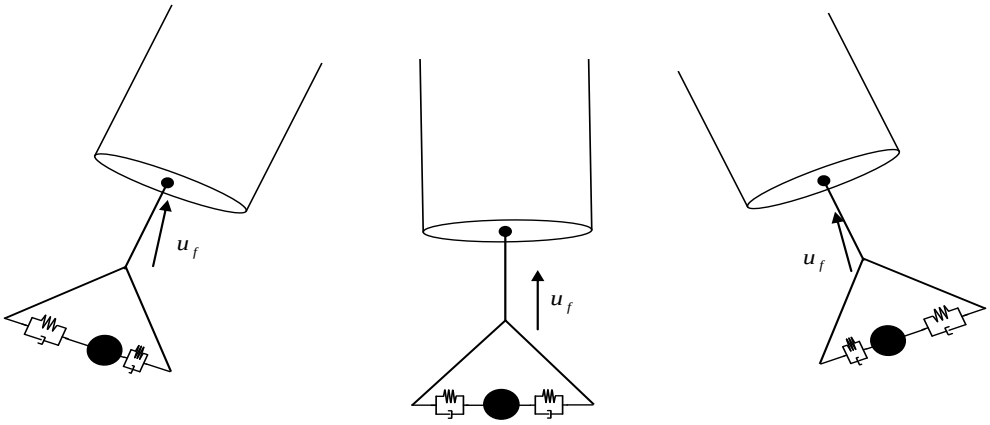


Рис. 6. Модель маятника с вязко-упругой связью, колебания которого имеют временную задержку по отношению к колебаниям балки

Для получения граничных условий рассмотрим более подробно геометрию системы (рис. 7). Балка зафиксирована в точке O_1. $\angle ABC$ – угол между маятником (направлением движения жидкости) и серединной линией балки. w_{xN} и w_{yN} – поперечные смещения свободного конца балки; w_{0x} и w_{0y} – поперечные смещения массы маятника. $AB = L_1$ – длина маятника. В силу двумерности рассматриваемой модели, необходимо определить углы $\alpha = \angle SBQ$ и $\beta = \angle PBK$ (BS и BP – проекции отрезка BA на плоскости (x,z) и (y,z), соответственно; BQ и BK – проекции отрезка BC на плоскости (x,z) и (y,z), соответственно).

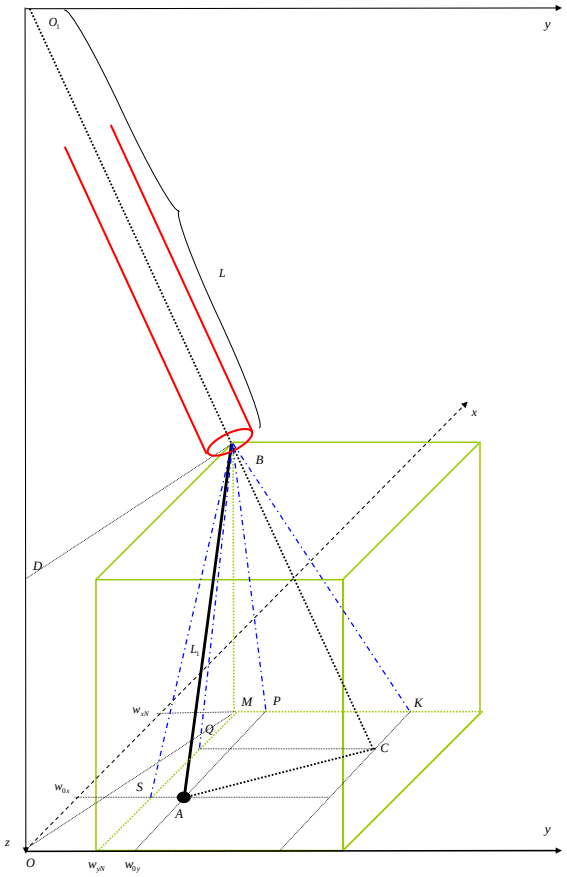


Рис. 7. Геометрия системы.

Используя несложные математические преобразования нетрудно получить искомые углы:

- в плоскости (z, x)

$$\angle MBS = \frac{MS}{BS} = \frac{w_{xN} - w_{0x}}{\sqrt{L_1^2 - \left(w_{0y} - w_{yN}\right)^2}}$$

$$\angle MBQ = \frac{QM}{BQ} = \frac{w_{xN} - x}{\sqrt{BM^2 + QM^2}} = \frac{w_{xN} - x}{\sqrt{L_1^2 - \left(w_{xN} - w_{0x}\right)^2 - \left(w_{0y} - w_{yN}\right)^2 + \left(w_{xN} - x\right)^2}}$$

$$\alpha = \angle SBQ = \angle MBS - \angle MBQ = \frac{w_{xN} - w_{0x}}{\sqrt{L_1^2 - \left(w_{0y} - w_{yN}\right)^2}} - \frac{w_{xN}}{\sqrt{L^2 - w_{yN}^2}} \qquad (6)$$

- в плоскости (z, y):

$$\angle MBK = \frac{MK}{BK} = \frac{y - w_{yN}}{\sqrt{BM^2 + MK^2}} = \frac{y - w_{yN}}{\sqrt{L_1^2 - \left(w_{xN} - w_{0x}\right)^2 - \left(w_{0y} - w_{yN}\right)^2 + \left(y - w_{yN}\right)^2}}$$

$$\angle MBP = \frac{MP}{BP} = \frac{w_{0y} - w_{yN}}{\sqrt{L_1^2 - \left(w_{xN} - w_{0x}\right)^2}}$$

$$\beta = \angle PBK = \angle MBK - \angle MBP = \frac{w_{yN} - w_{0y}}{\sqrt{L_1^2 - \left(w_{xN} - w_{0x}\right)^2}} - \frac{w_{yN}}{\sqrt{L^2 - w_{xN}^2}} \quad (7)$$

Таким образом, граничные условия принимают следующий вид:

$$\left.\frac{\partial^2 w_{xN}(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L} = 0$$
$$\left.EI\frac{\partial^3 w_{xN}(z,t)}{\partial z^3} - m_f u_f\left(\left(\frac{\partial w_{xN}(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial w_{0x}(z,t)}{\partial t}\right) - u_f\alpha\right)\right|_{z=L} = 0$$
$$\left.\frac{\partial^2 w_{yN}(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L} = 0 \quad (8)$$
$$\left.EI\frac{\partial^3 w_{yN}(z,t)}{\partial z^3} - m_f u_f\left(\left(\frac{\partial w_{yN}(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial w_{0y}(z,t)}{\partial t}\right) - u_f\beta\right)\right|_{z=L} = 0$$

Кроме того, к уравнениям движения балки добавляются уравнения движения массы маятника:

$$m_{str}\ddot{w}_{0x} + k_m\left(w_{0x} - w_{xN}\right) + c_{nl}\left(\dot{w}_{0x} - \dot{w}_{xN}\right)\sqrt{\left(\dot{w}_{0x} - \dot{w}_{xN}\right)^2 + \left(\dot{w}_{0y} - \dot{w}_{yN}\right)^2} + c_w\dot{w}_{0x}\sqrt{\dot{w}_{0x}^{\,2} + \dot{w}_{0y}^{\,2}}$$
$$m_{str}\ddot{w}_{0y} + k_m\left(w_{0y} - w_{yN}\right) + c_{nl}\left(\dot{w}_{0y} - \dot{w}_{yN}\right)\sqrt{\left(\dot{w}_{0x} - \dot{w}_{xN}\right)^2 + \left(\dot{w}_{0y} - \dot{w}_{yN}\right)^2} + c_w\dot{w}_{0y}\sqrt{\dot{w}_{0x}^{\,2} + \dot{w}_{0y}^{\,2}} \quad (9)$$

Здесь c_w – вязкость, связанная с сопротивлением жидкости движению массы (viscous drag), c_{nl} и k_m – вязкость и жесткость вязко-упругой связи маятника, m_{str} – масса маятника.

На рис. 8 представлены траектории движения свободного конца балки и плоскость (α, β) для следующего набора параметров:

$$\alpha = 0\ ,\ g = 9.8\ \text{м/с}^2\ ,\ L_1 = 3.6\ \text{м}\ ,\ m_{str} = \frac{\pi D_o^2 L_1 \rho_f}{4}\ \text{кг}\ ,\ c_w = \frac{1}{2}D_o\rho_f A_2\ \text{кг/с}$$
$$c_{nl} = \frac{q_1}{2}D_o\rho_f A_2\ \text{кг/с}\ ,\ q_1 = 1\ ,\ k_m = \frac{c_{nl}^2}{2m_{str}}\ \text{кг/с}^2 \quad (10)$$

Значения параметров (10) аналогичны использованным в случае одномерной модели [1]. Видно, что с течением времени, балка переходит в режим периодических вращений.

