УДК 534.1

О ДИНАМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ СЕМЕЙСТВА ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ ПРИ ОТКАЗЕ ОТ ГИПОТЕЗЫ НЬЮТОНА

© Виталий Львович Крупенин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

krupeninster@gmail.com

Аннотация. *Рассмотрен метод анализа упругих динамических системы, составленных из большого числа подсистем с произвольным числом степеней свободы. Предполагаются, что составная система содержит ряд зазоров (натягов), наличие которых вызывает сильно нелинейных режимов движения вследствие систематического контактного взаимодействия, не предполагаемого ньютоновским. Строится обобщение методик частотно – временного анализа виброударных процессов и сингуляризации, пригодное для исследования указанных систем.*

Ключевые слова: *сильные нелинейности; сингуляризация; операторы линейных систем, интегральные уравнения; время взаимодействия; пороговые функции; большой параметр.*

ABOUT DYNAMIC ANALYSIS OF VIBRO-IMPACT SYSTEMS AT REFUSAL OF NEWTON'S HYPOTHESIS

Vitaly L. Krupenin

Federal Budget-Funded Mechanical Engineering Research Institute, RAS, Moscow, Russia

krupeninster@gmail.com

Abstract. *Describes the method of analysis of the elastic dynamic system composed of a large number of sub-systems with an arbitrary number of degrees of freedom . Assumed that the composite system contains a number of clearances (preloads), which cause the strongly nonlinear regimes of motion due to systematic contact interaction, not intended Newtonian . Constructed frequency synthesis techniques - temporal analysis of vibro-impact processes and singularization suitable for the study of these system*

Keywords: *strong nonlinearity; singularization; operators of linear systems, integral equations; interaction time; threshold functions; large parameter.*

1. Отказ от гипотезы Ньютона оказывается весьма важным при расчетах ряда практически значимых виброударных систем, так как позволяет учесть собственные свойства ударной пары, то есть выяснить, как конечная продолжительность соударений влияет на динамику рассчитываемого механического объекта.

Ниже используются операторные формы записи уравнений движения [1, 2]. Следуя работе [3], рассмотрим семейство стационарных склерономных линейных упруго-вязких систем с полной диссипацией энергии, обозначаемое далее $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{A}_0;\boldsymbol{A}_1,..\boldsymbol{A}_N\}$ (рис.1). Каждой из систем $\boldsymbol{A}_r$ семейства $\boldsymbol{A}$ отвечает поле перемещений $u_r(x_r,t)\in\boldsymbol{R}^3$, причем вектора $x_r\in\boldsymbol{X}_r\subset R^3$ - суть векторные координаты точек систем $\boldsymbol{A}_r$; $t\in\boldsymbol{R}$; $r=0,1,..,N$. Заметим сразу, что в этой статье везде предполагается, что в моделях ньютоновские соударения заменены взаимодействием в неких жестких упругих буферах; чтобы не перегружать рисунки, будем пользоваться сокращенными обозначениями (рис. 1).

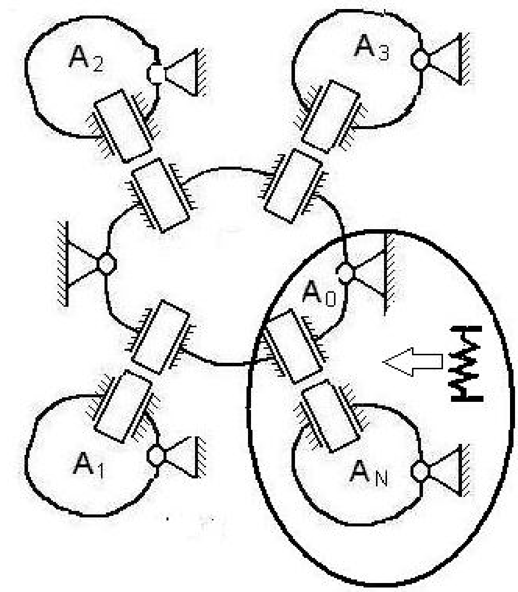

Рис.1

Динамика всех членов семейства $\boldsymbol{A}$ определяется системами матричных операторов динамической податливости [1, 2] $\boldsymbol{L}^{(r)}(\boldsymbol{y}_r,\boldsymbol{x}_r;p)$, где p - оператор дифференцирования. Указанные операторы имеют размерность [3х3] и ставят в соответствие силовым полям $\boldsymbol{f}_r(\boldsymbol{x}_r,t)$ $[\boldsymbol{x}_r\in\boldsymbol{X}_r]$ поля перемещений

$$\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{x}_r,t)=\boldsymbol{L}^{(r)}(\boldsymbol{y}_r,\boldsymbol{x}_r;p)\,\boldsymbol{f}_r(\boldsymbol{y}_r,t). \tag{1}$$

