УДК 531.36:534.1

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЫ ВСАСЫВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬ

© Станислав Николаевич Веричев
Институт проблем машиностроения РАН, г. Нижний Новгород, Россия
s.verichev@mail.ru

Аннотация. *В данной работе рассматривается одномерная модель консольно закрепленной трубы, всасывающей жидкость. Практическим примером подобной системы являются, например, погружные трубы плавучих систем добычи и сжижения природного газа (FPSO), всасывающих морскую воду для нужд охлаждения. На практике оказывается, что такие трубы являются, как правило, неустойчивыми, что приводит к дополнительным циклическим нагрузкам, приводящим к их преждевременному выходу из строя. Достаточно большое количество исследователей пыталось построить соответствующие модели, а также смоделировать эффект экспериментально. Однако, все эти попытки были неудачными. Пока, в конце прошлого десятилетия, не был поставлен первый успешный эксперимент. Однако, на практике оказалось, что динамика консольно закрепленной трубы, всасывающей жидкость, является более сложной, чем это могут описать современные модели. Целью данной работы является поиск методов их усовершенствования на примере одномерной математической модели.*

Ключевые слова: *консольно закрепленная балка, неустойчивость, плавучий газовоз, метод конечных разностей, взаимодействие жидкость-структура*

INSTABILITY OF LATERAL VIBRATIONS OF ONE-DIMENSIONAL VERTICAL PIPE ASPIRATING FLUID

© S.N. Verichev
Institute of Problems in Machine Engineering of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. *This paper outlines a study of a one-dimensional model of cantilevered pipe aspirating fluid. A practical example of such a system are the submerged pipes of floating production, storage and offloading units (FPSO) aspirating sea water for cooling needs. In practice it appears that such pipes are usually unstable, which leads to additional cyclic stresses, leading to their premature failure. Quite a number of researchers have tried to build a relevant model and to simulate such an effect experimentally. However, all these attempts were unsuccessful until the end of the last decade, when a first successful experiment has been performed. It has been found out, however, that the dynamics of a cantilevered pipe aspirating fluid is more complex than one that current models could predict. The aim of this work is to fill this gap by improving the models starting with a simple example of the one-dimensional mathematical model.*

Keywords: *cantilevered beam, instability, FPSO, finite difference method, fluid-structure interaction*

Введение. Динамика труб, прокачивающих жидкость, является достаточно старой инженерной и научной проблемой. Первые упоминания о результатах эмпирических наблюдений датированы 1885 годом [2]. Первые опубликованные результаты исследований принадлежат Бурьересу и датируются 1939 годом [2]. Большинство публикаций по данной тематике относятся к случаю труб, из которых жидкость вытекает [4], в то время как случай труб, всасывающих жидкость, получил гораздо меньшее внимание [2]. Безусловный интерес

к этой теме продиктован, прежде всего, нуждами промышленности. В частности, трубы, всасывающие жидкость, широко используются в морской нефгегазовой индустрии, являясь интегральной частью системы охлаждения плавучих систем, добывающих природный газ и обеспечивающих его одновременное сжижение.

Долгое время исследователям не удавалось смоделировать неустойчивость трубы, всасывающей жидкость в лабораторных уловиях. Первое успешеое экспериментальное подтверждение данного эффекта было осуществлено Х.Л. Кайпером и А.В. Метрикиным [2,3] (см. Рис.1). Несмотря на безусловный успех данного исследования, некоторые его аспекты не могли быть объяснены в рамках сущетсвующих на сегодняшний день моделей. А именно: было обнаружено, что если скорость движущения жидкости превышает некоторую критическую величину, то возникает перемежаемость между двумя динамическими режимами: неустойчивым (квазипериодические вращения) и устойчивым (малые шумоподобные колебания около состояния равновесия). Ниже вышеуказанной критической скорости труба является всегда устойчивой. Кроме того, для двух идентичных экспериментов, проведенных с разницей в один месяц, амплитуда орбитального движения была различной (~0.25 против ~1.5 от диаметра трубы, соответственно). Существующие на сегодняшний день теории не предсказывают и, тем более, не объясняют ни первый, ни второй эффект. Вопрос остается открытым

Так что же является причиной подобной динамики, и какова должна соответствующая модель? Что привело к такому существенному различию амплитуд вращательных движений? Остаточные напряжения в трубе, исчезнувшие через месяц? Несимметричность консольного крепления? Цель данной работы – попытаться ответить на эти вопросы.

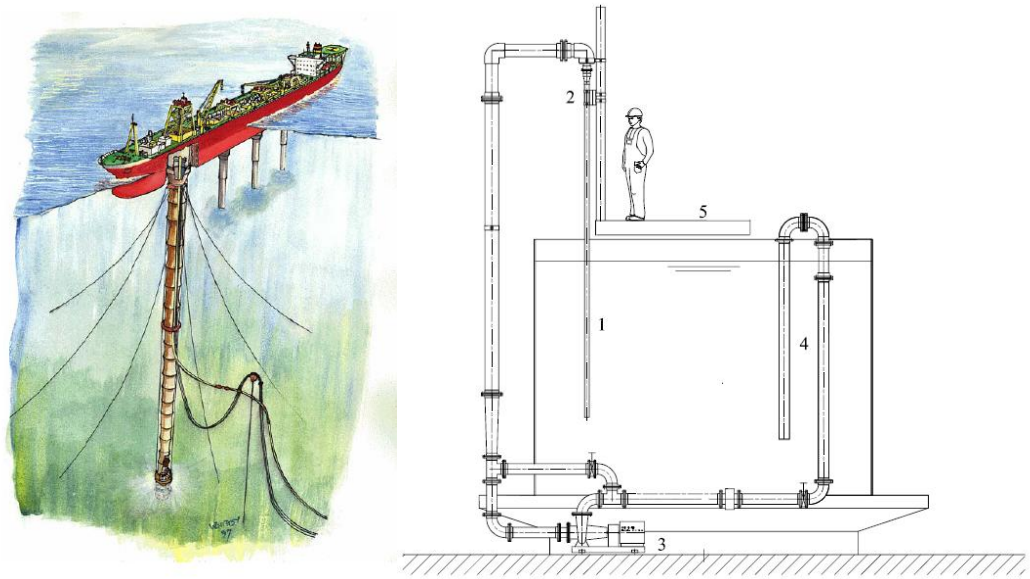


Рис. 1. Плавучая система добычи и сжижения природного газа (FPSO) и схема эксперимента, проведенного Х.Л. Кайпером и А.В. Метрикиным: 1 – консольная труба, 2 – жесткое соединение со стальной трубой, 3 – центробежный насос, 4 – возвратная труба, 5 – бетонная плита

Постановка задачи. Рассмотрим одномерную модель однородной одномерной консольно закрепленной трубы (балки), всасывающей жидкость с постоянной скоростью. Труба полностью погружена в жидкость (см. рис. 2).