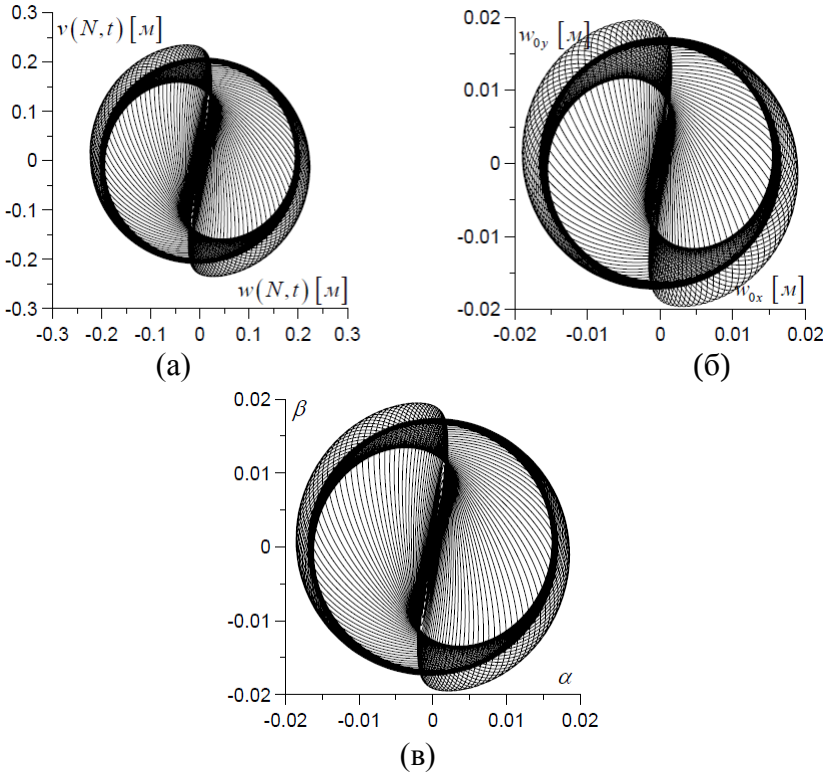


Рис. 8. (а) траектория движения свободного конца балки, (б) траектория движения массы, (в) плоскость (α, β)

Для существенно меньших значений вязко-упругой связи ($q_1 = 0.1$) результат качественно не изменяется, см. рис. 9.

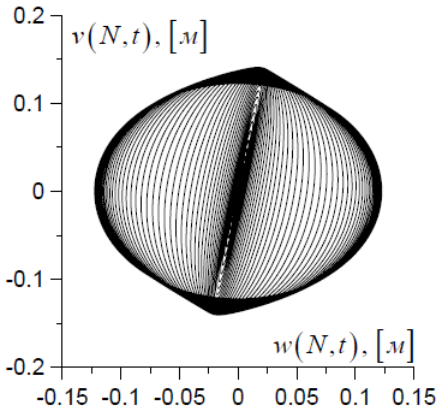


Рис. 9. Траектория движения свободного конца балки

Таким образом, предположение о том, что перемежаемость динамических режимов связана с вариацией угла между потоком всасываемой жидкости и серединной линией балки не оправдалось. Однако прежде чем делать окончательный вывод, рассмотрим другую, более простую модель, в которой введем временную задержку между вышеуказанными углами. Для простоты, рассмотрим одномерную модель, уравнения движения которой имеют вид

$$EI\frac{\partial^4 w(z,t)}{\partial z^4} - 2m_f u_f \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z \partial t} + m_f u_f^2 \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} + M\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} + \mu A_1 \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} = 0 \qquad (11)$$

$$w(z,t)\big|_{z=0}=0,\ \left.\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\ \left.\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L}=0,$$
$$EI\frac{\partial^3 w(z,t)}{\partial z^3}-m_f u_f\left(\left\{\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}-\frac{\partial w(z,t-\tau)}{\partial t}\right\}-u_f\left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}-\frac{\partial w(z,t-\tau)}{\partial z}\right)\right)\Bigg|_{z=L}=0 \quad (12)$$

Здесь параметр τ определяет временную задержку и для простоты предполагается, что он одинаков для пространственной и временной производных. Используя преобразование Лапласа вида

$$W(s,z)=\int_0^\infty w(t,z)e^{-st}ds \quad (13)$$

и, применяя его к уравнениям (11),(12), получим

$$EI\frac{\partial^4 W(z,s)}{\partial z^4}-2m_f u_f s\frac{\partial^2 W(z,s)}{\partial z}+m_f u_f^2\frac{\partial^2 W(z,s)}{\partial z^2}+MW(z,s)+\mu A_1 W(z,s)=0 \quad (14)$$

$$W(z,s)\big|_{z=0}=0,\ \left.\frac{\partial W(z,s)}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\ \left.\frac{\partial^2 W(z,s)}{\partial z^2}\right|_{z=L}=0,$$
$$EI\frac{\partial^3 W(z,s)}{\partial z^3}-m_f u_f\left(\left(sW(z,s)-u_f\frac{\partial W(z,s)}{\partial z}\right)\left(1-e^{-s\tau}\right)\right)\Bigg|_{z=L}=0 \quad (15)$$

Наша цель – выяснить, влияет ли параметр τ на устойчивость системы. В нашем случае неустойчивость имеет место, если характеристический корень $s=-i\omega$ имеет отрицательную действительную часть (ω имеет отрицательную мнимую часть). Это может быть сделано с помощью диаграмм Арганда [4]. Данные диаграммы для первых трех собственных частот балки представлены на рис. 10. Три параметра μ, u_f, и τ были проварьированы, как это показано на рисунке, в то время как остальные параметры имели значения из набора (8). Видно, что балка становится неустойчивой, как только скорость жидкости u_f достигает некоторой критической величины. В то же самое время, вариация параметра τ не приводит к смене знака $\mathrm{Im}(\omega)$, т.е. качественно не влияет на динамику системы.

Вернемся к случаю, когда внешнее возмущение входит в граничные условия мультипликативно, как в (9). Конечно, данный подход можно критиковать. Во-первых, наличие периодической силы, зависящей от времени, делает эффект, полученный для одномерной модели весьма схожим с параметрическим резонансом. Во-вторых, частоты возмущения крайне низки, в то время как в описании эксперимента в [4] такие частоты зарегистрированы не были. Поэтому, интересно проверить, сохранится ли полученный результат для случая непериодического воздействия и как он будет зависеть от частоты возбуждения. Рассмотрим граничные условия вида:

$$\left.\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L} = 0$$

$$EI\frac{\partial^3 w(z,t)}{\partial z^3} - m_f u_f \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial t} - A(t)\cdot u_f \frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=L} = 0 \qquad (16)$$

$$\left.\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L} = 0$$

$$EI\frac{\partial^3 v(z,t)}{\partial z^3} - m_f u_f \left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} - A(t)\cdot u_f \frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=L} = 0$$

$$A(t) = q_1\left(1+q_2\left(\cos(q_3 t)\cos(0.1\cdot q_3 t) - \cos(0.5\cdot q_3 t)\cos(0.1\cdot q_3 t) - \cos(0.33\cdot q_3 t)\cos(0.025\cdot q_3 t)\cos(1.123\cdot q_3 t)\right)\right) \qquad (17)$$

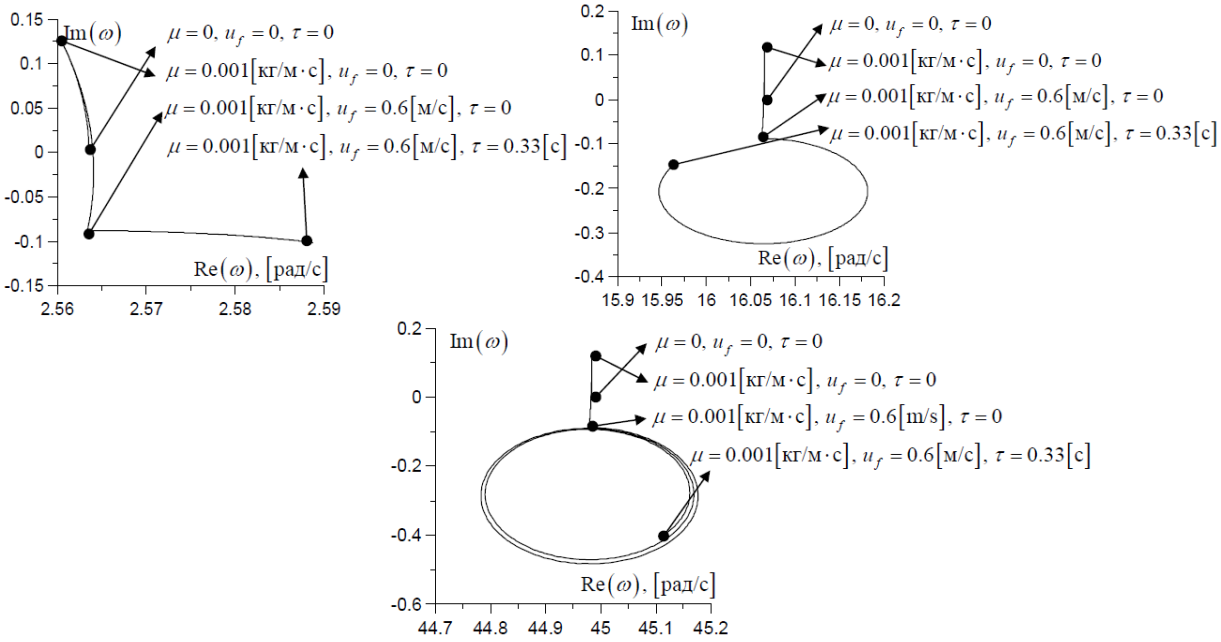
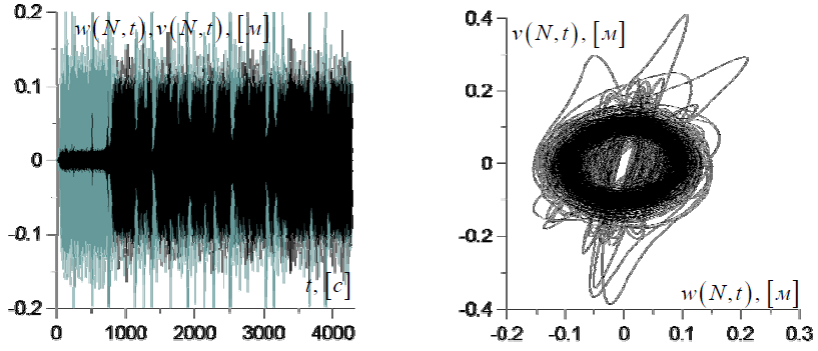


