УДК 539.3

# ЛИНЕЙНЫЙ ИЗОТРОПНЫЙ ОДНОМЕРНЫЙ КОНТИНУУМ КЕЛЬВИНА: УРАВНЕНИЯ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

**© Владимир Иванович Ерофеев[1,2], Александр Васильевич Жидков[2], Федор Сергеевич Пеплин[2]**

*[1] Институт проблем машиностроения Российской академии наук*
*[2] Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского*

***Аннотация.*** *Континуум Кельвина рассматривается как частный случай континуума Коссера при условии независимости внутренней энергии от угла собственного вращения и его градиента. В линейном приближении получены одномерные уравнения в перемещениях в предположении изотропии среды. Для этого простейшего варианта проанализированы дисперсионные зависимости.*

***Ключевые слова****: обобщенный континуум, континуум Кельвина, континуум Коссера, волновые процессы.*

# LINEAR ISOTROPIC ONE-DIMENSIONAL KELVIN CONTINUA: EQUATIONS IN DISPLACEMENTS AND DISPERSIVE RELATIONS

**Vladimir I. Erofeev[1,2], Alexander V. Zhidkov[2], Fedor S. Peplin[2]**

*[1] Mechanical Engineering Research Institutes, Russian Academy of Sciences*
*[2] Lobachevsky State University of Nizhniy Novgorod*

***Abstract****. Kelvin Continua is considered as a specific case of Cosserat media provided that strain energy does not depend on both an angular velocity of a proper rotation of a point-body and its gradient. One-dimensional equations in displacements for isotropic Kelvin continua in linear approximation are statet. For this case dispersion relations are studied.*

***Key words****: generilized continua, Kelvin continua, Cosserat continua, wave processes*.

## Введение

Лорд Кельвин (У. Томсон) «представил себе модель квазижесткого эфира, построенную из гиростатов. Эта проблема очень сложна. Дело сводилось к отысканию системы, оказывающей сопротивление только деформациям, которые связаны с вращением» [1]. Хотя эти идеи не были сформулированы математически, они вдохновили братьев Эжена и Франсуа Коссера на создание теории микрополярной среды [2,3], что знаменовало собой начало перехода в МСС от механики Ньютона, исходым объектом которой является материальная точка, к механике Эйлера, имеющей в качестве исходного объекта твердое тело [4,5].

Математическая модель среды Кельвина была сконструирована лишь в конце прошлого века П.А. Жилиным и Е.Ф. Грековой. В опубликованных ими работах [6-8] континуум Кельвина трактуется как частный случай среды Коссера при условии независимости внутренней энергии $U$ от угла собственного вращения частицы $\varphi$ и его градиента $\nabla\varphi$ (см. рис. 1, взятый из [8]):

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial U}{\partial \nabla \varphi} = 0 \qquad (1)$$

В упомянутых статьях получены нелинейные определяющие соотношения и линейные уравнения в перемещениях континуума Кельвина. В них также отмечаются аналогии

континуума Кельвина с теорией неклассических оболочек, а такжетеорией ферромагнетиков, находящихся в состоянии насыщения. В [7] приводятся дисперсионные соотношения для линейного приближения при довольно общих предположениях относительно симметрии упругих свойств среды.

Определенный интерес представляет изучение закономерностей распространения волн в континууме Кельвина на примере самой простой модели, которая только может быть. В настоящей статье мы ограничимся линейным приближением, считая движение среды одномерным, а упругие константы изотропными. Для такого варианта континуума Кельвина будут получены уравнения движения в перемещениях и дисперсионные зависимости.

Первые три параграфа статьи призваны раскрыть логику получения уравнений движения и определяющих соотношений континуума Кельвина. Так как эта часть во многом воспроизводит результаты П.А. Жилина и Е.Ф. Грековой, то многие детали и преобразования опускаются. Четвертый параграф посвящен построению линейной теории. Этот материал также представлен в упомянутых выше статьях, однако для покомпонентной записи уравнений нужно использовать ограничения на тензоры упругих модулей, которые в имеющихся публикациях явно не сформулированы. Наконец, пятый параграф посвящен изучению волновых процессов в построенном континууме.

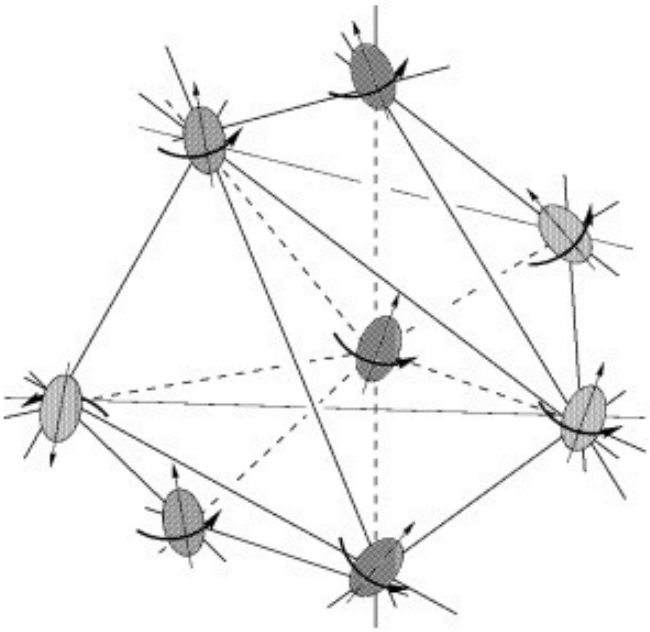


**Рис. 1.** Среда Кельвина.

**Кинематика и динамика континуума Коссера**

Положение тела в начальный момент времени $t = 0$ называется отсчетной конфигурацией. Под действием нагрузок тело деформируется и задает таким образом актуальную конфигурацию. Пусть $\mathrm{r}(\mathrm{q_i}), \mathrm{R}(\mathrm{q_i}, \mathrm{t})$ – радиус-векторы точки континуума в отсчетной и актуальной конфигурациях соответственно, $q_i$ – лагранжевы (материальные) координаты точки $(\mathrm{i} = 1,2,3)$, $\mathrm{R}(\mathrm{q_i}, 0) = \mathrm{r}(\mathrm{q_i})$. Вектор (трансляционных) перемещений определим как разность радиус-векторов в актуальной и отсчетной конфигурациях: $\mathrm{u} = \mathrm{R} - \mathrm{r}$.