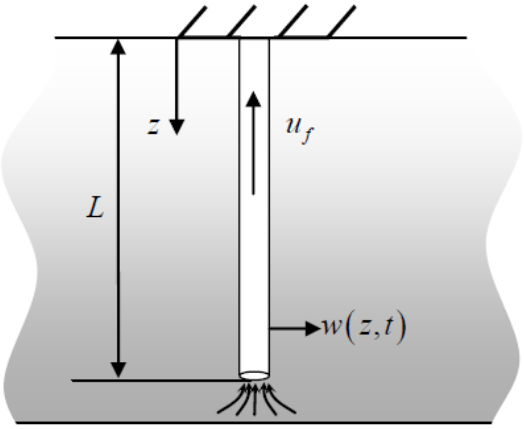


Рис. 2. Модель.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид [2]:

$$EI\frac{\partial^4 w(z,t)}{\partial z^4}-\frac{\partial}{\partial z}\left(T(z,t)\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right)+m_f u_f^2\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}-2m_f u_f\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z\partial t}$$
$$+D_o\left(\frac{\mu A_1}{D_o}\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}+\frac{\rho_f A_2}{2}\left|\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\right|\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\right)+(m_f+M)\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2}=0 \quad (1)$$
$$T(z,t)=\rho_r g(A_e-A_i)(L-z)-\rho_f gL(A_e-A_i)$$

Здесь $w(z,t)$ – поперечное смещение трубы, EI – её изгибная жесткость, $T(z,t)$ – сила натяжения, m_f,ρ_f,u_f – погонная масса, плотность жидкости и скорость ее движения в трубе, соответственно, D_o – внешний диаметр трубы, μ – динамическая вязкость жидкости, A_1, A_2 – постоянные коэффициенты, ρ_r, M – плотность материала трубы и её масса, включая присоединенную массу, L – длина трубы, A_e, A_i – площади поперечного сечения, соответствующие внешнему и внутреннему диаметрам трубы, соответственно, g – ускорение свободного падения.

Граничные условия на закрепленном конце трубы ($z=0$) имеют вид

$$w(z,t)\Big|_{z=0}=0$$
$$\left.\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=\alpha \quad (2)$$

Предполагается, что труба может быть закреплена не только перпендикулярно поверхности, и под некоторым углом α (см. рис. 3).

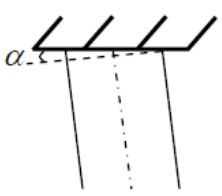


Рис. 3. Закрепленный конец трубы.

Согласно существующим на сегодняшний день результатам исследований по данной проблеме, подробно изложенных в [2], существует три возможных варианта записи граничных условий на свободном конце балки ($z = L$):

граничные условия № 1

$$\left.\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L} = 0$$
$$\left.\frac{\partial^3 w(z,t)}{\partial z^3}\right|_{z=L} = 0 \qquad (3)$$

граничные условия № 2

$$\left.\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L} = 0$$
$$EI\frac{\partial^3 w(z,t)}{\partial z^3} - m_f u_f \left.\left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial t} - u_f \frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right)\right|_{z=L} = 0 \qquad (4)$$

граничные условия № 3

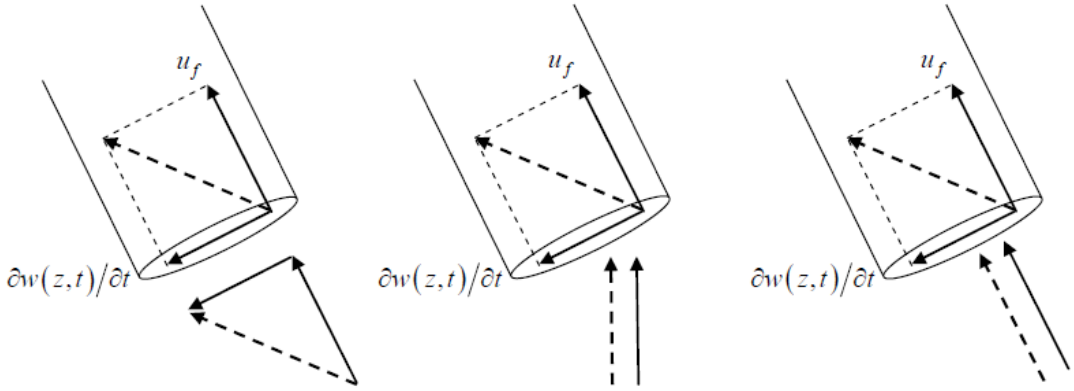
$$\left.\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L} = 0$$
$$EI\frac{\partial^3 w(z,t)}{\partial z^3} - m_f u_f \left.\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\right|_{z=L} = 0 \qquad (5)$$

Первые уравнения в (3)-(5) отражают отсутствие изгибного момента, в то время как вторые описывают сдвиговую силу на свободном конце балки. Графическое объяснение каждого из трех граничных условий представлено на рис. 4а, б и в, соответственно. В первом случае предполагается, что пространственно-усредненный вектор скорости жидкости ниже входного отверстия трубы сонаправлен с вектором скорости жидкости внутри трубы, результатом чего является отсутствие изгибного момента и сдвиговой (перерезывающей) силы. Во втором случае предполагается, что жидкость движется всегда вертикально, т.е. тангенциально оси невозмущенной балки. В третьем случае предполагается, что втекающая жидкость всегда сонаправлена с серединной линией балки, т.е. движется тангенциально оси возмущенной балки.

Систему (1) удобно исследовать, используя метод конечных разностей, который позволяет перейти от дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Согласно данному методу исходная распределенная система разбивается на число элементов (узлов) каждый из которых описывается ОДУ, а соседние элементы связаны между собой посредством общих переменных (см. рис. 5).

Пространственные производные в данном случае имеют вид:

граничные условия № 1 граничные условия № 2 граничные условия № 3



(а) (б) (в)

Рис. 4. Три типа граничных условий на свободном конце балки.

$$\frac{\partial^4 w(z,t)}{\partial z^4} = \frac{w_{i-2}(t) - 4w_{i-1}(t) + 6w_i(t) - 4w_{i+1}(t) + w_{i+2}(t)}{(\Delta z)^4},$$

$$\frac{\partial^3 w(z,t)}{\partial z^3} = \frac{-w_{i-2}(t) + 2w_{i-1}(t) - 2w_{i+1}(t) + w_{i+2}(t)}{2(\Delta z)^3},$$

$$\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} = \frac{w_{i-1}(t) - 2w_i(t) + w_{i+1}(t)}{(\Delta z)^2}, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} = \frac{-w_{i-1}(t) + w_{i+1}(t)}{2\Delta z},$$

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial z \partial t} = \frac{-\frac{\partial w_{i-1}(t)}{\partial t} + \frac{\partial w_{i+1}(t)}{\partial t}}{2\Delta z}.$$

Здесь $\Delta z = L/N$, $i = 1,2,...,N$, где N – общее число узлов.

Подставляя (6) в (1), получим систему N ОДУ. Анализируя выражения (6), нетрудно видеть, что вид пространственных производных в узлах с номерами 1 и 2 подразумевает введение виртуальных узлов с номерами 0 и -1. Также, пространственные производные с номерами $N-1$ и N подразумевают введение виртуальных узлов с номерами $N+1$ и $N+2$. Естественно, все эти виртуальные узлы должны быть исключены из непосредственного рассмотрения. Это нетрудно сделать с помощью граничных условий. Подставляя (6) в (2), получаем систему двух алгебраических уравнений, Решение данной системы позволяет выразить виртуальные переменные $w_{-1}(t)$ и $w_0(t)$ через переменные $w_1(t)$ и $w_2(t)$. Аналогично, подставляя (7) в граничные условия (3) или (4) или (5), получаем систему(ы) двух алгебраических уравнений, решение которой позволяет выразить виртуальные переменные $w_{N+1}(t)$ и $w_{N+2}(t)$ через $w_{N-1}(t)$ и $w_N(t)$. Таким образом, уравнения для узлов с номерами 1, 2, $N-1$ и N отличаются от узлов с номерами $i = 3,4,...,N-2$. Рассмотрение различных форм граничных условий на свободном конце ((3) или (4) или (5)) влияет только на форму уравнений последнего узла с номером N. Полученная система N ОДУ может быть легко проинтегрирована численно.