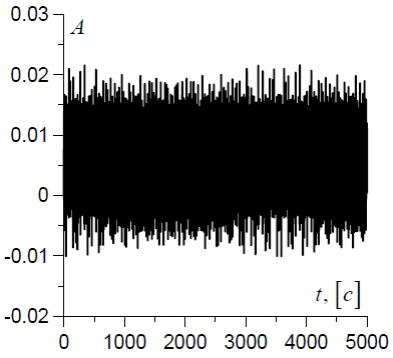
Рис. 10. Диаграммы Арганда для первой, второй и третьей собственных частот балки, соответственно.

Здесь $q_{1,2,3}$ – безразмерные параметры. Проведем численный эксперимент, а именно рассмотри следующие случаи:

1. $q_1 = 0.006$, $q_2 = 1$, $q_3 = 100$, см. рис 11.



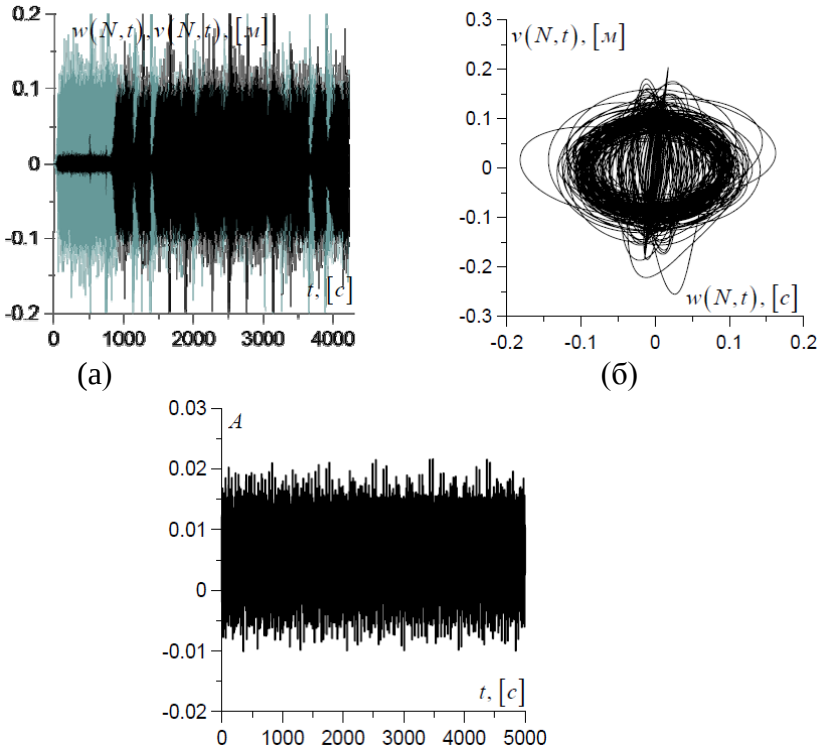
(а) (б)



(в)

Рис. 11. (а) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б) траектория движения свободного конца балки, (в) внешнее возмущение $A_{x,y}(t)$

2. $q_1 = 0.06,\ q_2 = 1,\ q_3 = 10$, см. рис 13.

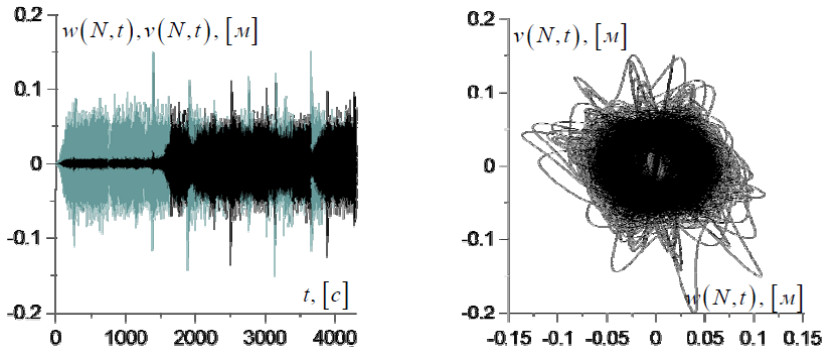


(а) (б)

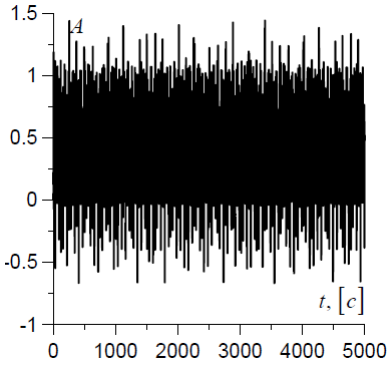
(в)

Рис. 12. (а) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б) траектория движения свободного конца балки, (в) внешнее возмущение $A_{x,y}(t)$

3. $q_1 = 0.4,\ q_2 = 1,\ q_3 = 1$, см. рис 13.



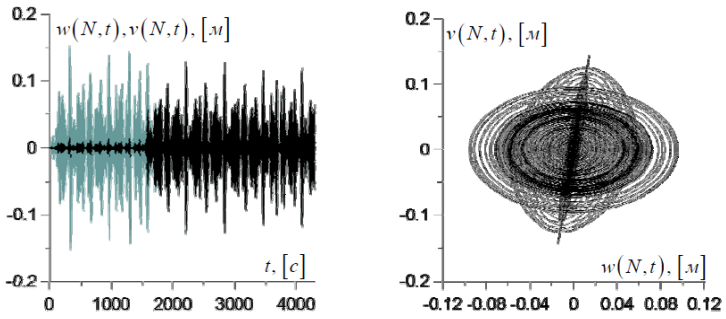
(а) (б)



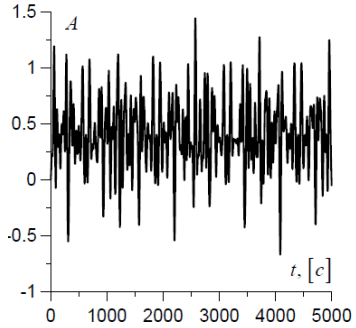
(в)

Рис. 13. (а) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б) траектория движения свободного конца балки, (в) внешнее возмущение $A_{x,y}(t)$

4. $q_1 = 0.4,\ q_2 = 1,\ q_3 = 0.1$, см. рис 14.



(а) (б)



(в)

Рис. 14. (а) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б) траектория движения свободного конца балки, (в) внешнее возмущение $A_{x,y}(t)$

3. $q_1 = 0.4,\ q_2 = 1,\ q_3 = 0.01$, см. рис 15.

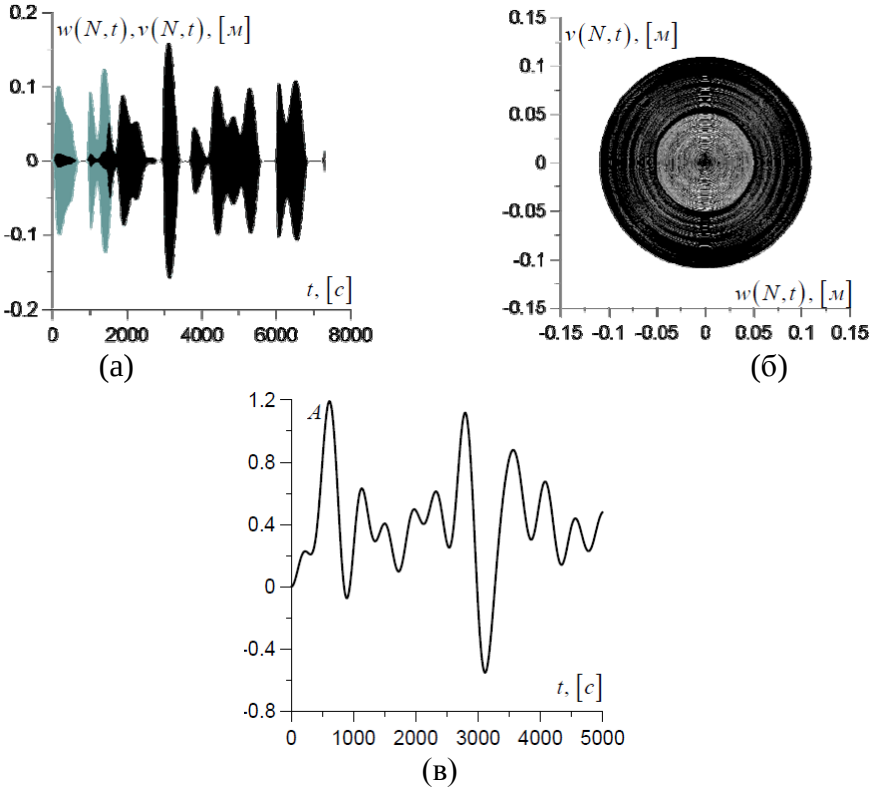


Рис. 15. (а) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б) траектория движения свободного конца балки, (в) внешнее возмущение $A_{x,y}(t)$

Итак, во всех случаях колебания балки являются нерегулярными, что вряд ли может быть проинтерпретировано как результат параметрического резонанса, как в случае граничных условий (9). Подобный колебательный режим сохраняется вне зависимости от величины основной частоты возбуждения, которая была проварьирована на несколько порядков (от $q_3 = 100$ до $q_3 = 0.01$). Для более высоких частот амплитуда внешнего воздействия q_1 существенно меньше, чем в случае более низких частот. Для более низких частот колебания балки более «регулярны», расстояния между соседними пиками становятся шире, и колебания между пиками затухают сильнее.