Обозначим частное дифференцирование по $i$-ой материальной координате $q_i$ через $\partial_i$ и введем векторы базиса в отсчетной и актуальной конфигурациях как производные

соответствующих радиус-векторов по лагранжевым переменным: $r_i = \partial_i r$, $R_i = \partial_i R$. Тогда набла-оператор Гамильтона в отсчетной конфигурации можно записать как $\overset{o}{\nabla} = r^i \partial_i$ и в актуальной $\nabla = R^i \partial_i$, где $r^i, R^i$ – векторы соответствующих взаимных базисов ($R^i \cdot R_j = r^i \cdot r_j = \delta^i_j$). Если обозначить через $\rho, \rho_0$ значения плотности среды в актуальной и отсчетной конфигурациях соответственно, то $\rho_0 / \rho = \left| \overset{o}{\nabla} R^T \right|$ (закон сохранения массы).

Вращения точек континуума будем отслеживать с помощью ортонормированных базисов, "вмораживаемых" в каждую материальную точку. Обозначим векторы базиса отсчетной конфигурации, "встроенные" в тело-точку с лагранжевыми координатами $q_i$, через $d_j(q_i)$. Примем, что единичный вектор оси симметрии тела-точки $m_0(q_i)$ в недеформированном состоянии совпадает с базисным вектором $d_3(q_i)$. В актуальной конфигурации базис точки повернется некоторым образом и перейдет в $D_j(q_i, t)$. Тогда ортом оси симметрии после деформирования станет вектор $m(q_i) = D_3(q_i)$. В дальнейшем считаем, что оси частиц в отсчетной конфигурации сонаправлены.

Поворот локального базиса тела-точки можно описать с помощью тензора поворота $P$, который переводит локальный базис отсчетной конфигурации в базис актуальной конфигурации: $P \cdot d_i = D_i$. Удобно представить тензор $P$ как композицию поворотов на каждый из углов Эйлера в отдельности: $P = P_3(\psi m_0) \cdot P_2(\theta d_1) \cdot P_1(\varphi m_0)$. Тогда, по теореме Эйлера,

$$P_1(\varphi m_0) = (1 - \cos\varphi) m_0 m_0 + \cos\varphi E + \sin\varphi m_0 \times E$$

($E$ – единичный тензор) и т.д.

Вектор скорости поворота $\omega$ введем с помощью уравнения Пуассона $\dot{P} = \omega \times P$, откуда следует, что $\omega = \dot{\psi} m_0 + \dot{\theta} P_3 \cdot d_1 + \dot{\varphi} P_3 \cdot P_2 \cdot m_0 = \dot{\psi} m_0 + \dot{\theta} \cdot d + \dot{\varphi} \cdot m$, где $d = P_3 \cdot d_1$, $m = P_3 \cdot P_2 \cdot m_0$. Аналогично можно охарактеризовать пространственное изменение тензора поворота, определив вектор $\Phi$ как решение уравнения $\partial_i P = \Phi \times P$, т.е. $\Phi = \partial_i \psi m_0 + \partial_i \theta d + \partial_i \varphi m$.

Инерционные свойства тел-точек при вращении будем характеризовать с помощью центрального тензора инерции $\Theta$, который, в силу осевой симметрии тела-точки, может быть представлен в виде [6-8]

$$\Theta = \lambda mm + \mu(E - mm). \qquad (2)$$

Заметим, что скорость собственного вращения частицы является константой, если внешний момент $L$ не имеет проекции на ось частицы $m$.

**Уравнения движения и определяющие соотношения континуума Коссера**

Обозначим через $Q(R,t), L(R,t)$ массовые плотности внешних сил и моментов соответственно. Пусть $p$ – распределенная сила, а $m$ – распределенный момент, действующие на элементарную площадку с нормалью $n$. Введем тогда тензоры силовых и моментных напряжений $\tau(R,t), \mu(R,t)$, которые определяются равенствами $n \cdot \tau = p, n \cdot \mu = m$. Составляя уравнения балансов сил и моментов, действующих на выделенный объем, преобразуя поверхностные интегралы в объемные с помощью теоремы Гаусса - Остроградского, а также пользуясь произвольностью выбранного объема, получим два тензорных (шесть скалярных)

уравнений движения [8]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tau + \rho Q &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \\ \nabla \cdot \mu + \tau_{\times} + \rho L &= \rho \frac{\partial}{\partial t}(\Theta \cdot \omega) \end{aligned} \qquad (3)$$

Уравнения (3) записаны в актуальной конфигурации. Если в балансовых уравнениях сделать замену переменных под интегралами, перейдя таким образом к областям отсчетной конфигурации, а также ввести тензоры напряжений Пиолы-Кирхгофа $\tau_0, \mu_0$ равенствами $n_0 \cdot \tau_0 = p, n_0 \cdot \mu_0 = m$, где $n_0$ – нормаль к площадке недеформированного тела, то уравнения движения можно переписать в отсчетной конфигурации:

$$\begin{aligned} \overset{o}{\nabla} \cdot \tau_0 + \rho_0 Q &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \dot{u} \\ \overset{o}{\nabla} \cdot \mu_0 + \left(R^{T} \cdot \tau_0\right)_{\times} + \rho_0 L &= \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\Theta \cdot \omega) \end{aligned} \qquad (4)$$

Тензоры напряжений Кирхгофа-Пиолы $\tau_0, \mu_0$ выражаются через определенные ранее тензоры напряжений Коши следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \left|\overset{o}{\nabla} R\right| \overset{o}{\nabla} R^{-T} \cdot \tau \\ \mu_0 &= \left|\overset{o}{\nabla} R\right| \overset{o}{\nabla} R^{-T} \cdot \mu \end{aligned} \qquad (5)$$

Соотношения (4), (5) совпадают с приведенными в [9], если учесть, что используемые нами тензора напряжений суть транспонированные по отношению к задействованным в [9].

Составив далее уравнение, выражающее закон изменения энергии (и считая процесс адиабатическим), после преобразований получим [8]:

$$\rho \dot{U} = \tau_*^{T} \cdot\cdot \dot{A} + \mu_*^{T} \cdot\cdot \dot{K}, \qquad (6)$$

где $A = \overset{o}{\nabla} R \cdot P, K = r^i \Phi_i \cdot P$ – тензоры деформаций,

$\tau_* = \overset{o}{\nabla} R^{-T} \cdot \tau \cdot P, \mu_* = \overset{o}{\nabla} R^{-T} \cdot \mu \cdot P$ – энергетические тензоры напряжений.

Энергетические тензоры напряжений допускают следующую интерпретацию. Если $T^{ij} R_i D_j$ – тензор силовых или моментных напряжений Коши, то энергетический тензор выразится теми же компонентами, но в базисе отсчетной конфигурации: $T^{ij} r_i d_j$.