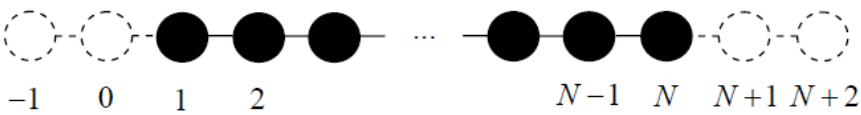


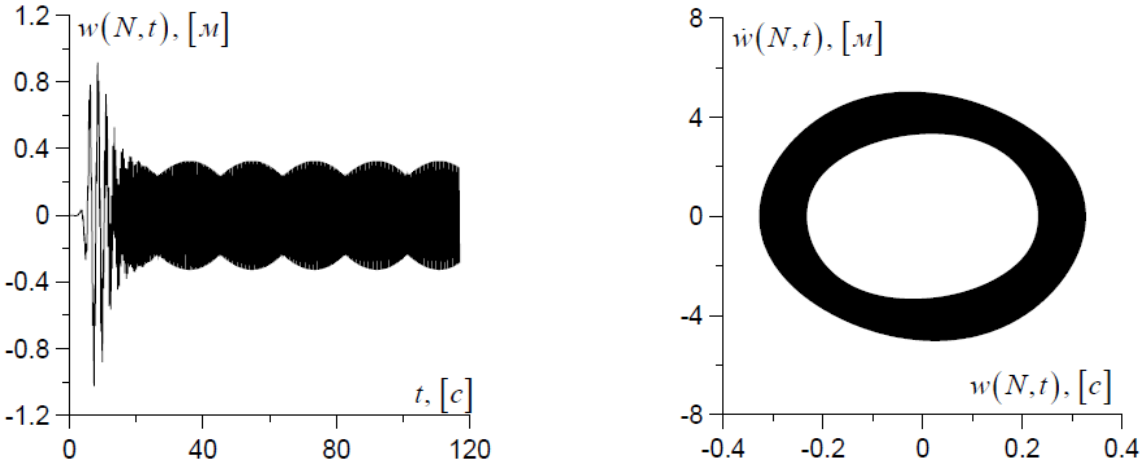
Рис. 4. Разбиение одномерной системы на N элементов (штрихом показаны виртуальные узлы).

Ниже представлены результаты численного эксперимента. Был использован следующий набор параметров:

$$L = 5\text{м},\ \rho_f = 1000\ \text{кг/м}^3,\ \rho_r = 1060\ \text{кг/м}^3,\ D_o = 0.11\ \text{м},\ D_i = 0.104\ \text{м},$$
$$E = 2.2\cdot 10^9\ \text{Н}\times\text{м}^2,\ u_f = 5.1\ \text{м/с},\ \mu = 0.001\text{кг/м}\times\text{с},\ A_1 = 2.4\cdot 10^3,\ A_2 = 0.24 \quad (8)$$

где D_i – внутренний диаметр трубы. Изначально рассматривается вертикально закрепленная труба ($\alpha = 0$).

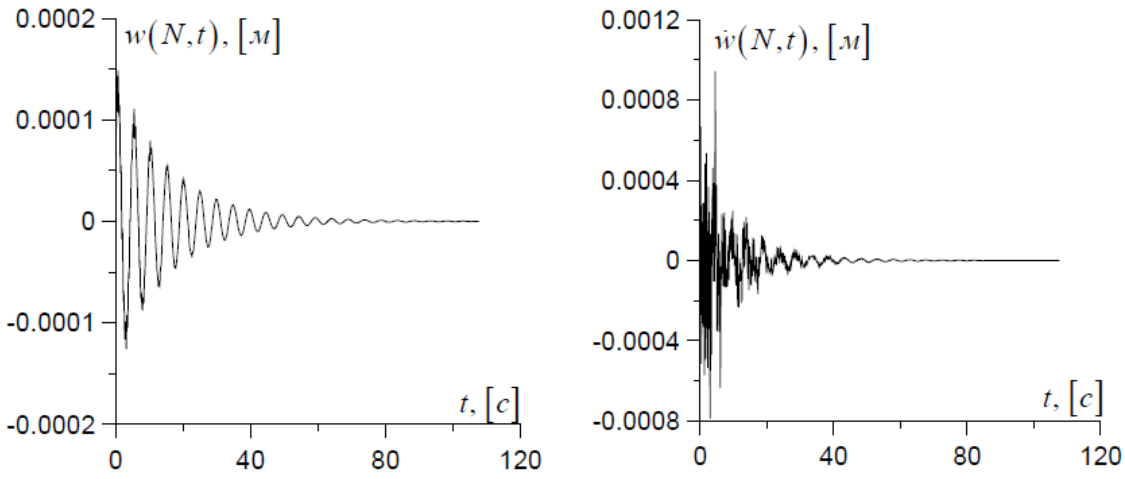
На рис. 6 представлены временная зависимость поперечного смещения и фазовый портрет для случая граничных условий №1. Начальные условия взяты малыми, что видно из переходного процесса, первоначально имеющего место около 30 секунд (см. рис. 6а,б). Впоследствии устанавливается режим квазипериодических колебаний. На рис. 7 представлены аналогичные зависимости для граничных условий №2. Легко видеть, что имеют место затухающие колебания (см. рис. 7а,б). Наконец, рис. 8 относится к случаю граничных условий №3. В этом случае имеют место периодические колебания, образом которых является предельный цикл (см. рис. 8а,б).



(а) (б)

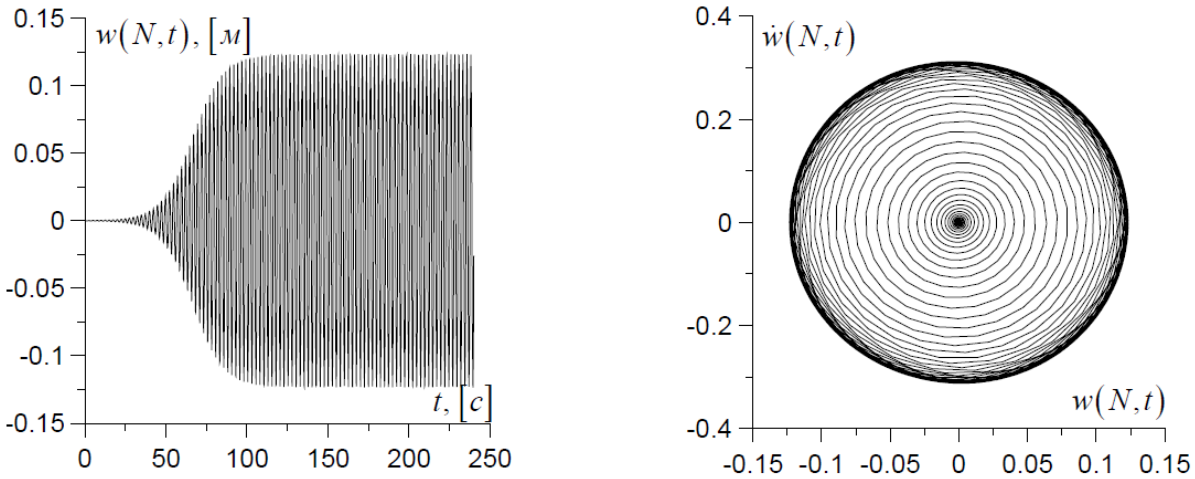
Рис.6. Колебания свободного конца балки в случае граничных условий №1: (а) временная зависимость, (б) фазовый портрет

Что касается угла закрепления балки α относительно вертикали, оказалось, что данный параметр приводит лишь к пространственному сдвигу конца балки, но никак не к качественному изменению формы колебаний (см. рис. 9).