Подытоживая все полученные результаты, напрашивается вывод, что перемежаемость динамических режимов может быть более или менее разумно предсказана только моделью, в граничные условия которой мультипликативно входит зависящая от времени пертурбация (неавтономность). Таким образом, остается лишь понять причину возникновения возмущений подобного типа и построить более подходящую модель с точки зрения физического смысла.

Так что же может являться таким внешним источником возмущений? В частности, известно, что в трубе, всасывающей жидкость с высокой скоростью, существует квази-коническая область, в которой течение является турбулентным, см. рис. 16 называемая «turbulent puff» [2,3]. Это имеет место на входном участке (entrance length), в конце которого происходит слияние пограничных слоев (рис. 17). Длина входного участка (после которого имеет место установившийся профиль скоростей потока) является функцией числа Рейнольдса. Для отражения данного факта в новой модификации модели, предположим, что скорость жидкости внутри трубы u_f непостоянна, является функцией

пространства и времени вида $u_f\left(1+\mu A(t)e^{-\eta(L-z)}\right)$. Здесь $A(t)$ и есть искомая неавтономность вызванная турбулентностью, а μ и η некоторые безразмерные параметры. Член $e^{-\eta(L-z)}$ (см. рис. 18) моделирует квази-коническую форму турбулентного участка (см. рис. 17). Положим, что входной участок составляет порядка 10% от длины трубы.

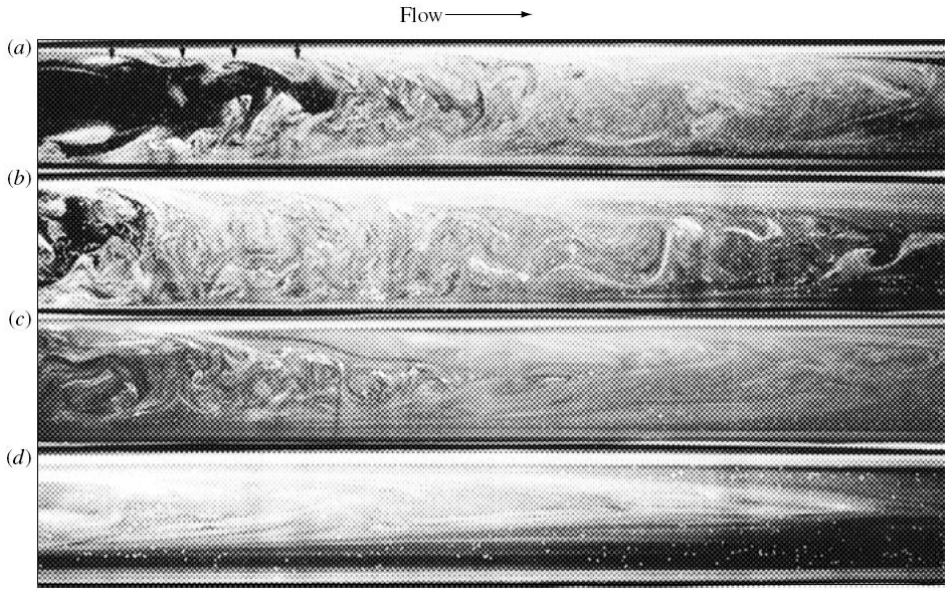


Рис. 16. Форма потока в трубе: (a),(b) ближе к заборной части, (c) немного вверх по течению, (d) вверх по течению, далеко от заборной части [2]

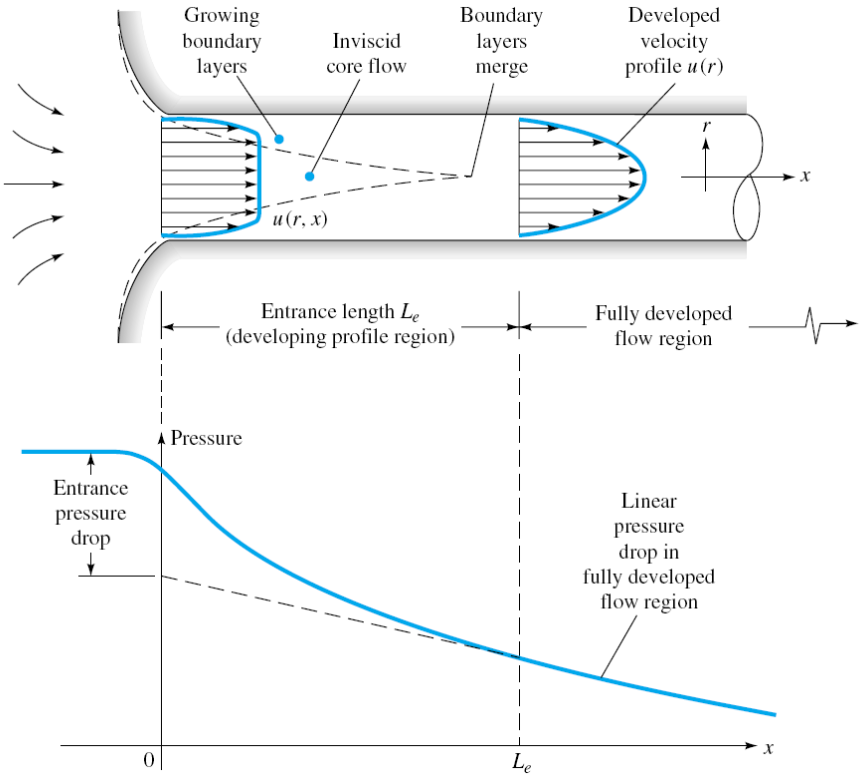


Рис. 17. Процесс установления профиля скоростей потока жидкости в трубе [3].

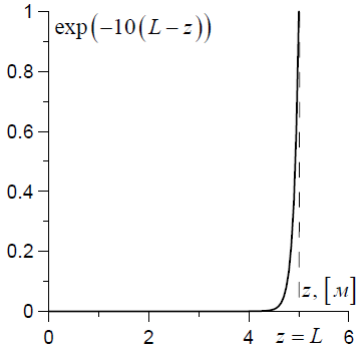


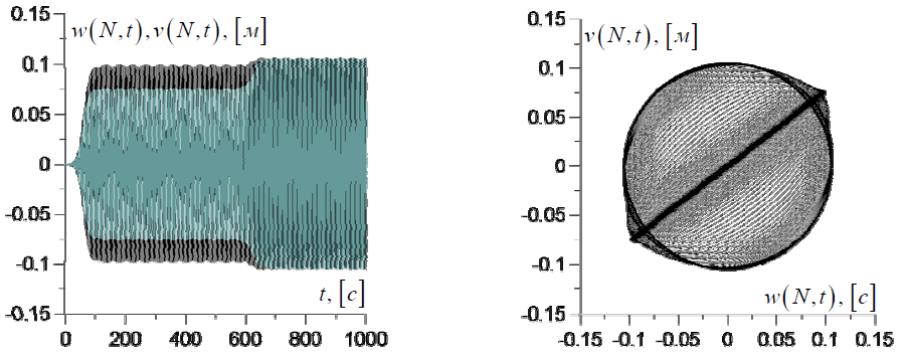
Рис. 18. Функция, ограничивающая в пространстве квази-коническую область турбулентного течения.