Формула (6) позволяет получить определяющие соотношения континуума Коссера:

$$\begin{aligned} \tau &= \rho \overset{o}{\nabla} R^{T} \cdot \frac{\partial U}{\partial A} \cdot P^{T} \\ \mu &= \rho \overset{o}{\nabla} R^{T} \cdot \frac{\partial U}{\partial K} \cdot P^{T} \end{aligned} \qquad (7)$$

Используя (5) и (7), можно получить определяющие соотношения для тензоров Пиолы – Кирхгофа:

$$\tau_0 = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \mathrm{A}} \cdot \mathrm{P}^{\mathrm{T}}$$
$$\tau_0 = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \mathrm{K}} \cdot \mathrm{P}^{\mathrm{T}} \qquad (8)$$

Задавшись конкретным видом внутренней энергии $U$ как функции тензоров деформации $\mathrm{A}, \mathrm{K}$, подставив определяющие соотношения (8) в уравнения движения (4), мы получим уравнения континуума Коссера в перемещениях в лагранжевых переменных.

**Определяющие соотношения континуума Кельвина**

Чтобы выполнить требования (1), будем считать функцию $U$ зависящей от некоторых вспомогательных, или приведенных, тензоров деформаций $\mathbf{X}_i$, которые не зависят от угла собственного вращения $\varphi$. Затем из них исключаются те тензоры, которые зависят от градиента $\nabla\varphi$. Тогда, очевидно, условия (1) будут удовлетворены. Ясно, что приведенные тензоры деформаций суть первые интегралы системы 18 обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\partial_\varphi \mathrm{A} = \partial_\varphi \mathrm{K} = 0. \qquad (9)$$

Данная система имеет 17 первых интегралов, следовательно, определитель якобиевой матрицы, составленной из компонент производных "новых" тензоров деформаций по "старым" должен быть равен 17. После исключения интегралов, зависящих от $\nabla\varphi$, останется 14 скалярных функций. В [8] описано 5 полученных таким образом систем приведенных тензоров деформаций. В таблице 1 перечислены эти системы вместе с определяющими соотношениями для тензоров Пиолы. При этом использованы обозначения: $\mathrm{a}_1 = \mathrm{E} - \mathrm{m}_0\mathrm{m}_0$ или $\mathrm{a}_1 = \mathrm{E} \times \mathrm{m}_0$, $\mathrm{a} = \mathrm{E} - \mathrm{m}_0\mathrm{m}_0$.

**Таблица 1.** Приведенные тензоры деформации и определяющие соотношения.

| № | Приведенные тензоры деформаций | Определяющие соотношения |
|---|---|---|
| 1 | $\varepsilon = (\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^{\mathrm{T}} - \mathrm{E})/2 = (\overset{o}{\nabla}\mathrm{R}\cdot\overset{o}{\nabla}\mathrm{R}^{\mathrm{T}} - \mathrm{E})/2$<br>$\mathrm{F} = \mathrm{K}\cdot\mathrm{a}_1\cdot\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = (\overset{o}{\nabla}\psi\mathrm{m}_0 + \overset{o}{\nabla}\theta\mathrm{D}_1)\cdot\mathrm{P}\cdot\mathrm{a}_1\cdot\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{o}{\nabla}\mathrm{R}^{\mathrm{T}}$<br>$\gamma = \mathrm{A}\cdot\mathrm{m}_0 = \overset{o}{\nabla}\mathrm{R}\cdot\mathrm{m}$ | $\tau_0 = \rho_0(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\cdot\mathbf{A} + \frac{\partial U}{\partial \gamma}\mathbf{m}_0 + (\frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}})^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{K}\cdot a_1{}^{\mathrm{T}})\cdot\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$<br>$\mu_0 = \rho_0\frac{\partial U}{\partial \mathrm{F}}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{a}_1{}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{P}^{\mathrm{T}}$ |
| 2 | $\varepsilon, \mathrm{F}_1 = \mathrm{F}\cdot\mathrm{a}, \gamma_1 = \gamma\cdot\mathrm{a}$ | Те же, что в 1 (с заменой F на $\mathrm{F}\cdot\mathrm{a}$, $\gamma$ на $\gamma\cdot\mathrm{a}$) |
| 3 | $\varepsilon_1 = \varepsilon - \mathrm{m}_0\mathrm{m}_0\mathrm{m}_0\mathrm{m}_0, \mathrm{F}\cdot\mathrm{a}, \gamma$ | Те же, что в 1 (с заменой F на $\mathrm{F}\cdot\mathrm{a}$, $\varepsilon$ на $\varepsilon_1$) |
| 4 | $\Phi = \mathrm{K}\cdot\mathrm{a}\cdot\mathrm{K}^{\mathrm{T}} = \sin^2\theta\overset{o}{\nabla}\psi\overset{o}{\nabla}\psi + \overset{o}{\nabla}\theta\overset{o}{\nabla}\theta$<br>$\varepsilon, \alpha = \mathrm{m}_0\cdot\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}_0, \gamma$ | $\tau = \rho_0(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\cdot\mathrm{A} + \frac{\partial U}{\partial \gamma}\mathrm{m}_0 + \frac{\partial U}{\partial \alpha}\mathrm{m}_0\mathrm{m}_0\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{a})\cdot\mathrm{P}^{\mathrm{T}}$<br>$\mu = \rho_0(2\frac{\partial U}{\partial \Phi}\cdot\mathrm{K}\cdot\mathrm{a} + \frac{\partial U}{\partial \alpha}\mathrm{m}_0\mathrm{m}_0\cdot\mathrm{K}\cdot\mathrm{a})\cdot\mathrm{P}^{\mathrm{T}}$ |
| 5 | $\varepsilon_1, \Phi_1 = \Phi - \mathrm{m}_0\mathrm{m}_0\cdot\Phi\cdot\mathrm{m}_0\mathrm{m}_0, \alpha, \gamma$ | Те же, что в 4 (с заменой $\varepsilon$ на $\varepsilon_1$, $\Phi$ на $\Phi_1$) |

Заметим, что системы 1 и 4 содержат все независимые первые интегралы (9), а также несколько зависимых. Исключая зависимые функции из первой системы, получим системы (2) и (3), аналогично из набора (4) получим тензоры (5).