(а) (б)

Рис.7. Колебания свободного конца балки в случае граничных условий №2: (а) временная зависимость, (б) фазовый портрет



(а) (б)

Рис.8. Колебания свободного конца балки в случае граничных условий №3: (а) временная зависимость, (б) фазовый портрет

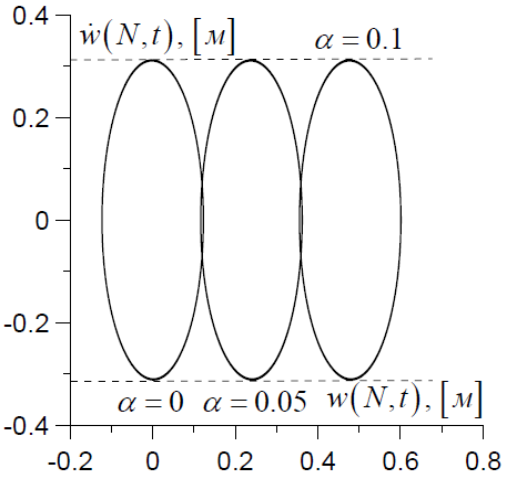


Рис. 9. Влияние угла закрепления балки α .

Таким образом, оба изначальное предположение, о том, что сложная форма колебаний (перемежаемость между вращательными движениями и малыми шумоподобными колебаниями около положения равновесия, а также различие в амплитудах вращательных движений в случае двух идентичных экспериментов) описанных в [2,3] могла быть вызвана несимметричностью фиксирующего кольца не находит подтверждения (по крайней мере, в рамках рассматриваемой модели). Так что же могло вызвать установленное экспериментально качественное изменение режима колебаний трубы? Рассмотрим подробнее граничные условия. Нетрудно видеть, что в случае граничных условий №3 имеется случай периодических колебаний, в то время как в случае граничных условий №1 балка устойчива. Сравнивая вторые уравнения в выражениях (4) и (5), легко видеть, что они различаются членом пропорциональным $\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}$, появление которого фактически приводит к стабилизации колебаний. Сравнив рисунки 8.2.3а и 4б, нетрудно заключить, что в случае, когда жидкость движется строго вертикально, то колебания балки устойчивы, если же движение всасываемой жидкости сонаправлено с серединной линией балки, то имеет место периодический вращательный режим. Понятно, что если в данной модели и возможен режим перемежаемости, то он может иметь место на границе устойчивость-неустойчивость когда некий параметр варьируется таким образом, что он попеременно принадлежит то области устойчивости, то области неустойчивости (в англоязычной литературе это называется marginal instability). Когда труба совершает колебательные движения, то движение потока всасываемой жидкости может быть условно представлено так, как это изображено на рис. 10. Очевидно, что существующий на сегодняшний день набор граничных условий №№1-3 не учитывает возможность вариации (пространственно-усредненного) угла между всасываемой жидкостью и серединной линией балки. Если бы наблюдатель находился на конце трубы, то он бы видел, что струя всасываемой жидкости под трубой совершает медленные периодические колебания (см. рис. 10). Используя эту информацию. Попробуем модернизировать граничные условия. Пусть пространственно-усреднnный (постоянный) вектор скорости втекающей жидкости изменяется между двумя положениями, изображенными на рис. 4а,б (см. рис. 11). Это означает, что угловой член $\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}$ должен быть проварьирован.

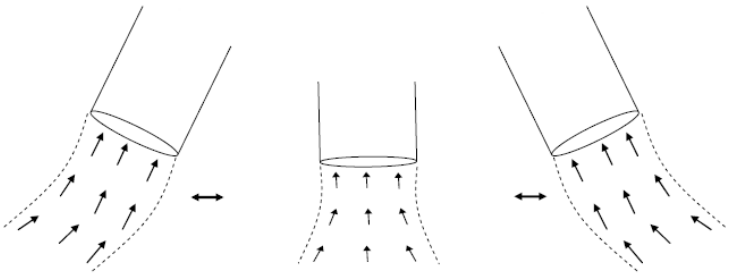


Рис. 10. Колебания потока всасываемой жидкости.

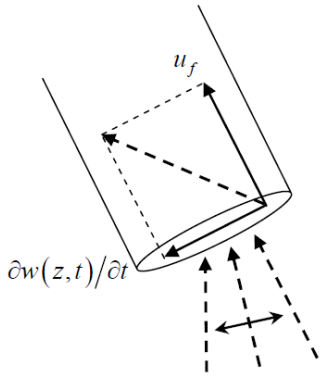


Рис. 11. Периодическая вариация угла между направлением всасываемой жидкости и серединной линией балки.

Модифицированные граничные условия имеют вид:

$$\left.\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=L} = 0$$
$$EI\frac{\partial^3 w(z,t)}{\partial z^3} - m_f u_f \left(p\frac{\partial w(z,t)}{\partial t} - q_1\left(1+q_2\cos\left(q_3\cdot t\right)\right)u_f \frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=L} = 0 \quad (9)$$

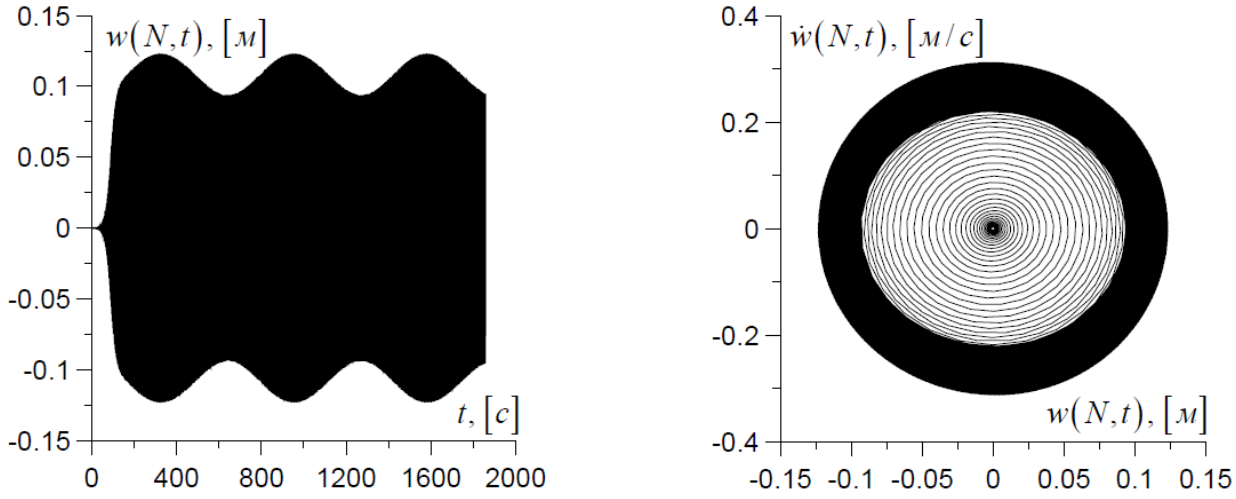
Легко видеть, что при $p = q_1 = 0$ имеют место граничные условия №1, при $p = q_1 = 1$ и $q_2 = 0$ имеют место граничные условия №2, и, наконец, при $p = 1$ и $q_1 = 0$ имеют место граничные условия №3.