Уравнения движения имеют вид

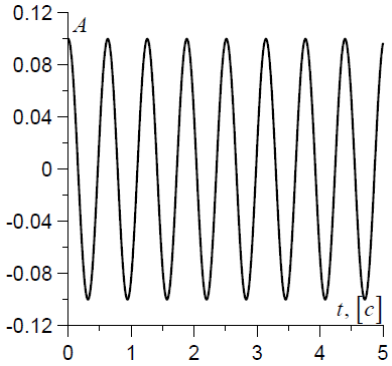
$$EI\frac{\partial^4 w(z,t)}{\partial z^4}-\frac{\partial}{\partial z}\left(T(z,t)\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right)+m_f\left(u_f\left(1+\delta A(t)e^{-\eta(L-z)}\right)\right)^2\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}$$
$$-2m_f u_f\left(1+\delta A(t)e^{-\eta(L-z)}\right)\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z\partial t}+\delta\frac{dA(t)}{dt}e^{-\eta(L-z)}\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}$$
$$+D_o\left(\frac{\mu A_1}{D_o}\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}+\frac{\rho_f A_2}{2}\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\sqrt{\left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right)^2}\right)+\left(m_f+M\right)\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2}=0$$
$$EI\frac{\partial^4 v(z,t)}{\partial z^4}-\frac{\partial}{\partial z}\left(T(z,t)\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}\right)+m_f\left(u_f\left(1+\delta A(t)e^{-\eta(L-z)}\right)\right)^2\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}$$
$$-2m_f u_f\left(1+\delta A(t)e^{-\eta(L-z)}\right)\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z\partial t}+\delta\frac{dA(t)}{dt}e^{-\eta(L-z)}\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}$$
$$+D_o\left(\frac{\mu A_1}{D_o}\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}+\frac{\rho_f A_2}{2}\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\sqrt{\left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right)^2}\right)+\left(m_f+M\right)\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}=0$$
$$T(z,t)=\rho_r g\left(A_e-A_i\right)(L-z)-\rho_f gL\left(A_e-A_i\right) \tag{18}$$

К сожалению, форма $A(t)$ неизвестна и может быть получена исключительно в натурном эксперименте. Заметим, что рис. 17 относится к случаю горизонтальной неподвижной трубы, поэтому, строго говоря, в нашем случае квази-коническая область не будет являться осесимметричной, а будет изменять свою форму вследствие колебаний трубы. Рассмотрим различные формы $A(t)$. Поскольку частотный спектр данной функции неизвестен, то будем варьировать $A(t)$ в широком диапазоне частот. Первоначально рассмотрим случай граничных условий (5).

Сначала рассмотрим простейший случай, когда $A(t)$ представляет собой периодическую функцию вида $\delta A(t)=\delta\cos(\omega t)$, где δ – малый параметр. Ни рис. 19а,б, и в представлены временные зависимости для смещений свободного конца балки $w(N,t)$ и $v(N,t)$, траектория его движения и вид $A(t)$ для $\delta=0.1$, $\omega=10$, соответственно. Далее параметр ω варьируется в сторону уменьшения. На рис. 20, 21, и 22 представлены те же самые зависимости, что и на рис. 19 для $\omega=1$, $\omega=0.1$, и $\omega=0.01$, соответственно.

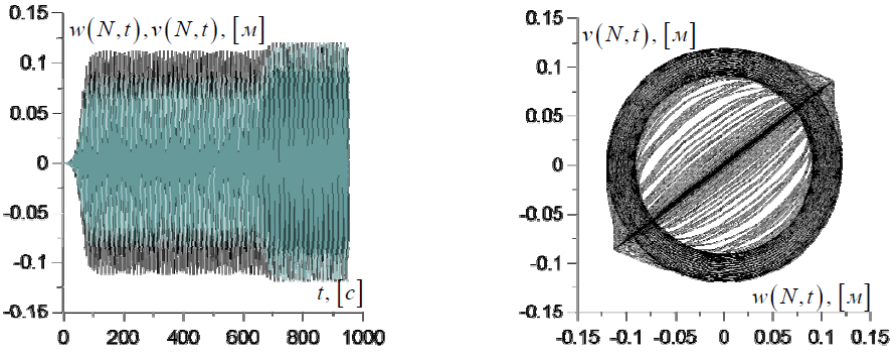


(а) (б)

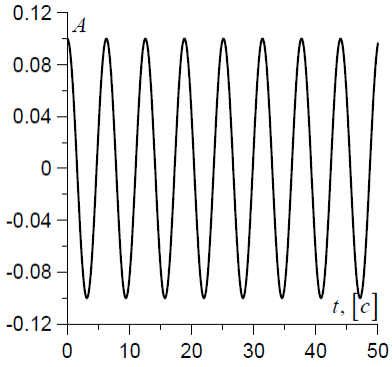


(в)

Рис. 19. (а) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б) траектория движения свободного конца балки, (в) внешнее возмущение $A_{x,y}(t)$ для случая $\delta = 0.1,\ \omega = 10$



(а) (б)



(в)

Рис. 20. (а) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б) траектория движения свободного конца балки, (в) внешнее возмущение $A_{x,y}(t)$ для случая $\delta = 0.1,\ \omega = 1$

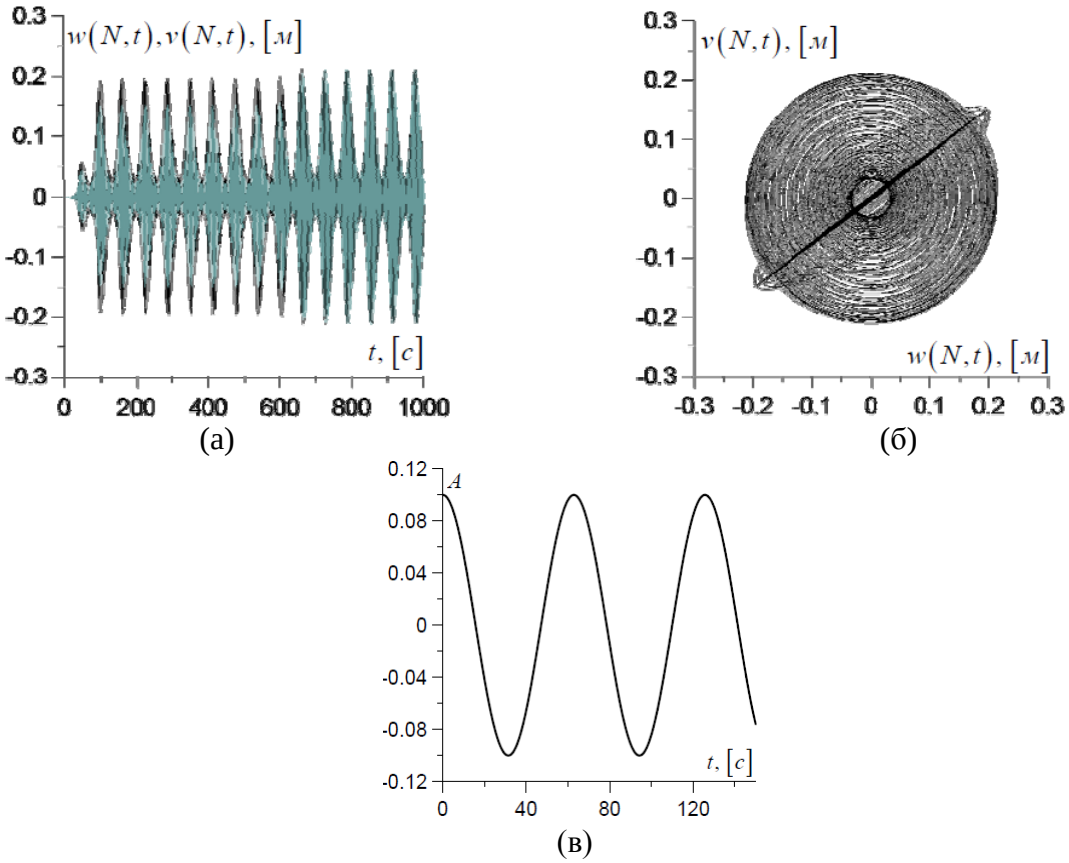
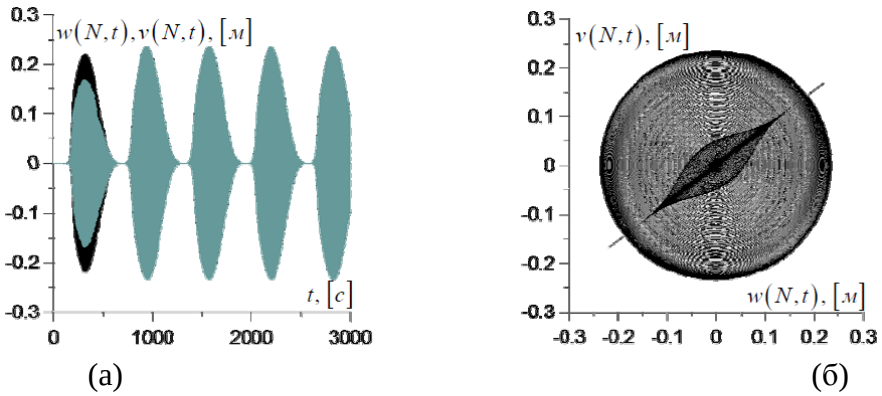
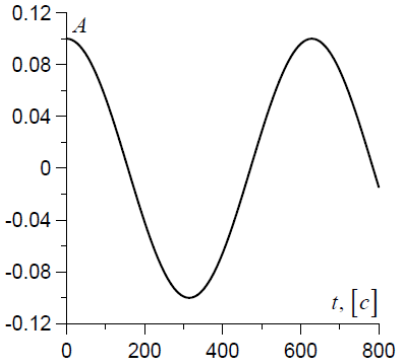


Рис. 21. (а) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б) траектория движения свободного конца балки, (в) внешнее возмущение $A_{x,y}(t)$ для случая $\delta = 0.1,\ \omega = 0.1$





(в)

Рис. 22. (а) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б) траектория движения свободного конца балки, (в) внешнее возмущение $A_{x,y}(t)$ для случая $\delta = 0.1,\ \omega = 0.01$

Видно, что во всех случаях балка совершает квазипериодические вращения и, чем ниже частота ω, тем меньше внутренний диаметр предельного множества, соответствующего траектории движения свободного конца. Заметим, что рассмотрен случай граничных условий №3, (5). Проверим, какова динамика балки в случае граничных условий №1 и №2. Оказывается, что в случае граничных условий №2 (см. (4)) балка устойчива (рис. 23), а в случае граничных условий №1 (см. (3)) балка совершает квазипериодические вращения (рис. 24, ср. с рис. 2).