Важно отметить, что системы приведенных тензоров деформаций не являются в полной мере эквивалентными. Различие проявляется в т.н. гипотезе натурального состояния, в

соответствии с которой в отсчетной конфигурации напряжения равны нулю. Обозначим через $[a]_0$ величину нулевого порядка малости в разложении $a$ по перемещениям, т.е. значение $a$ в отсчетной конфигурации. Выберем систему приведенных тензоров деформаций (1). Тогда ограничение на вид внутренней энергии можно записать следующим образом:

$$\tau_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\right]_0 + \left[\frac{\partial U}{\partial \gamma}\right]_0 \mathrm{m}_0 = 0$$
$$\left[\tau\right]_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial U}{\partial \mathrm{F}}\right]_0 \cdot \mathrm{a} = 0 \qquad (10)$$

Задействовав систему 4, мы получим условие равенства нулю напряжений в том же виде, что и в (10), в то время как требование отсутствия моментных напряжений в отсчетной конфигурации выполнится автоматически. Это связано с тем, что, дифференцируя внутреннюю энергию по $\Phi$, мы фактически берем производную по квадрату $\mathrm{K}$. Кроме того, использовать упомянутую систему для получения линейной теории затруднительно, т.к. тензор $\Phi$ в разложении по малым перемещениям не имеет линейных членов. В дальнейшем считаем гипотезу натурального состояния выполненной.

Ограничения (1), которые были учтены выше путем вывода на сцену приведенных тензоров деформаций, могут быть записаны и в терминах тензоров напряжений Коши [4]:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \Leftrightarrow \mu \cdot \mathrm{m} = 0$$
$$\frac{\partial U}{\partial \nabla \varphi} = 0 \Leftrightarrow \tau_{\times} \cdot \mathrm{m} = \mu^{\mathrm{T}} \cdot\cdot \nabla \mathrm{m} \qquad (11)$$

Внутреннюю энергию, следуя [10] (где приведенные тензоры деформаций используются в теории оболочек для тех же целей), при условии не очень больших перемещений можно аппроксимировать квадратичной формой относительно приведенных тензоров деформаций. Примем систему 2. Если предположить, что тело изотропно, то $U$ будет зависеть только от квадратичных инвариантов тензоров. У тензора второго ранга всего 3 квадратичных инварианта [11], у вектора --- один (его длина). Тогда, учитывая симметрию тензора Коши-Грина $\varepsilon$, можно записать:

$$\rho_0 U = M_1 Tr[\varepsilon_1]Tr[\varepsilon_1] + M_2 Tr[\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1] + M_3 Tr[\mathrm{F}\cdot\mathrm{a}]Tr[\mathrm{F}\cdot\mathrm{a}] + M_4 Tr[(\mathrm{F}\cdot\mathrm{a})\cdot(\mathrm{F}\cdot\mathrm{a})] +$$
$$M_5 Tr[(\mathrm{F}\cdot\mathrm{a})\cdot(\mathrm{F}\cdot\mathrm{a})^{\mathrm{T}}] + M_6 Tr[\varepsilon_1]Tr[\mathrm{F}\cdot\mathrm{a}] + M_7 Tr[\varepsilon_1 \cdot (\mathrm{F}\cdot a)] + M_8 \sum_{i=1}^{3} (\gamma_{1i}\gamma_1{}^{i})^2 \qquad (12)$$

**Линейная теория**

Линейная теория построена в работе [8] путем разложения в ряд по перемещениям определяющих соотношений для системы тензоров деформаций (1). Считаем трансляционные перемещения, а также угол нутации, инфинитезимальными, угол собственного вращения конечным, а угол прецессии равным нулю. Также примем, что константы $\lambda, \mu$, входящие в выражение для тензора инерции (2), являются бесконечно малыми. Наконец, считаем гипотезу натурального состояния выполненной. Раскладывая $\tau, \mu$ в ряд по малым перемещениям, полагая $\tau = [\tau]_0$, $\mu = [\mu]_0$, учитывая (10), запишем:

$$\tau = (\mathrm{X}\cdot\cdot\mathrm{g} + \mathrm{Y}\cdot\cdot\mathrm{f})^{\mathrm{T}}$$
$$\mu = (\mathrm{g}\cdot\cdot\mathrm{Y} + \mathrm{Z}\cdot\cdot\mathrm{f})^{\mathrm{T}}, \qquad (13)$$

где $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ - тензоры материальных констант (четвертого ранга), выражения которых

через производные от внутренней энергии можно найти в [8], $\mathrm{g} = \overset{\circ}{\nabla}\mathrm{u} + \theta \times \mathrm{E}$, $\mathrm{f} = \overset{\circ}{\nabla}\theta$ – линейные тензоры деформации.

Выражение для внутренней энергии в линейной теории принимает вид:

$$\rho_0 U = \frac{1}{2}\mathrm{g}\cdot\cdot\mathrm{X}\cdot\cdot\mathrm{g} + \mathrm{g}\cdot\cdot\mathrm{Y}\cdot\cdot\mathrm{f} + \frac{1}{2}\mathrm{f}\cdot\cdot\mathrm{Z}\cdot\cdot\mathrm{f}$$

Определяющие соотношения тогда запишутся как

$$\tau = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \mathrm{g}},\ \mu = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \mathrm{f}}$$

Линеаризовав ограничения (11), получим

$$[\tau_\times]_1 \cdot \mathrm{m}_0 = 0, [\mu]_1 \cdot \mathrm{m}_0 = 0 \qquad (14)$$

Считая базис $\mathbf{r}_i$ ортонормированным, выясним, какие ограничения накладывают соотношения (14) на тензоры упругих модулей. Подставив определяющие соотношения (13) в условия (14), получим:

$$[\tau_\times]_1 \cdot \mathrm{m}_0 = (\mathrm{X}\cdot\cdot\mathrm{g} + \mathrm{Y}\cdot\cdot\mathrm{f})_\times^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{m}_0 = (X_{ijkl} g_{lk} + Y_{ijkl} f_{lk})(\mathrm{r}_j \times \mathrm{r}_i)\cdot \mathrm{r}_3 = (X_{ijkl} g_{lk} + Y_{ijkl} f_{lk})\varepsilon_{ji3} = 0$$

($\varepsilon_{ijk}$ – компоненты тензора Леви - Чивиты в ортонормированном базисе).