Поскольку в эксперименте, описанном в [2,3] нет никакой экспериментальной информации относительно движения жидкости под трубой, будем варьировать параметры p и $q_{1,2,3}$ временно сконцентрировавшись более на математическом аспекте задачи, нежели на физическом. Ниже представлены результаты численного моделирования для $p = q_2 = 1$ для следующих случаев:

1. $q_1 = 0.1$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0$, малые начальные условия (см. рис. 12). Видно, что балка осуществляет квазипериодические колебания.
2. $q_1 = 0.1$, $q_3 = 0.005$, $\alpha = 0$, малые начальные условия (см. рис. 13). Динамика системы аналогична предыдущему случаю. Единственная разница – вдвое большее расстояние между соседними максимумами для вдвое меньшего значения параметра q_3.
3. $q_1 = 0.2$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0$, малые начальные условия (см. рис. 14). Дальнейшее увеличение параметра q_1 приводит к уменьшению минимальной амплитуды колебаний между соседними максимумами (ср. рис. 14 и рис. 12а).
4. $q_1 = 0.4$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0$, малые начальные условия (см. рис. 15). Дальнейшее увеличение параметра q_1 приводит к существенному уменьшению минимальной амплитуды колебаний (ср. рис. 15а и рис. 12а). Малые колебания между соседними максимумами все еще квазипериодические (см. рис. 15б и соответствующий фазовый портрет представленный на рис. 15в).
5. $q_1 = 0.4$, $q_3 = 0.005$, $\alpha = 0$, малые начальные условия (см. рис. 16). Этот случай качественно аналогичен предыдущему. Однако амплитуда колебаний уменьшается до значительно меньших величин (ср. рис. 16в,г и рис. 15б,в, соответственно).

6. $q_1 = 0.6$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0$, малые начальные условия (см. рис. 17). В этом случае после относительно долгого переходного процесса, балка входит в режим квазипериодических колебаний, меньшей амплитуды по сравнению с предыдущими случаями.
7. $q_1 = 0.65$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0$, малые начальные условия (см. рис. 18). Данный случай качественно отличается от случаев 1-4. в этом случае вместо режима квазипериодических колебаний имеют место в целом затухающие колебания, имеющие эквидистантные пики, амплитуда которых становится меньше и меньше (см. рис. 18а). Колебания между соседними максимумами квазипериодические (см. рис. 17б,в, а также г,д).
8. $q_1 = 0.65$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0$, “немалые” начальные условия (см. рис. 19). В этом случае значения параметров те же самые, что и в предыдущем, а начальные условия различные. Видно, что для бóльших начальных условий амплитуды пиков больше, хотя после переходного процесса они появляются в те же самые временные интервалы (см. рис. 19б,в, на которых кривые, относящиеся к случаям 7 и 8 изображены с использованием светлого и темного цветов, соответственно).
9. $q_1 = 0.6$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0.005$ (см. рис. 20а) и $q_1 = 0.6$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0.005$ (см. рис. 20б). В отличие от случаев 1-8, вводится угол закрепления балки α. В противоположность эффекту этого параметра, имеющему место для случая граничных условий №3 (линейный пространственный сдвиг состояния равновесия конца балки), здесь динамика системы качественно иная (ср. рис. 20а,б и рис. 9). Для различных начальных условий временные зависимости абсолютно идентичны.

При дальнейшем увеличении параметра q_1, начиная с $q_1 \approx 0.7$ колебания балки становятся устойчивыми, так как бы это было в случае граничных условий №2.



(а) (б)

Рис. 12. Колебания свободного конца балки в случае модифицированных граничных условий при $q_1 = 0.1$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0$: (а) временная зависимость, (б) фазовый портрет

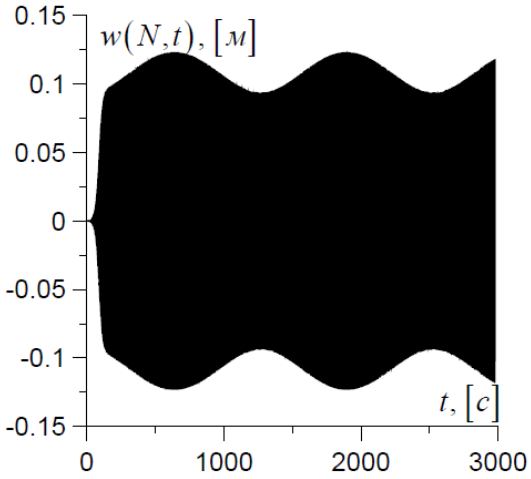
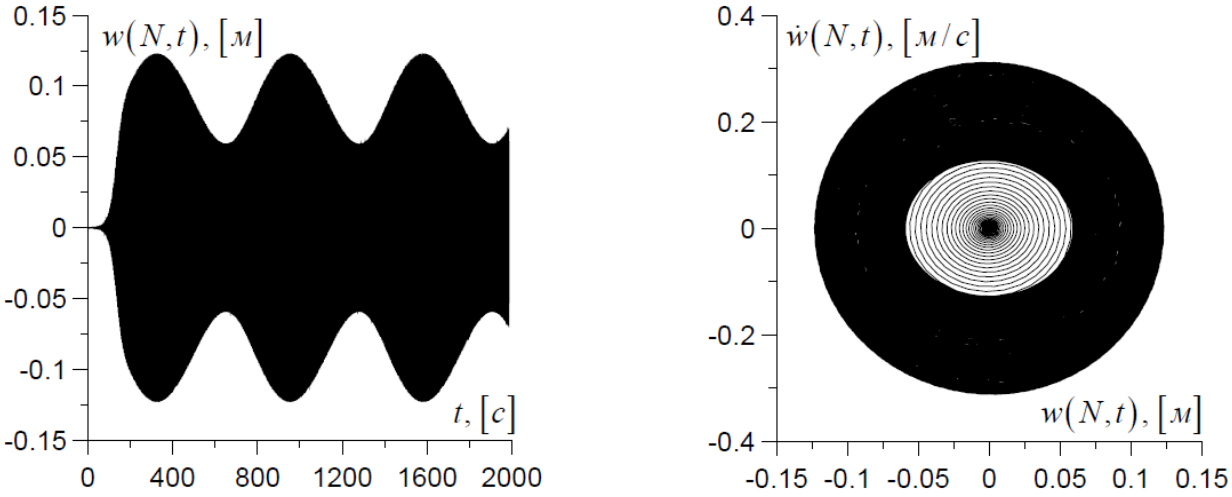
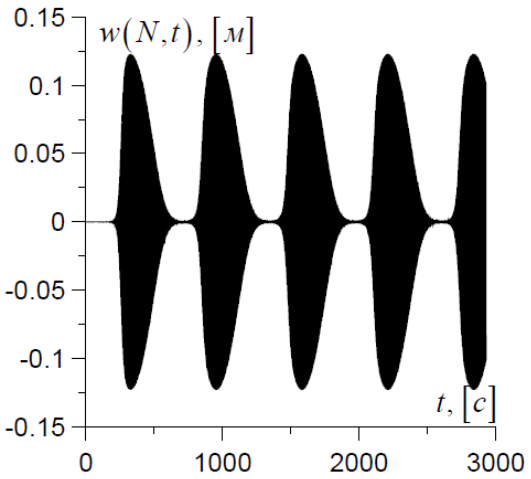


Рис. 13. Колебания свободного конца балки в случае модифицированных граничных условий при $q_1 = 0.1$, $q_3 = 0.005$, $\alpha = 0$