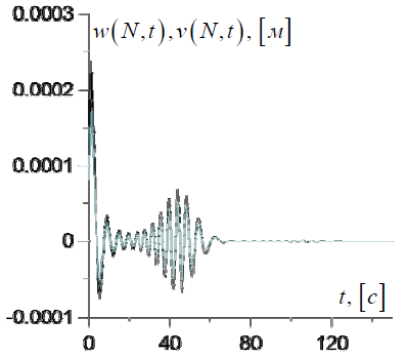
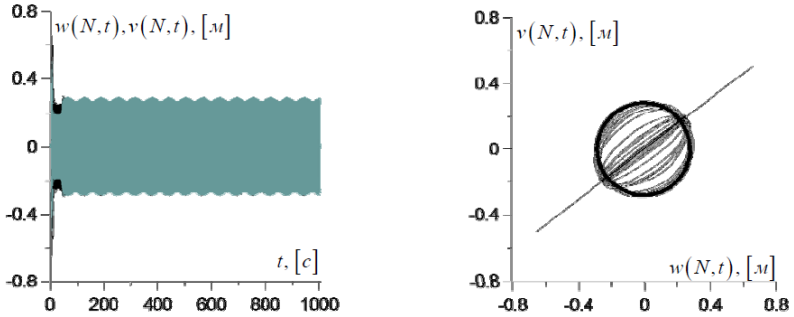


Рис. 23. Временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет) для случая $\delta = 0.1,\ \omega = 0.1$



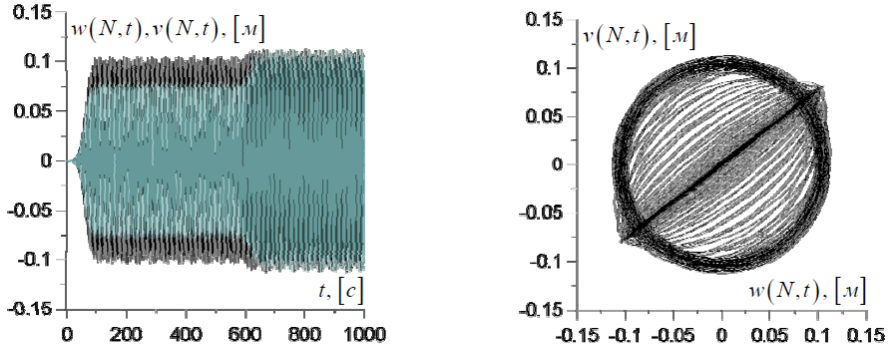
(а) (б)

Рис. 24. (а) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б) траектория движения свободного конца балки для случая $\delta = 0.1,\ \omega = 0.1$

Усложним вид $A(t)$:

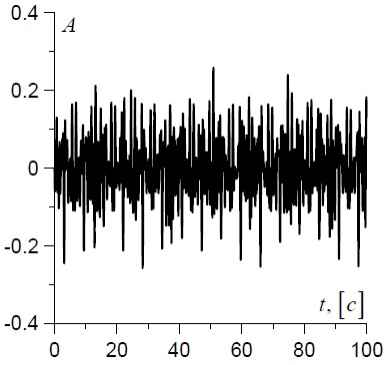
$$A(t)=\delta\left(\left(\cos(\omega t)\cos(0.1\cdot\omega t)-\cos(0.5\cdot\omega t)\cos(0.1\cdot\omega t)-\cos(0.33\cdot\omega t)\cos(0.025\cdot\omega t)\cos(1.123\cdot\omega t)\right)\right) \quad (19)$$

Так же, как и в предыдущем случае, мы будем варьировать основную частоту ω рассмотрев $\omega=10$ (рис. 25), $\omega=1$ (рис. 26), $\omega=0.1$ (рис. 27), $\omega=0.01$ (рис. 28). Снова, для более низких частот колебания становятся более «регулярными», а расстояния между пиками увеличиваются, а колебания в этих интервалах затухают сильнее.



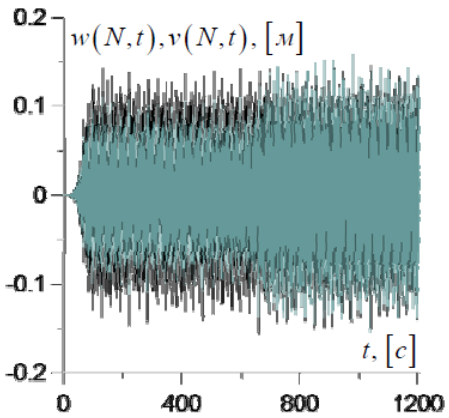
(а)

(б)

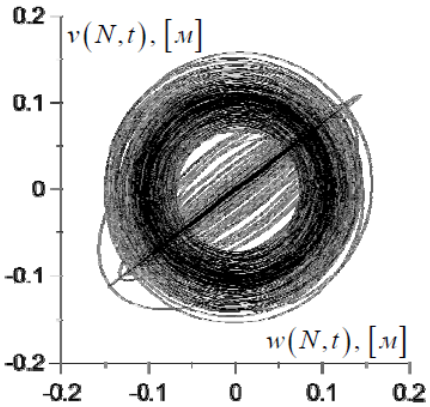


(в)

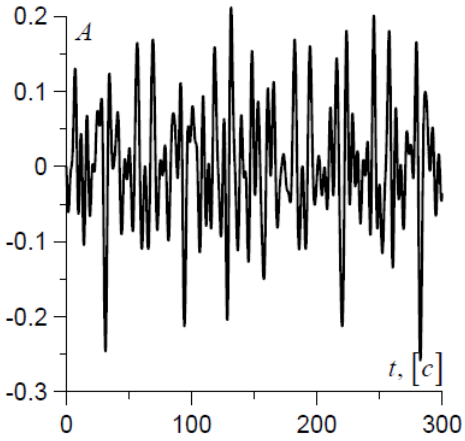
Рис. 25. (а) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б) траектория движения свободного конца балки, (в) внешнее возмущение $A_{x,y}(t)$ для случая $\delta=0.1,\ \omega=10$



(а)

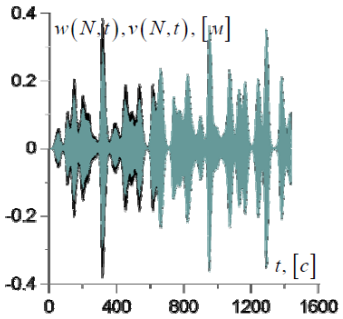


(б)

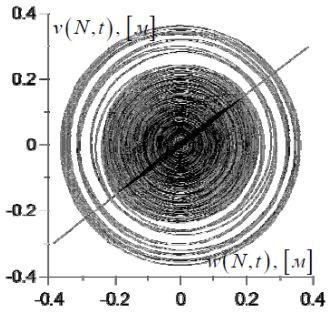


(в)

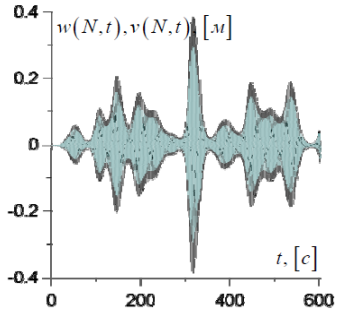
Рис. 26. (а) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б) траектория движения свободного конца балки, (в) внешнее возмущение $A_{x,y}(t)$ для случая $\delta = 0.1,\ \omega = 1$



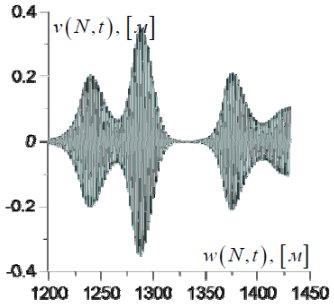
(а)



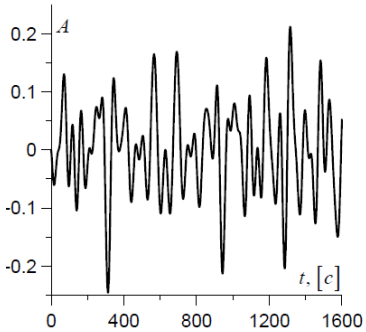
(б)



(в)



(г)



(д)

Рис. 27. (а),(в),(г) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б) траектория движения свободного конца балки, (д) внешнее возмущение $A_{x,y}(t)$ для случая $\delta = 0.1,\ \omega = 0.1$