Т.к. последнее равенство должно выполняться при любых деформациях $f_{ij}, g_{ij}$, то необходимо признать, что $X_{ijkl}\varepsilon_{ji3} = 0, Y_{ijkl}\varepsilon_{ji3} = 0$. Последние соотношения означают, что

$$X_{12kl}=X_{21kl}, Y_{12kl}=Y_{21kl} \qquad (15)$$

Из второго равенства (14) получаем:

$$\mu \cdot \mathrm{m}_0 = (g_{nm} X_{mnkl} + Z_{klmn} f_{nm})\mathrm{r}_l \mathrm{r}_k \cdot \mathrm{r}_3 = (g_{nm} X_{mn3l} + Z_{3lmn} f_{nm})\mathrm{r}_l = 0,$$

т.е. $g_{nm} X_{mn3l} + Z_{3lmn} f_{nm} = 0$. Отсюда следует, что

$$X_{mn3l}=0, Z_{3lmn}=0 \qquad (16)$$

Линейные уравнения континуума Кельвина в перемещениях имеют вид [8]:

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{\nabla}\cdot(\mathrm{X}\cdot\cdot\mathrm{g} + \mathrm{Y}\cdot\cdot\mathrm{f})^{\mathrm{T}} + \rho\mathrm{Q} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{u} \\ \overset{\circ}{\nabla}\cdot(\mathrm{g}\cdot\cdot\mathrm{Y} + \mathrm{Z}\cdot\cdot\mathrm{f})^{\mathrm{T}} + (\mathrm{X}\cdot\cdot\mathrm{g} + \mathrm{Y}\cdot\cdot\mathrm{f})_\times^{\mathrm{T}} + \rho\mathrm{L} = \rho(\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\varphi\frac{\partial}{\partial t}\theta \times \mathrm{m}_0 + \lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi\mathrm{m}_0)\end{gathered} \qquad (17)$$

Предположим, что тело изотропно. Тогда тензоры материальных констант являются изотропными тензорами. Изотропный тензор $\mathrm{X}$ четвертого ранга в ортонормированном базисе имеет вид [12]:

$$\mathrm{X} = X_1\mathrm{EE} + X_2\mathrm{r}_k\mathrm{E}\mathrm{r}_k + X_3\mathrm{I} = (X_1\delta_{mn}\delta_{pk} + X_2\delta_{mk}\delta_{np} + X_3\delta_{mp}\delta_{nk})\mathrm{r}_m\mathrm{r}_n\mathrm{r}_p\mathrm{r}_k$$

(Здесь $\mathrm{I} = \mathrm{r}_\mathrm{k}\mathrm{r}_\mathrm{m}\mathrm{r}^\mathrm{k}\mathrm{r}^\mathrm{m}$ – единичный тензор четвертого ранга.)

Запишем уравнения (17) для изотропного тела в декартовых координатах, считая перемещения зависящими помимо времени лишь от одной лагранжевой переменной, именно, $x = q_1$, а также учитывая ограничения на тензоры упругих модулей (15), (16):

$$\begin{gathered}(Y_1+Y_2+Y_3)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta+(X_1+X_2+X_3)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1=\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1\\ X_3\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2=\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_2\\ X_3\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_3=\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_3\\ 2(X_2-X_3)\theta+(Z_1+Z_2+Z_3)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta+(Y_1+Y_2+Y_3)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1=\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta\\ (X_2-X_3)\frac{\partial}{\partial x}u_3+Y_3\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2=-\lambda\frac{\partial}{\partial t}\varphi\frac{\partial}{\partial t}\theta\end{gathered} \quad (18)$$

Чтобы завершить линеаризацию, нужно предположить, что хотя бы одна из величин $\frac{\partial}{\partial t}\varphi$ или $\frac{\partial}{\partial t}\theta$ мала. Тогда, однако, система (18) станет переопределенной. Поэтому мы не станем завершать линеаризацию, а последнее уравнение просто исключим из рассматриваемой системы. Тогда (18) примет вид:

$$\begin{gathered}(Y_1+Y_2+Y_3)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta+(X_1+X_2+X_3)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1=\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1\\ X_3\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2=\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_2\\ X_3\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_3=\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_3\\ 2(X_2-X_3)\theta+(Z_1+Z_2+Z_3)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta+(Y_1+Y_2+Y_3)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1=\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta\end{gathered} \quad (19)$$

Решение системы (19) представляет собой все компоненты поля перемещений, кроме угла собственного вращения, который можно выразить через остальные степени свободы с помощью последнего уравнения системы (18).

**Дисперсионные соотношения**

Рассмотрим линеаризованную систему одномерных уравнений континуума Кельвина (19). Второе и третье уравнения являются изолированными волновыми уравнениями, поэтому трансляционные волны, соответствующие поперечному направлению, распространяются с постоянными скоростями $\sqrt{X_3}$. Если предположить, что сумма $\sum_{i=1}^{3}Y_i$, составленная из компонент ответственного за взаимодействие трансляционных и вращательных деформаций тензора $\mathrm{Y}$, равна нулю, то все четыре уравнения окажутся изолированными: первые три будут являть собой волновые уравнения, последнее окажется уравнением Клейна-Гордона.

Пусть $\sum_{i=1}^{3}Y_i\neq 0$. Обратимся к первому и последнему уравнениям (19). Определив из четвертого уравнения функцию $\frac{\partial^4}{\partial \mathrm{t}^2\partial \mathrm{x}^2}\mathrm{u}_1$ и, подставив ее в дважды продифференцированное по времени первое, получим соотношение:

$$A\frac{\partial^4\theta}{\partial x^4}-B\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+D\frac{\partial^4\theta}{\partial x^2\partial t^2}-E\frac{\partial^4\theta}{\partial t^4}=0, \quad (20)$$

где введены обозначения (суммирование ведется по $i$ от 1 до 3

$$A = \sum Y_i - \frac{\sum X_i \sum Z_i}{\sum Y_i}$$
$$B = 2\frac{\sum X_i}{\sum Y_i}(X_2 - X_3)$$
$$C = 2\frac{X_2 - X_3}{\sum Y_i} \qquad (21)$$
$$D = \frac{\mu \sum X_i + \sum Z_i}{\sum Y_i}$$
$$E = \frac{\mu}{\sum Y_i}$$

Задавшись решением (20) в виде бегущей волны $\theta = \theta_0 e^{i(kx-\omega t)}$, получим

$$k^4 + \frac{(B + D\omega^2)}{A}k^2 - \frac{(C + E\omega^2)}{A}\omega^2 = 0 \qquad (22)$$

Решениями $\omega_{1,2}^2$ уравнения (22) будут:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{Dk^2 - C \pm \sqrt{(C - Dk^2)^2 + 4E(B + Ak^2)k^2}}{2E} \qquad (23)$$

В общем случае существует две дисперсионные кривые и одна из них обязательно пройдет через начало координат (обе, если $X_2 = X_3$, в таком случае это будут прямые).

Из (22) следует, что

$$k_1^2 k_2^2 = -\frac{(C + E\omega^2)\omega^2}{A} \qquad (24)$$

Тогда при частотах $\omega^2 < -C/E$ и значении $A > 0$ (в случае $A < 0$ для $\omega^2 > -C/E$) может существовать две дисперсионные ветви. В остальных случаях дисперсионная кривая состоит из одной ветви.