Каждый оператор $L^{(r)}$ является, вообще говоря, интегро-дифференциальным оператором и строится либо при посредстве исходной системы уравнений движения и необходимых дополнительных (например, граничных) условий, либо - на основании обработки экспериментальных данных [5, 6]. Отметим, что в присутствие нелинейных сил $\boldsymbol{f}_r(\boldsymbol{u}_r;t)$ представление (1) обращается в нелинейное операторное уравнение.

Предположим теперь, что каждая из систем $\boldsymbol{A}_r$ $(r=1,\ldots,N)$ взаимодействует (соударяется) с системой $\boldsymbol{A}_0$ следующим образом.

Во-первых, взаимодействие является одномерным, осуществляемым вдоль некоторой линии, т. е. в случае мгновенного удара мы говорили бы о прямом центральном ударе взаимодействующих точечных тел.

Во-вторых, при отказе от обязательного применения гипотезы Ньютона, предполагающей мгновенность соударений, используются результаты, изложенные в работе [4] и монографиях [1, 2]. Рассмотрим класс пороговых функций $\{\Phi\}_\Delta$, относя сюда функции $\Phi(x)=\psi(x-\Delta)\,\eta(x-\Delta)$, x – скалярная величина (координата), $\eta(x)$-функция Хевисайда, а $\psi(x)$ – монотонно возрастающая гладкая функция, такая, что $\psi(0)=0$; Δ - «порог» - координата начала взаимодействия (зазор). В приложениях наиболее важны случаи, когда функции $\psi(x)$ – выпуклы. В дальнейшем будем рассматривать быстровозрастающие пороговые функции. Введем большой параметр $\lambda>>1$. Дальнейшие рассмотрения ограничим системами с сильными нелинейностями порогового типа $\lambda\Phi(x)\in\lambda\{\Phi\}_\Delta$ - классу сильных пороговых нелинейностей [1, 2]. Таким образом, можно получить изображение рис. 2. Функции из класса $\lambda\{\Phi\}_\Delta$ и описывают упругую составляющую силы взаимодействия при учете конечной продолжительности удара.

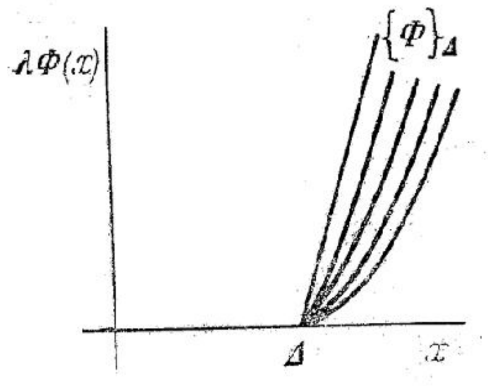

Рис.2

Вопрос об описании диссипативных потерь при коротких ударных взаимодействиях механических систем определяет самостоятельную проблему и в этой работе специально не рассматривается. В простейших случаях некоторые рассмотрения были проведены в [1, 2, 4]. Ниже будем полагать взаимодействие упругим. Имеется также возможность учитывать потери энергии во время взаимодействия при помощи феноменологических гипотез, включая гипотезу Ньютона о коэффициенте восстановления и принципа энергетического баланса [1, 2].

2. Пусть при $\boldsymbol{x}_r=\boldsymbol{x}_{r0}$ в каждой из систем $\boldsymbol{A}_r$ установлен буфер, снабженный жесткой пружиной, при деформации которого система $\boldsymbol{A}_r$ взаимодействует (соударяется через буфер) с системой $\boldsymbol{A}_0$ в точках $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_{0r}$. Таким образом, объединенная система (семейство) $\boldsymbol{A}$ содержит N сосредоточенных ударных пар, в которых возможны короткие соударения конечной продолжительности. Введем относительные координаты

$$\boldsymbol{u}_r(t)=\boldsymbol{u}_0(x_{0r},t)-\boldsymbol{u}_r(x_{r0},t). \qquad (2)$$