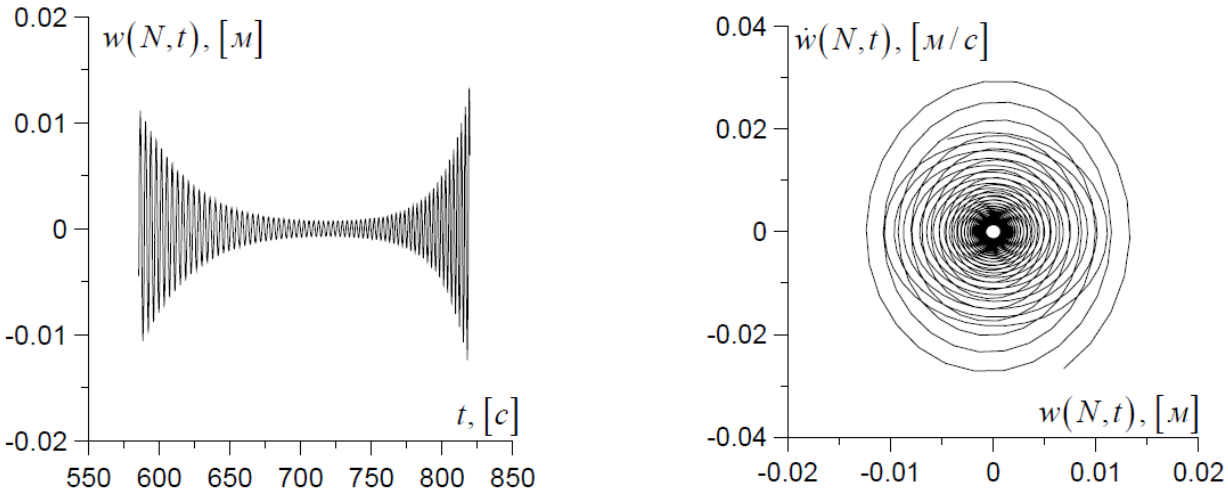


(а) (б)

Рис. 14. Колебания свободного конца балки в случае модифицированных граничных условий при $q_1 = 0.2$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0$: (а) временная зависимость, (б) фазовый портрет

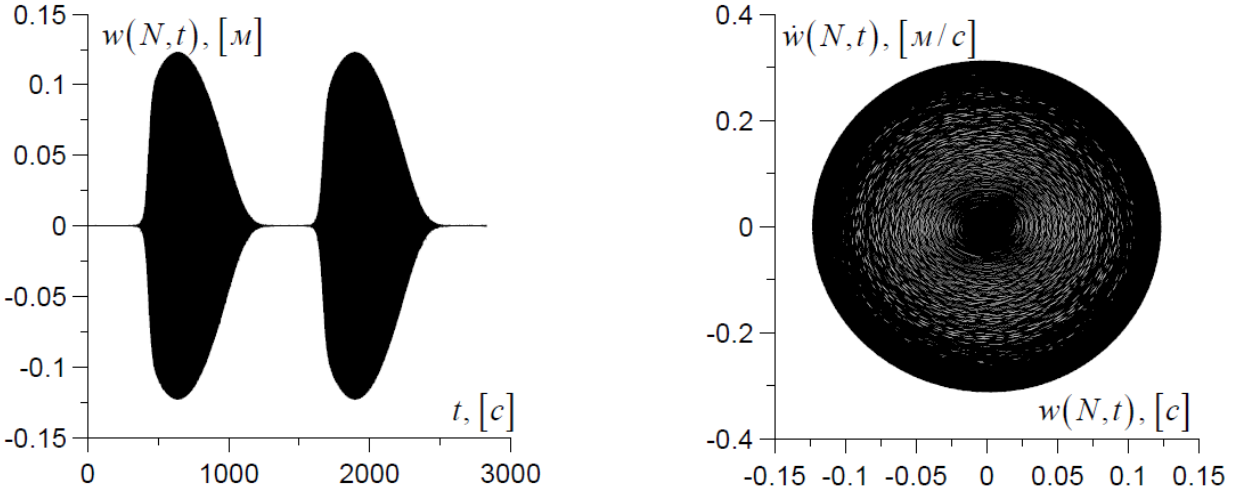


(а)

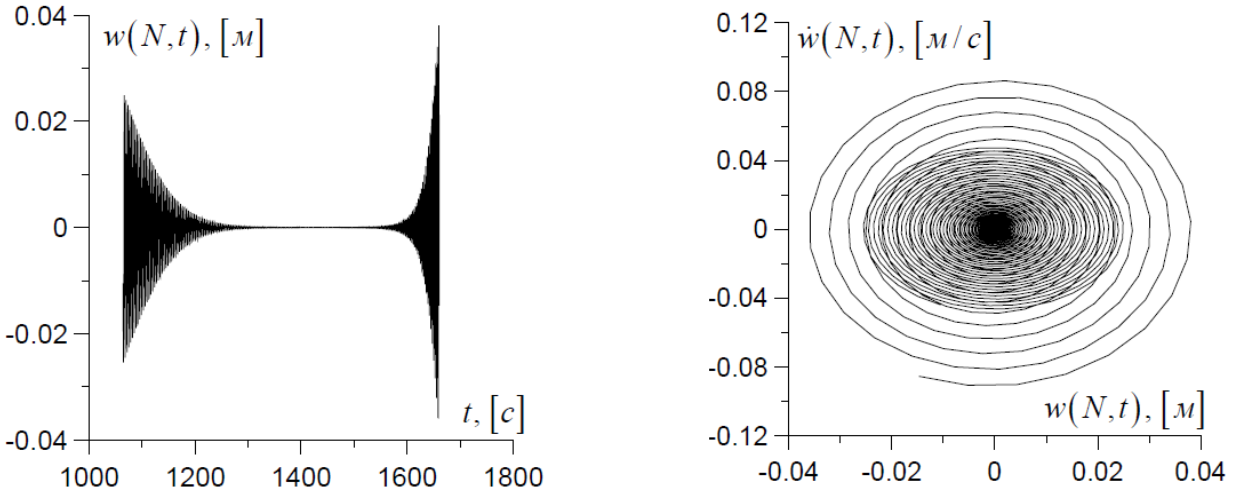


(б) (в)

Рис. 15. Колебания свободного конца балки в случае модифицированных граничных условий при $q_1 = 0.4$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0$: (а),(б) временные зависимости, (в) фазовый портрет

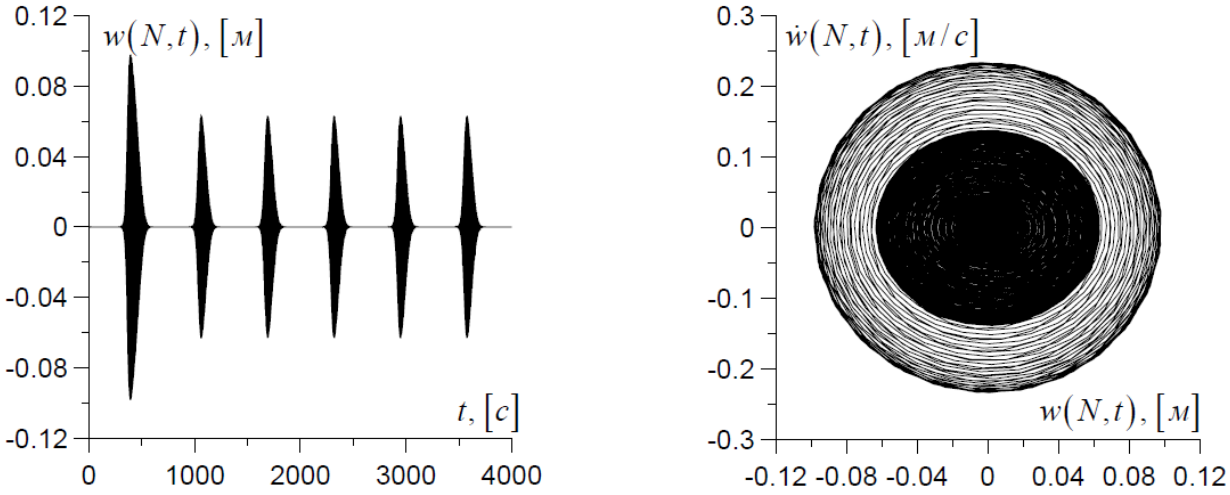


(а) (б)