Ветви $\omega_1, \omega_2$ пересекутся, если корень, фигурирующий в формуле (23), обратится в нуль, что достигается при

$$k_{1,2}^2 = \frac{\pm 2\sqrt{-E\left(AC^2 - B^2E + BCD\right)} - 2BE + CD}{4AE + D^2} = \frac{K \pm 2\left|\sum Y_i\right|\sqrt{-(X_2 - X_3)^2\mu}}{T}, \qquad (25)$$

где

$$K = X_2\left(-\mu X_1 + \sum Z_i\right) - X_3\left(-\mu X_1 + \sum Z_i\right) - \mu X_2^2 + \mu X_3^2$$
$$T = \mu^2 X_1^2 + 2\mu^2 X_1 X_2 + 2Z_1\left(-\mu \sum X_i + Z_2 + Z_3\right) + 2Z_2 Z_3 - \mu \sum X_i + 2\mu^2 X_1 X_3 - 2\mu X_1 Z_3 + \mu^2 X_2^2 + 2\mu^2 X_2 X_3 - 2\mu X_2 Z_3 + \mu^2 X_3^2 - 2\mu X_3 Z_3 + 4\mu \sum Y_i^2 + 8\mu Y_1 Y_2 + 8\mu Y_1 Y_3 + 8\mu Y_2 Y_3 + \sum Z_i^2 \qquad (26)$$

Т.к. $\mu > 0$ в силу (2), то $k_{1,2}$ могут принять действительные значения только при $X_2 = X_3$ (тогда дисперсионные кривые будут состоять из одной или двух прямых, проходящих через начало координат). В то же время, варьируя материальные константы $Y_i, \mu$, можно сделать величину $\left|\sum Y_i\right|\sqrt{-(X_2 - X_3)^2\mu}$ сколь угодно малой и таким образом неограниченно точно

аппроксимировать значения $k_1, k_2$ их общей действительной частью $k_0 = \Re(k_1) = \Re(k_2)$, полагая

$$k_1 \approx k_2 \approx k_0 = \sqrt{\frac{CD - 2BE}{4AE + D^2}}. \quad (27)$$

Заметим, что

$$\lim_{\mu \to 0} k_{0,1,2} = \sqrt{2\frac{X_2 - X_3}{\sum Z_i}}, \quad (28)$$

при этом поправки, вносимые мнимыми частями $k_1, k_2$ в $\omega_i(k_j)\,(i, j = 1,2)$, будут также невелики и можно поэтому считать, что $\omega_1(k_0) \approx \omega_2(k_0)$.

Кривые групповых скоростей $v_{gr1}$ и $v_{gr2}$, соответствующие двум дисперсионным ветвям, могут пересечься при

$$k_3 = \sqrt{-\frac{B(D^2 + 4AE \pm D\sqrt{D^2 + 4AE})}{2A(D^2 + 4AE)}}.$$

Тогда

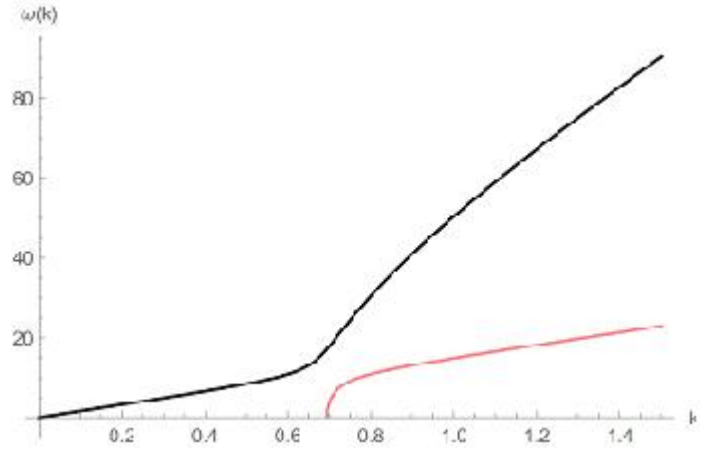
$$\lim_{\mu \to 0} k_3 = \sqrt{\frac{2(X_3 - X_2)\sum X_i}{\sum Y_i - \sum X_i \sum Z_i}} \quad (29)$$

Сравнивая (28) и (29), замечаем, что, если величина $\sum \mathrm{Y_i}$ мала, то $k_3 \approx k_0$. Иными словами, в случае незначительности взаимодействия трансляционной подсистемы с ротационной точка пересечения групповых скоростей может быть сколь угодно близка к точке максимального сближения дисперсионных кривых.

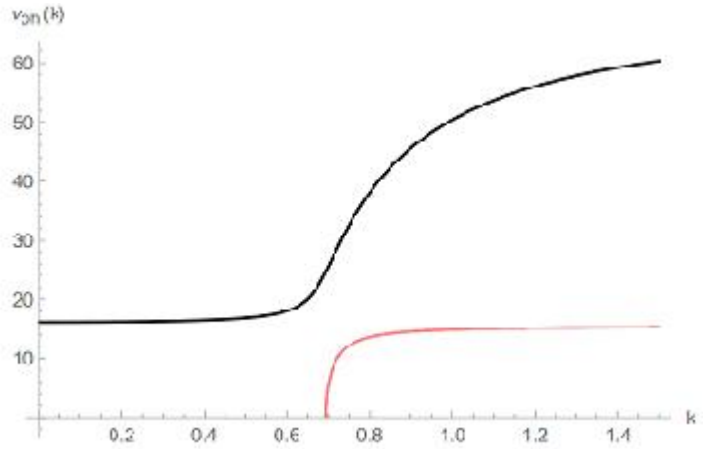
Если $X_2 < X_3$, то, уменьшая $\mu$, в соответствии с (28) в пределе получим мнимую точку пересечения дисперсионных кривых. Тогда, чтобы сблизить $\omega_1$ и $\omega_2$, следует, напротив, увеличивать $\mu$, ибо $\lim_{\mu \to \infty} k_{0,1,2} = 0$. В то же время не стоит забывать, что линейная теория получена в предположении о малости $\mu$. Тогда единственной возможностью сблизить дисперсионные кривые будет минимизация $\sum Y_i$.