и обозначим $\Phi_r[\lambda_r,\boldsymbol{u}_r(t)]$ упругую составляющую силы удара в r-й ударной паре где $\{\lambda_r\}$ – семейство больших параметров одного порядка λ_r>>1, для всех r. Физический смысл этих больших параметров λ_r и есть упругость пружин в r-м буфере. Тогда можно записать систему из $(N+1)$-го операторного уравнения движения объединеннной виброударной системы $\boldsymbol{A}$ (ср.[1]):

$$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}_0,t)=L^{(0)}(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{x}_0;p)\{\boldsymbol{f}_0(y_0,t)-\ \Sigma\Phi_r[\lambda_r,\boldsymbol{u}_r(t)]\ \delta(\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_{0r})\};$$

$$(3)$$

$$\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{x}_r,t)=L^{(r)}(\boldsymbol{y}_r,\boldsymbol{x}_r;p)\{\boldsymbol{f}_r(\boldsymbol{y}_r,t)+\ \Phi_r[\lambda_r,\boldsymbol{u}_r(t)]\ \delta(\boldsymbol{y}_r-\boldsymbol{x}_{r0})\},$$

где суммирование ведется по $r=1,...,N;$ $\delta(\boldsymbol{x})$ - δ-функция Дирака. При помощи (2) можно понизить число анализируемых уравнений. Проведя N вычитаний второго уравнения (3) из первого уравнения (3), получаем для относительных координат (2) при $r=1,...,N$

$$\boldsymbol{u}_r(t)=\boldsymbol{U}_{r0}(t)-L^{(0)}(\boldsymbol{x}_{0r},\boldsymbol{x}_0;p)\Sigma\Phi_r[\lambda_r,\boldsymbol{u}_r(t)]\ L^{(r)}(\boldsymbol{x}_{r0},\boldsymbol{x}_r;p)\Phi_r[\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u}_r(t)] \qquad (4)$$

где, как и ранее, суммирование ведется по $r=1,...,N;$ и обозначено: $\boldsymbol{U}_{r0}(t)=L^{(0)}(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{x}_0;p)\boldsymbol{f}(y_0,t)$-$L^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)\mathbf{f}(\mathbf{y}_r,t)$ - изменение относительных координат (2) в отсутствии взаимодействия. Кроме того введены операторы

$L_k(0,r)(p)=L(0)(\boldsymbol{x}_{0r},\boldsymbol{x}_{0r};p)$; $L_{0r}(p)=L^{(0)}(\boldsymbol{x}_{0r},\boldsymbol{x}_{0r};p)+L^{(r)}(\boldsymbol{x}_{r0},\boldsymbol{x}_{r0};p)$.

Таким образом соотношения (3) можно для удобства переписать и так:

$$\boldsymbol{u}_r(t)=\boldsymbol{U}_{r0}(t)-L_{0r}(p)\Phi_r[\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u}_r(t)]-L^{(0)}(\boldsymbol{x}_{0r},\boldsymbol{x}_0;p)\Sigma\Phi_k[\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u}_k(t)], \tag{5}$$

причем суммирование по k осуществляется при $k\neq r$.

Выведенные соотношения - весьма общи, так как описывают поведение представительного класса линейных между взаимодействиями систем. Если необходимые системы операторов динамической податливости и распределения внешних сил заданы, а гипотеза взаимодействия, определяющая функции Φ_k - конкретизирована, то, найдя из системы уравнений (4) представления относительных координат $\boldsymbol{u}_{r0}$, можно при помощи соотношений (3) найти перемещения любой точки семейства $\boldsymbol{A}$. В работе [3] гипотеза удара была конкретизирована: рассматривалась гипотеза Ньютона. Здесь рассматриваются гипотезы взаимодействия, описываемые классом $\lambda\{\Phi\}_\Delta$.

3. При решении поставленной задачи (5), будем использовать метод сингуляризации [4], состоящий в замене непрерывной сильной нелинейности из семейства $\lambda\{\Phi\}_\Delta$ нелинейностью, описываемой сингулярной обобщенной функцией, отвечающей гипотезе Ньютона, или другим гипотезам, предполагающим мгновенность соударения [1, 2, 4]. Суть метода заключается в следующем.

Пусть имеется консервативная сильно нелинейная система вида

$$x(t)=-L_0(p)[\lambda\Phi(x)],\qquad \Phi\in\{\Phi\}_\Delta,\ \mathrm{Im}L_0(i\omega)=0, \tag{6}$$

где линейная часть системы предполагается фильтрующей, так что $L_0(p)=O(p^{-2})$.