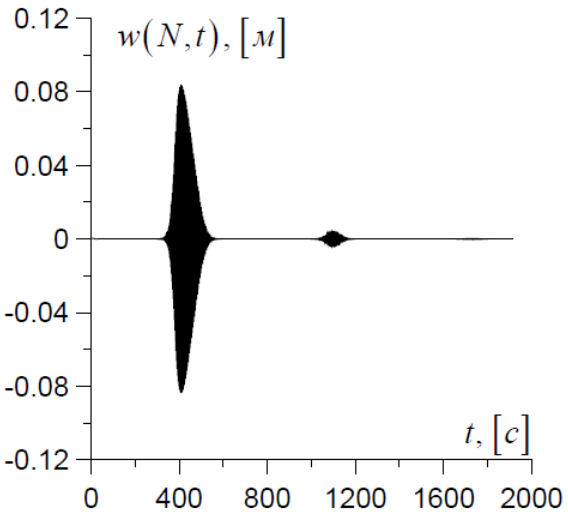
(в) (г)

Рис. 16. Колебания свободного конца балки в случае модифицированных граничных условий при $q_1 = 0.4$, $q_3 = 0.005$, $\alpha = 0$: (а),(в) временные зависимости, (б),(г) фазовые портреты

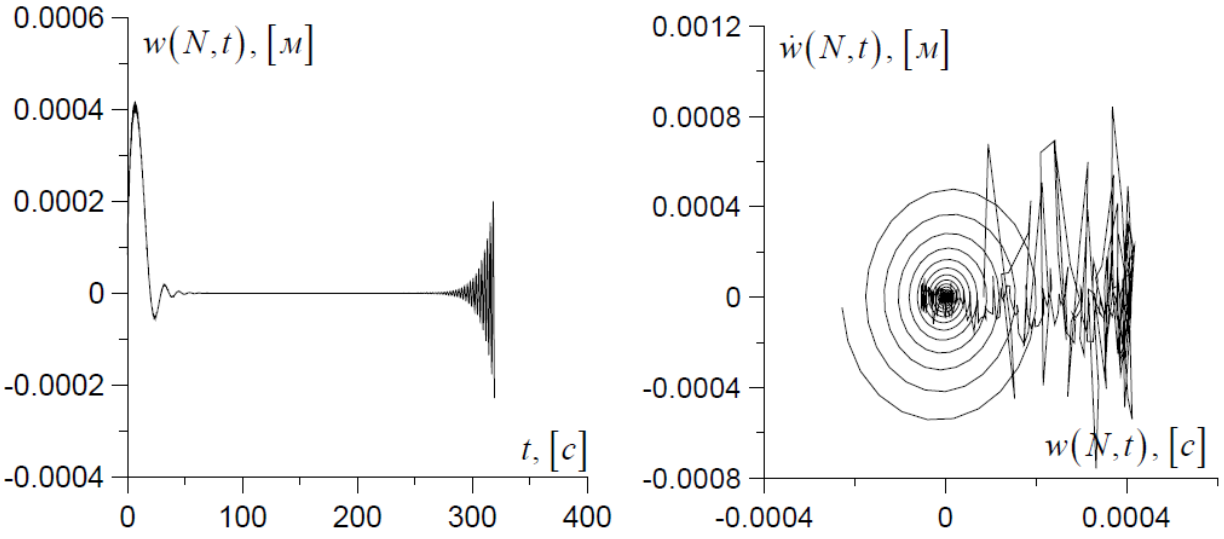


(а) (б)

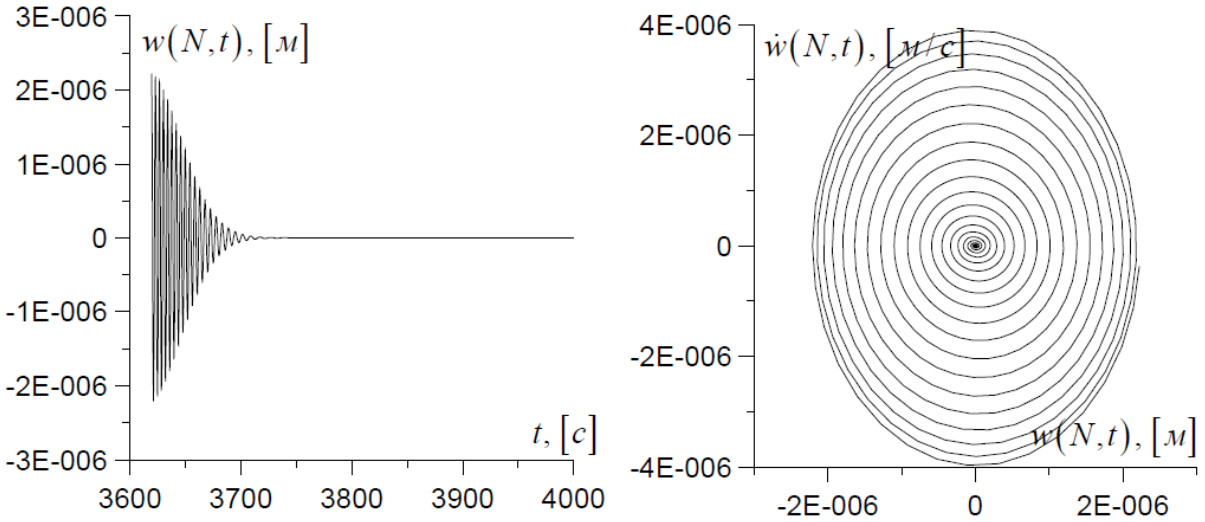
Рис. 17. Колебания свободного конца балки в случае модифицированных граничных условий при $q_1 = 0.6$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0$: (а) временная зависимость, (б) фазовый портрет



(а)