Указанные особенности дисперсионных зависимостей проиллюстрированы на рисунках 2 – 4. Заметим, что, если считать материальные константы неотрицательными, то в случае, аналогичном изображенному на рисунке 4, сблизить дсиперсионные кривые без изменения качественного вида картины не представляется возможным: при минимизации Y дисперсионные кривые примут вид, схожий с представленным на рисунке 2. Это следует из того, что ветви $\omega_1, \omega_2$ пересекутся с горизонтальной осью при $k = 0$ и $k = \sqrt{-\frac{B}{A}}$.

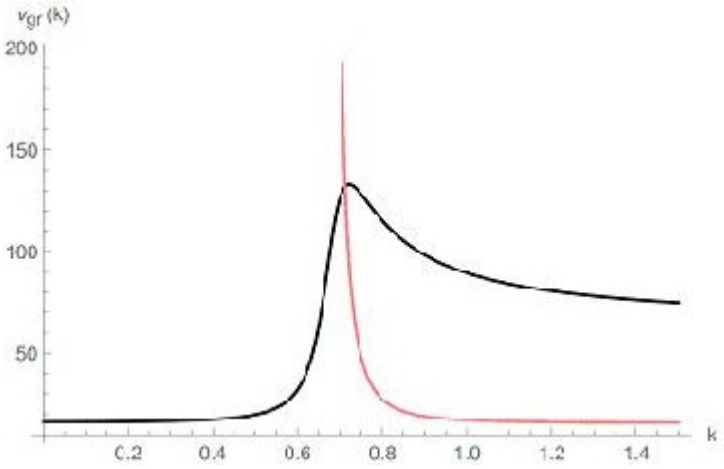
В рассуждениях выше полагалось, что $\omega_{1,2} \in \mathsf{R}$. Пусть теперь $\omega = \omega_\mathrm{r} + \omega_\mathrm{i}\mathrm{i},\ \omega_\mathrm{r}, \omega_\mathrm{i} \in \mathsf{R},\ \mathrm{i}^2 = -1$. Из (22) следует, что хотя бы одно из чисел $\omega_r$ или $\omega_i$ должно равняться нулю. Мнимая составляющая частоты $\omega_i$ выражается формулой (23), в которой следует поменять знаки констант $C$ и $D$ на противоположные.




а)

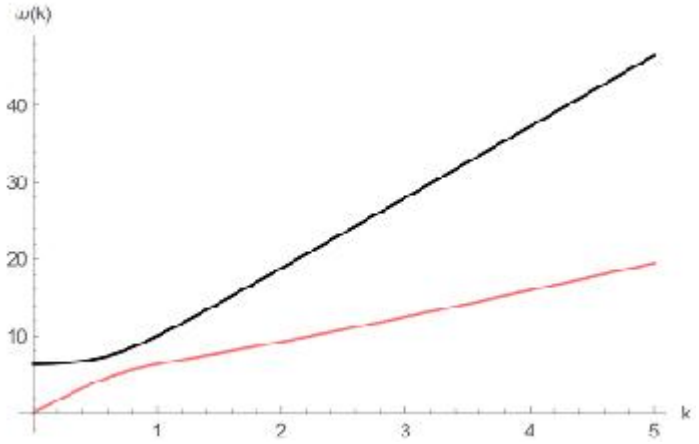



б)

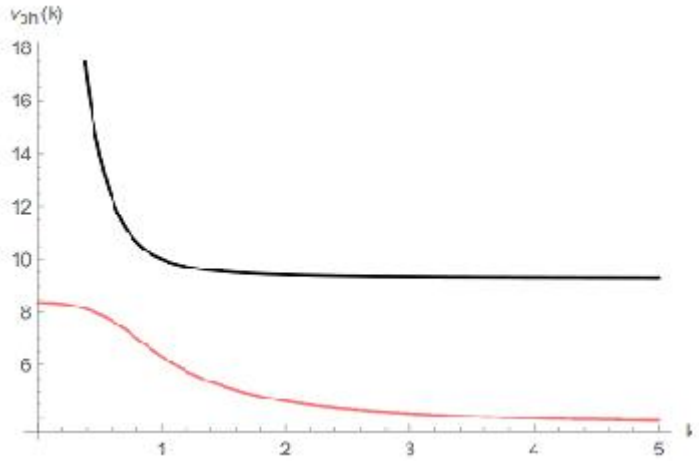



в)

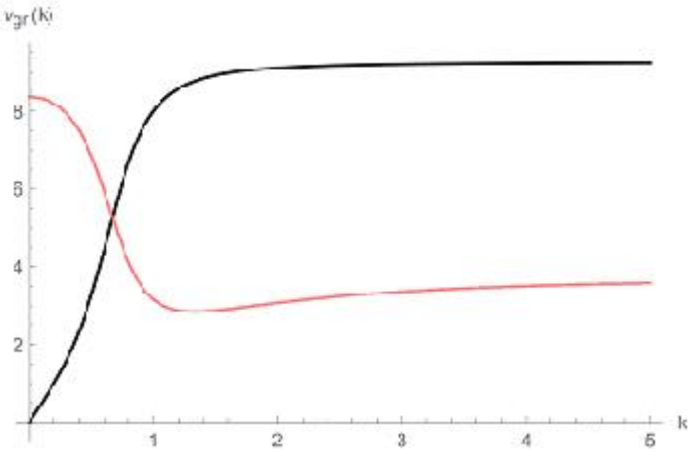
**Рис. 2.** Графики дисперсионных зависимостей, фазовых и групповых скоростей ($\mu = 0.01$, $X_1 = 90$, $X_2 = 90$, $X_3 = 80$, $Y_1 = 10$, $Y_2 = 10$, $Y_3 = 10$, $Z_1 = 15$, $Z_2 = 15$, $Z_3 = 15$).




а)

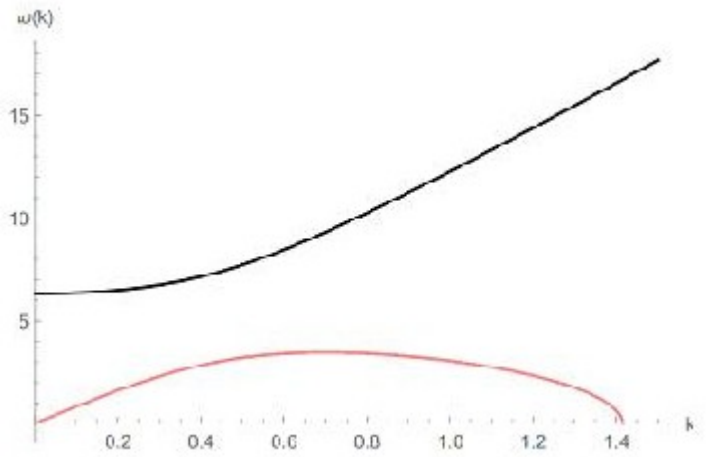



б)