Для отыскания периодических режимов некоторого периода T_0, необходимо решить нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна

$$x(t)=-\int_0^{T_0}\lambda\chi(t-s)\Phi[x(s)]ds. \tag{7}$$

Ядро $\chi(t)$- периодическая функция Грина (ПФГ), отвечающая оператору $L_0(p)$; представления законов движения виброударных ситем разных типов через ПФГ линейных систем лежат в основе частотно-временного анализа виброударных процессов [1, 2, 5]. ПФГ – суть реакция линейной системы на силовое возбуждение, заданное периодической δ-функцией Дирака. Имеют место соотношения для Т-периодической δ-функции:

$$\delta^T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(in\omega t)=\sum_{h=-\infty}^{\infty}\delta(t-hT);\ \mathrm{T}=2\pi\omega^{-1}; \tag{8}$$

Для Т-периодической ПФГ соответственно имеем:

$$\chi(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}L_0(ni\omega)\exp(in\omega t). \tag{9}$$

Существуют приемы, позволяющие просуммировать бесконечный ряд Фурье, входящий в (9) и представить ПФГ в конечной форме. Эти вопросы подробно рассмотрены в упомянутых выше литературных источниках.

Выражение $\Phi[x(s)]$ отлично от нуля только при $x\geq\Delta$, и в этой зоне к координате x приведены еще и дополнительные, малые по сравнению с потенциальной силой $\lambda\Phi(x)$, структурные потенциальные силы упругости системы. При больших λ и скоростях взаимодействия этими силами можно пренебречь и приближенно описать изменение координаты x уравнением второго порядка

$$m\ddot{x} + \lambda\Phi(x) = 0; x(0) = \Delta; \dot{x}(0) = V_0, \qquad (10)$$

где, для определенности, начало взаимодействия совмещено с началом отсчета времени, через V_0 обозначена скорость начала взаимодействия. Величина m имеет размерность массы и может быть вычислена, например как приведенная масса взаимодействующих тел или исходя из вида оператора $L_0(p)$ [1, 2, 6].

Обозначим t_λ - малое время взаимодействия. Таким образом период колебаний $T=T^*+ t_\lambda$, где T^* - время между окончанием некоторого предыдущего взаимодействия и началом последующего. В силу свойств пороговых функций из уравнения (7) находим:

$$x(t) = -\int_0^{t_\lambda} \chi(t-s)\{\lambda\Phi[x(s)]\}ds = -J_\lambda\chi[t-\Theta(t)], \qquad (11)$$

Причем при написании последнего равенства использовалась теорема о среднем. Поэтому $0<\Theta(t)<t_\lambda$, а импульс взаимодействия

$$J_\lambda = -\int_0^{t_\lambda} \lambda\Phi[x(s)]ds, \qquad (12)$$

причем, как доказано в [1,2,] в случае, когда $\lambda\to\infty$: $t_\lambda\to 0$; $J_\lambda\to J=2mV_0$. То есть в пределе приходим к гипотезе о мгновенном ударе; сила ударного взаимодействия записывается через сингулярную обобщенную функцию. Решение задачи в этом случае имеет вид:

$$x(t) = -J\chi(t-\varphi),$$

где φ - произвольный момент удара.

В рассматриваемой системе, при необходимости учета конечности времени взаимодействия, следуя [4, 1, 2] можно приближенно записать

$$x(t) = -J\chi(t - \tfrac{1}{2}t_\lambda - \varphi). \qquad (13)$$

Таким образом, согласно сделанным допущениям эквивалентные удары происходят в моменты времени $t = \tfrac{1}{2}t_\lambda + \varphi$. Далее произвольную фазу совмещая начало отсчета времени с началом взаимодействия, можно положить равной нулю.

Определяющие величины, используемые здесь и ниже, были вычислены в работах [4, 1, 2]. Для больших импульсов взаимодействия, имеем для распространенных в практических расчетах кусочно - степенных характеристиках x: $\lambda\Phi(x) = (x-\Delta)^\alpha\eta(x-\Delta)$, где $\eta(x)$ – функция Хевисайда, $\alpha\geq 1$:

$$\tau_\lambda = \tfrac{1}{2}t_\lambda = \tfrac{1}{2}D_\lambda J_\lambda^\gamma m^{-\gamma/2}, D_\lambda = \sqrt{2\pi m}\,\frac{(\tfrac{1}{8})^{\gamma/2}\Gamma[1/(\alpha+1)]}{(\tfrac{\lambda}{\alpha+1})^{1/(\alpha+1)}(\alpha+1)\Gamma[\alpha+\tfrac{3}{2(\alpha+1)}]}, \gamma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}. \qquad (14)$$

$$\Delta = -J_\lambda\chi[\tau_\lambda(J_\lambda)], J_\lambda = -\frac{\Delta}{\chi(\tfrac{1}{2}t_\lambda)} \approx -\frac{\Delta}{\chi(0) + \tfrac{1}{4}D_\lambda J_\lambda^\gamma m^{-\gamma/2}}; \tfrac{1}{2}D_\lambda J_\lambda^\gamma m^{-\gamma/2} + \chi(0)J_\lambda + \Delta = 0,$$

причем $\Gamma(\alpha)$ – Г-функция Эйлера [1, 2].