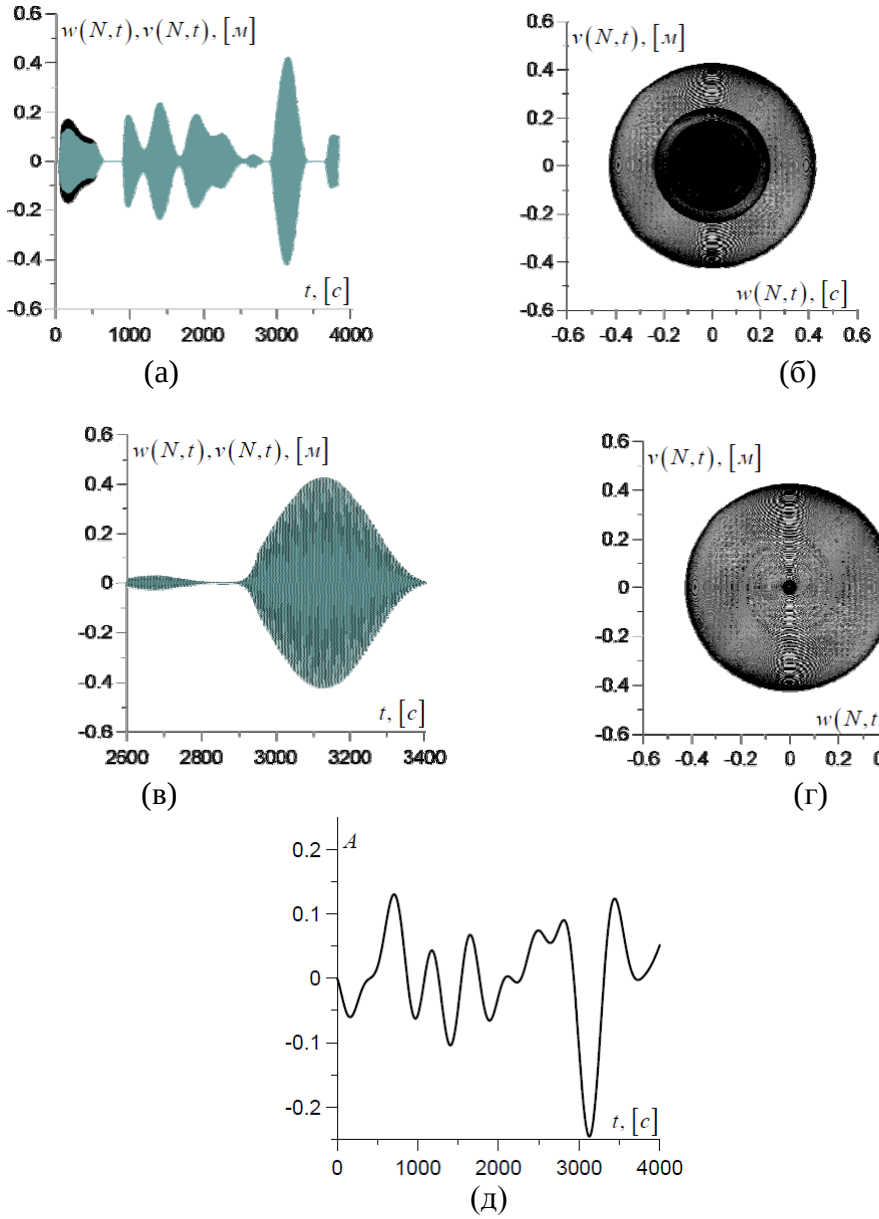
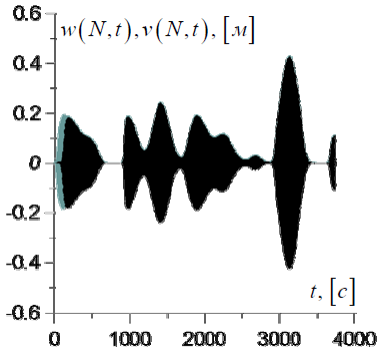
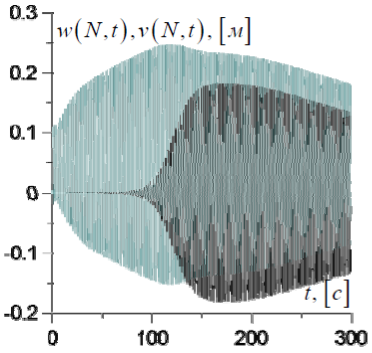


Рис. 28. (а),(в) временная зависимость поперечных смещений свободного конца балки $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет), (б),(г) траектория движения свободного конца балки, (д) внешнее возмущение $A_{x,y}(t)$ для случая $\delta = 0.1,\ \omega = 0.01$

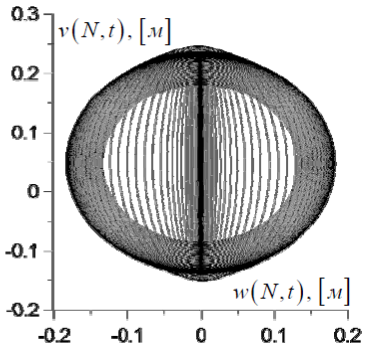
Влияние угла закрепления балки показано на рис. 29. Снова данный параметр приводит только к пространственному сдвигу траектории движения свободного конца балки (ср. с рис. 5).


w(N,t),v(N,t),[м]
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
t,[c]
0
1000
2000
3000
4000

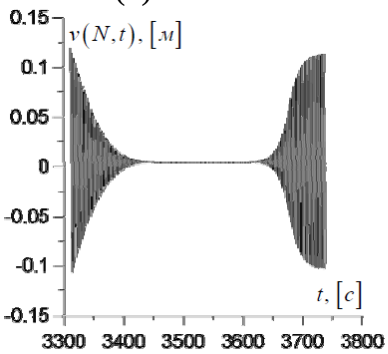
(а)


w(N,t),v(N,t),[м]
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
t,[c]
0
100
200
300

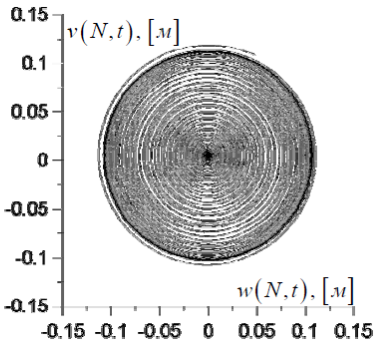
(б)


v(N,t),[м]
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
w(N,t),[м]
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2

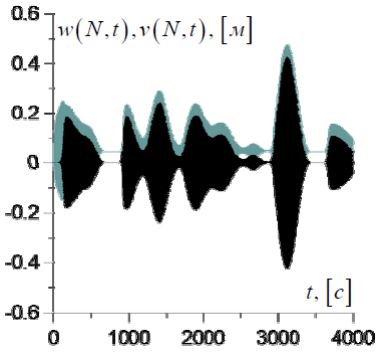
(в)


v(N,t),[м]
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
t,[c]
3300
3400
3500
3600
3700
3800

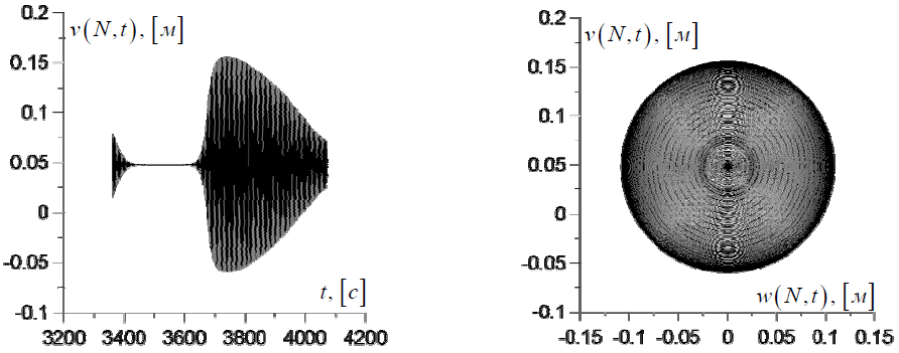
(г)


v(N,t),[м]
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
w(N,t),[м]
-0.15
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
0.15

(д)


w(N,t),v(N,t),[м]
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
t,[c]
0
1000
2000
3000
4000

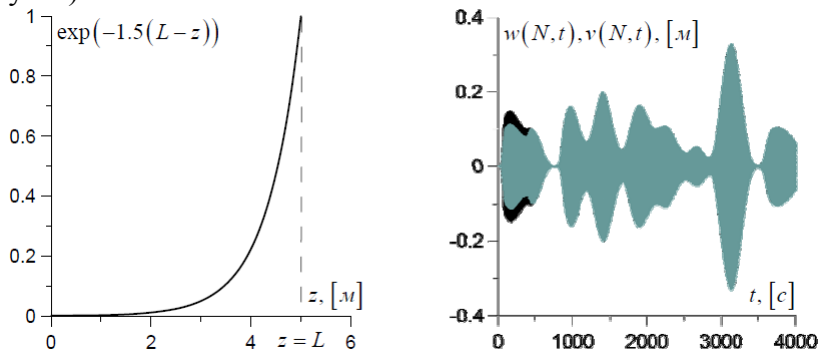
(е)



(ж) (з)

Рис. 29. Колебания свободного конца балки для $\delta = 0.1,\ \omega = 0.01$: (а),(б),(г) временные зависимости поперечных смещений $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет) для $\alpha = 0.001$, (в),(д) траектория движения для $\alpha = 0.001$, (е),(ж) временные зависимости поперечных смещений $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет) для $\alpha = 0.01$, (з) траектория движения для $\alpha = 0.01$

На рис. 30 показано влияние длины входного участка (см. также рис. 17 и 27а), величина которого было взята порядка 80% от общей длины балки (против 10% в предыдущем случае).



(а) (б)

Рис. 30. (а) функция, ограничивающая в пространстве квази-коническую область турбулентного течения, (б) временные зависимости поперечных смещений $w(N,t)$ (темный цвет) и $v(N,t)$ (светлый цвет) $\delta = 0.1,\ \omega = 0.01$

Видно, что даже значительное увеличение входного расстояния не имеет качественного влияния на динамику системы. В целом, при бóльших значениях данного параметра неустойчивость проявляется сильнее.