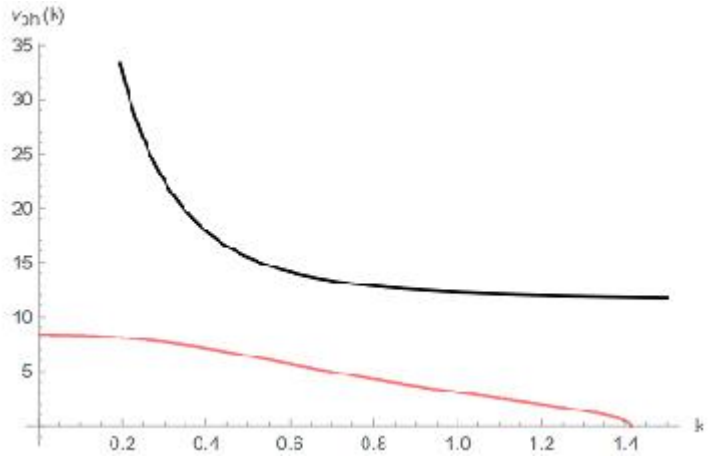



в)

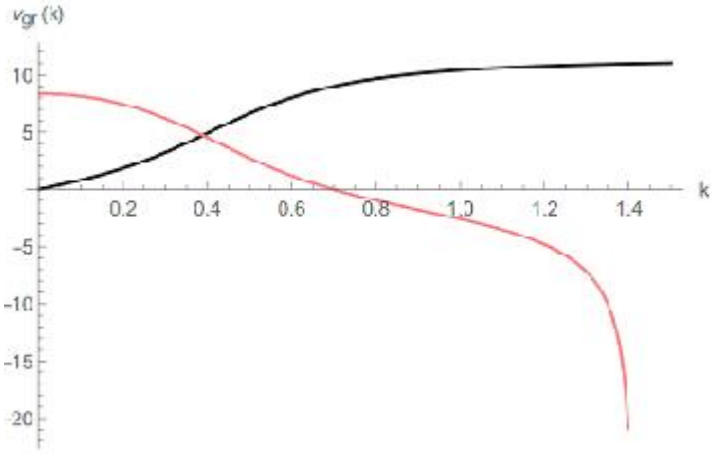
**Рис. 3.** Графики дисперсионных зависимостей, фазовых и групповых скоростей ($\mu = 1$, $X_1 = 10$, $X_2 = 20$, $X_3 = 40$, $Y_1 = 10$, $Y_2 = 10$, $Y_3 = 10$, $Z_1 = 10$, $Z_2 = 10$, $Z_3 = 10$).




а)




б)




в)

**Р.ис. 4** Графики дисперсионных зависимостей, фазовых и групповых скоростей ($\mu = 1$, $X_1 = 10$, $X_2 = 20$, $X_3 = 40$, $Y_1 = 30$, $Y_2 = 30$, $Y_3 = 10$, $Z_1 = 30$, $Z_2 = 10$, $Z_3 = 10$).

**Заключение**

В статье были получены уравнения и дисперсионные соотношения для простейшего варианта континуума Кельвина. При выводе уравнений применялся подход "от общего к частному": из фундаментальных законов механики получены нелинейные уравнения, которые затем линеаризуются и записываются в декартовых координатах. Отметим еще раз, что нелинейные определяющие соотношения и линейная теория были построены в упоминавшихся выше статьях П.А. Жилина и Е.Ф. Грековой, однако для покомпонентной записи уравнений в декартовых координатах потребовалось использовать ограничения на тензоры материальных констант, которые другими авторами явно не сформулированы.

Закономерности протекания волновых процессов в рассматриваемом варианте континуума Кельвина зависят от того, учитывается ли взаимосвязь трансляционной и ротационной подсистем, за которую отвечает тензор $\Upsilon$. Если считать его равным нулю, то полученная система (19) распадается на совокупность изолированных уравнений (трех волновых и одного Клейна-Гордона).

Учет взаимодействия вращательной и поступательной составляющих позволяет получить более сложные дисперсионные зависимости, которые допускают существование гармонической бегущей волны и стоячей волны, состоящие в общем случае из двух ветвей. Эти ветви ни при каких обстоятельствах не пересекутся, однако в окрестности некоторой точки могут подойти друг к другу сколь угодно близко. Примечательно, что кривые групповых скоростей могут пересечься, причем, если тензор $\Upsilon$ мал, то абсцисса точки пересечения будет близка к абсциссе точки наибольшего сближения дисперсионных кривых.

*Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант № 15-08-01836) и Министерства образования и науки Российской Федерации (Государственное задание № 8.2668.2014/К).*

**Список литературы**

[1] Лоренц Г. Теория и модели эфира. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 68 с.

[2] Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris: A. Hermann. 1909 (репринт: 2009).

[3] Коссера Э., Коссера Ф. Заметка о теории эвклидовского действия (репринт) // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т.5. № 1. С.5-76.

[4] Ерофеев В.И. Братья Коссера и механика обобщенных континуумов // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т.2. № 4. С.5-10.

[5] Ерофеев В.И., Герасимов С.И. Континуум Коссера сто лет спустя // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т.5. № 1. С.3-4.

[6] Грекова Е.Ф., Жилин П.А.. Уравнения нелинейных упругих полярных сред и аналогии: среда Кельвина, неклассические оболочки и непроводящие ферромагнетики. // Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2000. Спецвыпуск. С. 24 – 46.

[7] Grekova E.F., Zhilin P.A. Ferromagnets and Kelvin's Medium: Basic Equations and Magnetoacoustic Resonance // Proceedings of the XXV-XXIV Summer Schools "Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems". St. Petersburg, Russia, 1998. Volume 1. P. 259 – 281.

[8] Grekova E.F., Zhilin P.A. Basic equations of Kelvin's medium and analogy with ferromagnets // Journal of Elasticity. 2001. Volume 64. P. 29 – 70.

[9] Generalized Continua – from the Theory to Engineering Applications / Holm Altenbach, Victor A. Eremeyev (eds.). Springer. 2013. 388 p.

[10] Altenbach H., Zhilin P.A. The Theory of Simple Elastic Shells // Critical Review of The

Theories of Plates and Shells and New Applications, ed. by H. Altenbach and R. Kienzler. Berlin, Springer, 2004. P. 1-12.

[11] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. – 872 с.

[12] Lebedev L.P., Cloud M.J, Eremeyev V.A. Tensor Analysis with Applications in Mechanics. New Jersey: World Scientific. 2010. 363 p.