Подчеркнем, что приведенные соотношения справедливы при больших (резонансных) значениях импульса взаимодействия. При нерезонансных взаимодействиях необходимо учитывать влияние структурных сил упругости и формулы несколько усложняются.

4. Будем предполагать, что все внешние силы - периодические, с периодом T_1: $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{y}_0,t+T_1)=\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{y}_0,t)$; $\boldsymbol{f}_r(\boldsymbol{y}_r,t+T_1)=\boldsymbol{f}_r(\boldsymbol{y}_r,t)$. Ниже будем ограничиваться, в основном, описанием T-периодических виброударных процессов того же периода: $T=T_1$. Используемые методы [1,2] позволяют найти и более сложные типы искомых периодических движений (см. ниже).

Эти методы периодических функций Грина (ПФГ), которые однозначно определяются операторами динамической податливости. Например, ПФГ $\chi_{0r}(t)$, отвечающая оператору $L_{0r}(p)$ и, зависящая, вообще говоря и от пространственных переменных посредством следующего ряда Фурье:

$$\boldsymbol{\chi}_{0r}(\boldsymbol{y}_r,\boldsymbol{x}_r;t)=T^{-1}\boldsymbol{\Sigma}L_{0r}(in\omega)\exp(in\omega t), \qquad (15)$$

где суммирование ведется по всем целым n.

Для отыскания периодических режимов перейдем от системы операторных уравнений (5) к системе интегральных уравнений периодических колебаний [1,2]. Пользуясь общими приемами частотно-временного анализа, имеем вместо (5):

$$\boldsymbol{u}_r(t)=\boldsymbol{U}_{r0}(t)-\int_0^T \boldsymbol{\chi}_{0r}(t-s)\,\lambda\Phi_r[\boldsymbol{u}_r(s)]ds-\int_0^T \boldsymbol{\chi}^{(0)}(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_0;\,t-s)\sum \lambda\Phi_k[\boldsymbol{u}_k(s)]ds\;, \qquad (16)$$

где суммирование осуществляется при $k\neq r$; ПФГ $\boldsymbol{\chi}^{(0)}(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_0;t-s)$ дается рядом Фурье типа (6).

Для дальнейшего анализа обратимся теперь к используемым гипотезам удара. При этом примем ряд предположений.

Анализ задач такого рода возможен в общем случае без применение специальных численных методов, по-видимому, невозможен. Имея в виду продемонстрировать получение достаточно содержательных и в то же время легко интерпретируемых аналитических решений, откажемся, во-первых от предположения о том, что координаты точек и поля перемещений - суть векторные величины, т.е. предположим, что все координаты изменяются вдоль некоторых осей. Во-вторых, ограничимся изучением аналога прямого центрального мгновенного удара во всех N парах взаимодействия; $\lambda\Phi_k$□$\lambda\{\Phi\}_\Delta$.

Пусть необходимо найти Т-периодический виброударный процесс, где Т-некоторый период. Обычно величина Т связана с периодом внешнего воздействия T_1 соотношениями типа $qT_1=pT$, где q и p - натуральные числа [1] (случаи периодических процессов при непериодических внешних воздействиях, как правило, не рассматриваются). В этом случае взаимодействие происходит через равные промежутки времени и, используя метод сингуляризации, получим для каждой k-й ударной пары

$$\lambda\Phi_k[\boldsymbol{u}_k(s)]=J_{\lambda k}\delta^T(t-t_k-\tau_{\lambda k}); \qquad (17)$$

где t_k -фиксированый момент удара начала k-го взаимодействия, причем $t_k\in[0,T]$. Периодическая δ-функция Дирака $\delta^T(t)$ определена в (8). Далее в (17): $J_{\lambda k}$ - импульс взаимодействия в k-й паре; $\tau_{\lambda k}=\dfrac{1}{2}t_{\lambda k}$ – половина времени взаимодействия в k-й паре. Принимая, как отмечалось сейчас $T=T_1$, и переходя в (16) к скалярным величинам получаем, внося (17) в (16) следующее представления для семейства Т-периодических виброударных процессов при $r=1,\dots,N$:

$$u_r(t)=U_{r0}(t)-J_{\lambda r}\chi_{0r}(t-t_r-\tau_{\lambda r})-\sum J_{\lambda k}\chi^{(0)}(x_{0r},x_0;\,t-t_k-\tau_{\lambda k}), \qquad (18)$$

где суммирование производится при $k\neq r$.