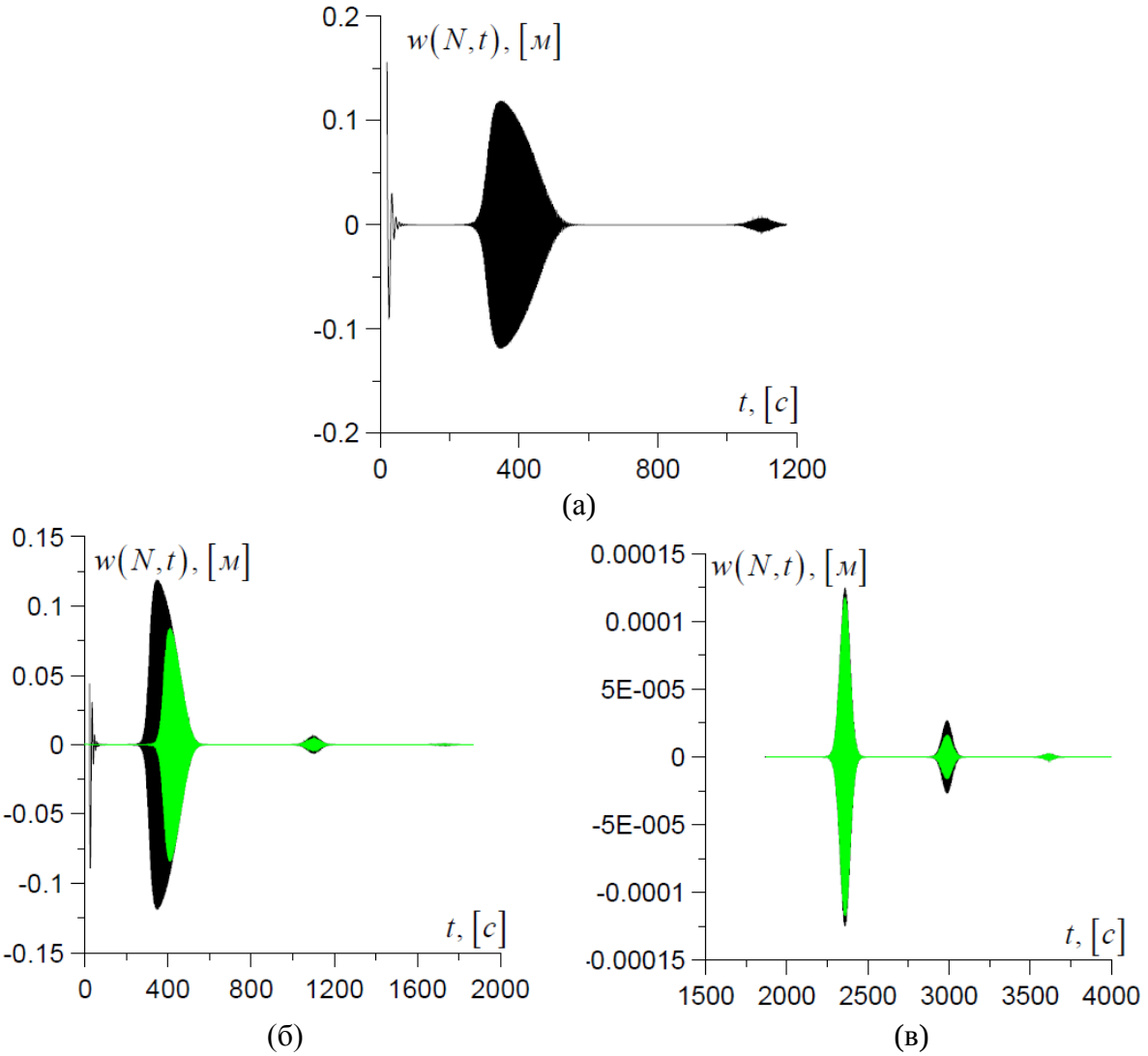


(б) (в)



(г) (д)

Рис. 18. Колебания свободного конца балки в случае модифицированных граничных условий при $q_1 = 0.65$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0$: (а),(б),(г) временные зависимости, (в),(д) фазовые портреты



(а)

(б) (в)

Рис. 19. Колебания свободного конца балки в случае модифицированных граничных условий при $q_1 = 0.65$, $q_3 = 0.01$, $\alpha = 0$: (а) временная зависимость для «немалых» начальных условий, (б),(в) временные зависимости для малых (светлый цвет) и «немалых» (темный цвет) начальных условий

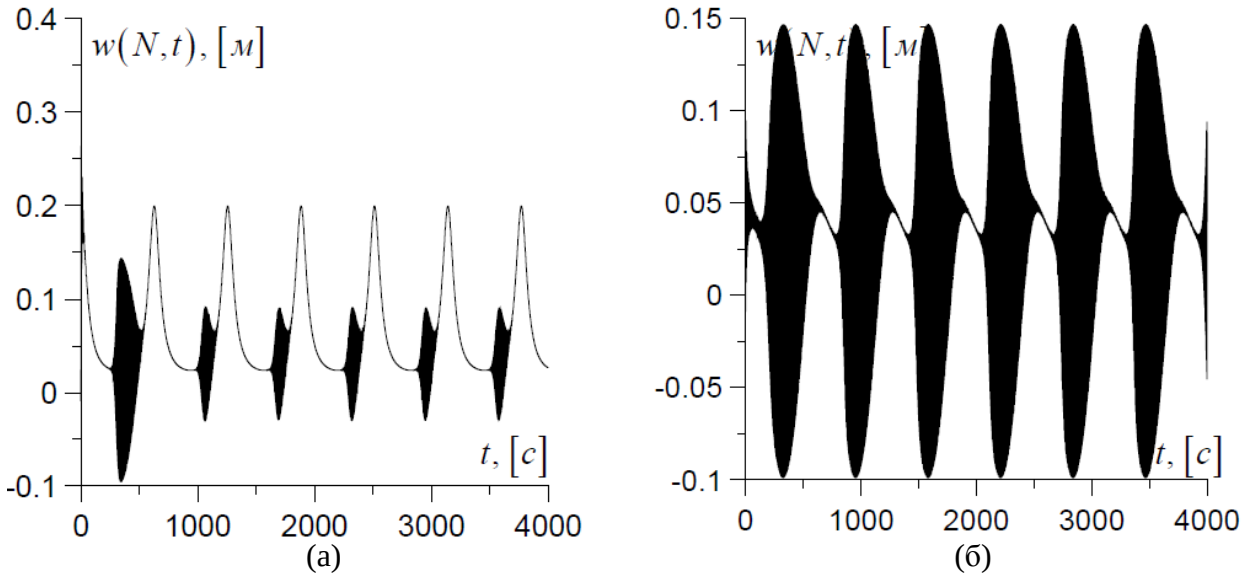


Рис. 20. Колебания свободного конца балки в случае модифицированных граничных условий при $\alpha = 0.005$: (а) для $q_1 = 0.6$, $q_3 = 0.01$, (б) для $q_1 = 0.4$, $q_3 = 0.01$.

Итак, стоит отметить, что, используя общепринятые три типа граничных условий, нельзя предсказать перемежаемость колебательных режимов, в то время как, используя модифицированные граничные условия, – можно. На данном этапе напрашивается вывод о том, что источником, усложняющим колебательный режим балки, является поток всасываемой жидкости, а именно вариация его пространственно-усредненного угла по отношению к серединной линии балки. Поскольку рассмотренная в данном параграфе модель является одномерной, то для уточнения, соответствуют ли периодические колебания одномерной балки вращательным режимам, установленным экспериментально необходимо повысить размерность системы.

Основной вывод заключается в том, что, по всей видимости, причиной перемежаемости различных видов колебаний является определенный тип неустойчивости, называемый в западной литературе marginal instability [1]), которая возникает в случае вариации определенных параметров вблизи границы разделяющей устойчивость и неустойчивость.

Список литературы

1. *Dimentberg, M., Hera, A. and Naess, A. Marginal Instability and Intermittency in Stochastic Systems. Part I – Systems with Slow Random Variations of Parameters // Journal of Applied Mechanics, vol.75 / 041002-1, 2008.*
2. *Kuiper G.L. Stability of offshore risers conveying fluid / Eburon, 2008, 172 pp.*
3. *Kuiper G.L., Metrikine A.V. Experimental investigation of dynamic stability of a cantilever pipe aspirating fluid // Journal of Fluids and Structures, Volume 24, Issue 4, P.541-558, 2008.*
4. *Païdoussis M.P. Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial flow, Volume 1 / London: Academic Press, 1998.*

Автор хотел бы выразить благодарность Российскому Научному Фонду «Поддержка и Развитие» за поддержку при подготовке данной работы(грант номер 14-19-01637).