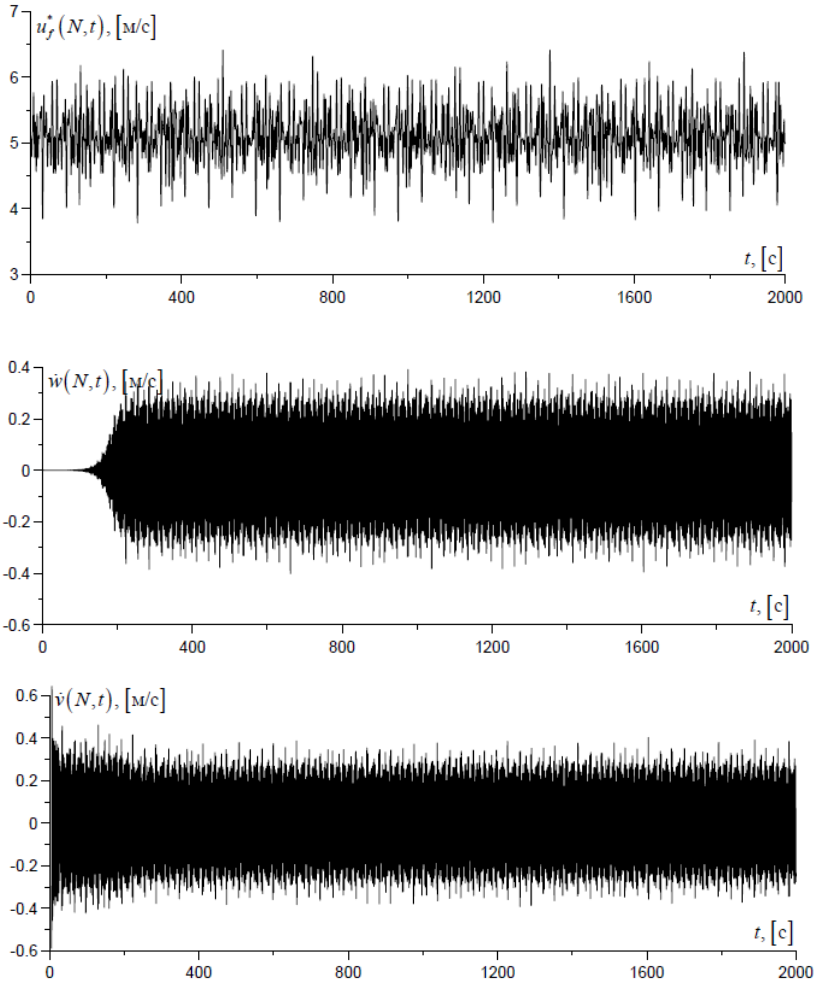


Рис. 31. Временные зависимости для u_f^*, $\dot{w}_N$, и $\dot{v}_N$ для $\delta = 0.1,\ \omega = 1$

Интересно провести сравнение скоростей трубы и жидкости в районе заборной части (свободный конец балки), а именно сравнить $u_f^* = u_f\left(1+\delta A(t)e^{-\eta(L-z)}\right)\Big|_{z=L}$, $\dot{w}_N$, и $\dot{v}_N$. Соответствующие временные зависимости представлены на рис. 31 и 32 для $\delta = 0.1$, $\omega = 1$ и $\delta = 0.1,\ \omega = 0.01$, соответственно. Для случая $\omega = 0.01$ нетрудно заметить, что скорости $\dot{w}_N$, и $\dot{v}_N$ (так же, как и смещения w_N, и v_N, см. рис. 29) обращаются в ноль после достижения скорости жидкости некоторой величины u_f^*, которая слегка превышает расчетную скорость прокачки u_f = 5.1 [м/с] (растущие участки на временных зависимостях $u_f^*(t)$, находящиеся выше u_f^* соответствуют нулевым значениям $\dot{w}_N(t)$ и $\dot{v}_N(t)$.

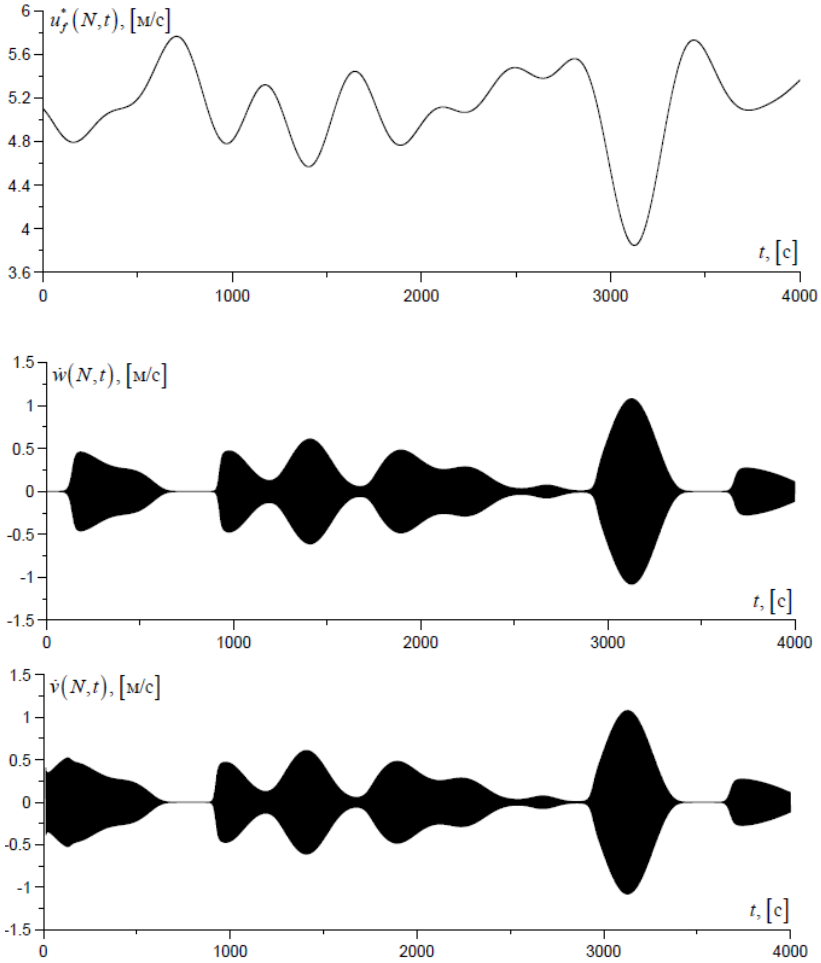


Рис. 32. Временные зависимости для u_f^*, $\dot{w}_N$, и $\dot{v}_N$ для $\delta = 0.1,\ \omega = 0.01$

Заключение. В данной работе была рассмотрена задача о колебаниях консольно закрепленной трубы, всасывающей жидкость в рамках двумерной модели. Целью исследования являлось выявление возможных причин, приводящих к перемежаемости квази-устойчивого режима и режима периодических вращений, а также предложить альтернативную модель, описывающую подобную динамику. Показано, что возможной причиной такой динамики является неустойчивость, называемая в западной литературе marginal instability [5], возникающая при вариации параметров вблизи границы, разделяющей устойчивый и неустойчивый режимы. Доказано, что существующие на сегодняшний день три типа общепринятых граничных условий на свободном конце трубы являются недостаточными для описания подобных динамических режимов. Путем анализа различных моделей установлено, что перемежаемость не связана с инерционностью потока всасываемой жидкости под заборным отверстием трубы. Подобный динамический режим возможен исключительно в случае, когда граничные условия содержат неавтономность, т.е. явную функцию времени, входящую в уравнения движения мультипликативно. Предполагалось, что одним из источников такого внешнего воздействия может являться область турбулентного течения формирующееся внутри трубы сразу после заборного отверстия. Однако, было установлено, что непосредственно перемежаемость может быть вызвана только внешним воздействием, причем очень низкой частоты, в то время как спектр турбулентного течения в целом более высокочастотен. Кроме того, было показано, что в рамках рассмотренных моделей несимметричность фиксации консольной трубы не влияет на амплитуду вращательных движений, а приводит лишь к пространственному сдвигу траекторий движения свободного конца. Установлено, что при вариации скорости прокачки жидкости, а

именно при ее увеличении существуют диапазоны, в которых неустойчивая труба становится устойчивой.

Автор хотел бы выразить благодарность Российскому научному фонду за поддержку при подготовке данной работы (грант № 14-19-01637).

Список литературы

1. *Веричев С.Н. Неустойчивость поперечных колебаний одномерной вертикальной трубы всасывающей жидкость // Вестник научно-технического развития. 2015. № 9(97). С.3-17.*
2. *Bandyopadhyay P.R. Aspects of the Equilibrium Puff in Transitional Pipe Flow // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 163. PP.439–458.*
3. *White F. M. Fluid Mechanics. McGraw-Hill, 2006, 1023 pp.*
4. *Kuiper G.L. Stability of offshore risers conveying fluid. Eburon, 2008, 172 pp.*
5. *Dimentberg, M., Hera, A. and Naess, A. Marginal Instability and Intermittency in Stochastic Systems. Part I – Systems with Slow Random Variations of Parameters // Journal of Applied Mechanics. 2008. Vol.75 / 041002-1.*