2N - параметрическое представление (18) описывает важнейший в приложениях случай одного удара, приходящегося на один период внешнего воздействия [1, 2]. Для нахождения неизвестных параметров движения воспользуемся конечными условиями, описывающими взаимодействие. Учитывая, что взаимодействия начинаются при $t=t_r$ $(r=1,...,N)$: $u_r(t)=\Delta_r$, получим N линейных алгебраических уравнений, связывающих неизвестные величины J_r и t_r:

$$\Delta_r=U_{r0}(t_r)-J_r\chi_{0r}(\tau_{\lambda r})-\sum J_k\chi^{(0)}(x_{0r},x_0;\ t_r-t_k-\tau_{\lambda k})\quad (r=1,...,N), \qquad (19)$$

где суммирование снова ведется по всем $k\neq r$ и учтено, что так как собственным демпфированием взаимодействующих систем в рассматриваемом приближении пренебрегаем, все ПФГ – четные функции времени.

Имея в виду исследовать конкретные задачи при помощи построения так называемых нелинейных форм колебаний [7], оставшиеся соотношения выпишем ниже. Пользуясь общими схемами методов частотно-временного анализа [1, 2], аналогичные соотношения можно получить и в случае симметричных ударных пар или более сложных комбинированных случаев присутствия в системе ударных пар обеих типов.

При рассмотрении комбинационных периодических режимов, которые могут иметь место при выполнении соотношений $qT_1=pT$ (см. выше), полученные соотношения формально сохраняют свой вид, однако ПФГ теперь строятся на периодах $T=qp^{-1}T_1$. Точно также аналогичные соотношения можно получить и для случаев, когда в ударных парах за один период внешнего воздействия происходит несколько соударений (дребезг) [1, 2].

Таким образом общая методика сингуляризации может быть существенно обобщена на более общие случаи структур виброударных ситем.

5. В заключение отметим, что ещё один принципиальный способ, позволяющий отказаться от гипотезы Ньютона дает введение в рассмотрение так называемых систем с распределенными ударными элементами (см. [7 - 10] и имеющуюся там библиографию). Этот подход позволяет учесть собственные волновые свойства ударных пар и развить методы анализа динамических процессов в протяженных виброударных системах - трубках, кабелях, струнах, мембранах и т. п, взаимодействующих с различного рода препятствиями или друг с другом. Этот подход уже весьма популярен и будет развиваться и далее.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № № 13-08-01235, 13-08-90419).

Список литературы

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.- М.: Наука, 1985.-320 с.

2. Babitsky V.I.,. Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.

3. Крупенин В.Л Периодические движения в семействе упругих систем со взаимодействующими через удары граничными элементами//Проблемы машиностроения и надежности машин, 2001, №3. С.20-28.

4. Крупенин В.Л Расчет механизмов с пороговыми нелинейностями методом сингуляризации. – Машиноведение, 1984, №1. С. 6 -12.

5. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний // Крупенин В.Л., Веприк А.М. и др.- Л.: Машиностроение, 1987. 76 с.

6. Крупенин В.Л О прогнозировании структур вибрационных полей в конструкциях, содержащих ударные пары. //Проблемы машиностроения и надежности машин, 2013. №3. С.78-83.
7. Крупенин В.Л. Трансформация форм колебаний струны, взаимодействующей с двухсторонним ограничителем.- ДАН - Т.313.-№6.-1990 - С. 562-566.
8. Крупенин В.Л. К теории виброударных систем с распределенными ударными элементами // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №1. С. 25-32.
9. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Экспериментальное исследование колебаний струн, взаимодействующих с точечными ограничителями // ДАН, 2001.. Т.379. №3. С. 329-333
10. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Картины стоячих волн с изломами профилей, в распределенных объектах, соударяющихся с препятствиями различных конфигураций (часть I) // Интернет –журнал ВНТР. 2011,.№2 (42), с.3-12.