УДК 534.1

РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ, ВИБРИРУЮЩИЕ ОКОЛО ПРЕПЯТСТВИЙ

© Владимир Константинович Асташев, Виталий Львович Крупенин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

v_astashev@mai.ru

Аннотация. *Дается обзор задач об описании виброударных волновых процессов в распределенных системах, колеблющихся с соударениями около препятствий различного типа. Приводится решение задачи о продольных колебаниях упругого стержня, взаимодействующего с односторонним ограничителем. Методами частотно временного анализа получены точные решения, описывающие свободные и вынужденные колебания. Построены частотные характеристики системы. Дается сравнение найденных точных и полученных ранее приближенных решений.*

Ключевые слова: *распределенные ударные элементы, струны, стержни, нелинейные стоячие волны, изломанные профили волн, периодические функции Грина, негладкие преобразования, скелетные кривые, динамические эффекты.*

DISTRIBUTED SYSTEMS, VIBRATION AROUND OBSTACLES

Vladimir K. Astashev , Vitaly L. Krupenin

Federal Budget-Funded Mechanical Engineering Research Institute, RAS, Moscow, Russia

Abstract. The review of the tasks of describing vibro wave processes in distributed systems , vibrating with collisions around the obstacles of various types. The solution of the problem of longitudinal oscillations of an elastic rod interacting with a one-way stop . Time - frequency methods of analysis we obtain exact solutions describing the free and forced vibrations. Built frequency response of the system. Compares found accurate and previously obtained approximate solutions.

Keywords : distributed percussive elements , strings , rods , nonlinear standing waves , the broken wave profiles, the periodic Green's function , not smooth conversion , skeletal curves , dynamic effects.

1. Краткий обзор. В работах [1-15] теоретически и экспериментально изучались виброударные системы с параллельными ударными парами и (или) распределенными ударными элементами и, в частности, установлена возможность существования синхронных периодических режимов движения типа "хлопков". При их реализации пространственно удаленные части ударных элементов - сосредоточенных или распределенных – могут синхронно соударяться с соответствующими частями различного рода ограничителей. В то же время в работах [1-3, 6, 10, 13 - 15] изучались струны, взаимодействующие с точечными ограничителями хода, и, например, в работах [13 - 15] описаны результаты экспериментов и приведены данные о том, что некоторые из теоретически предсказанных динамических эффектов наблюдаются на практике.

Комбинация прямых протяженных и точечных ограничителей приводит к тавровым препятствиям. Соответствующие задачи рассмотрены, например, в работах [9, 14]. Рассматренные в данной работе однотавровые ограничители моделируются при помощи составного объекта, состоящего из прямого протяженного и точечного ограничителей хода.

Показано, что профили реализуемых стоячих волн несут черты обоих случаев - хлопков и стоячих волн с выстоями.

Общность моделей позволяет рассмотреть и другие задачи относящиеся к расчету систематических соударяющихся своими торцами стержней с неподвижными препятствиями, которые возникают при расчетах разнообразных элементов машинных конструкций и, в частности, при анализе динамики ультразвуковых технологических машин [16 - 19]. Главные динамические эффекты, проявляющиеся в такой системе, рассмотрены в [17, 19]. Использованные в цитируемых работах методы расчета, основанные на идеях эквивалентной линеаризации, позволили не только провести первоначальное теоретическое исследование системы, но и получить соотношения, необходимые для построения реальных машин. Однако, круг вопросов, связанных со свойствами законов движения системы, остался до конца не исследованным и будет, по крайней мере, частично рассмотрен далее.

Рассмотрим примеры. На рис.1, а и б показана наиболее хорошо изученная система: струна, соударяющаяся с неподвижным ограничителем рис. 1, а отвечает равновесному состоянию системы, рис 1, б – реализации трапециевидной стоячей волны – хлопка.

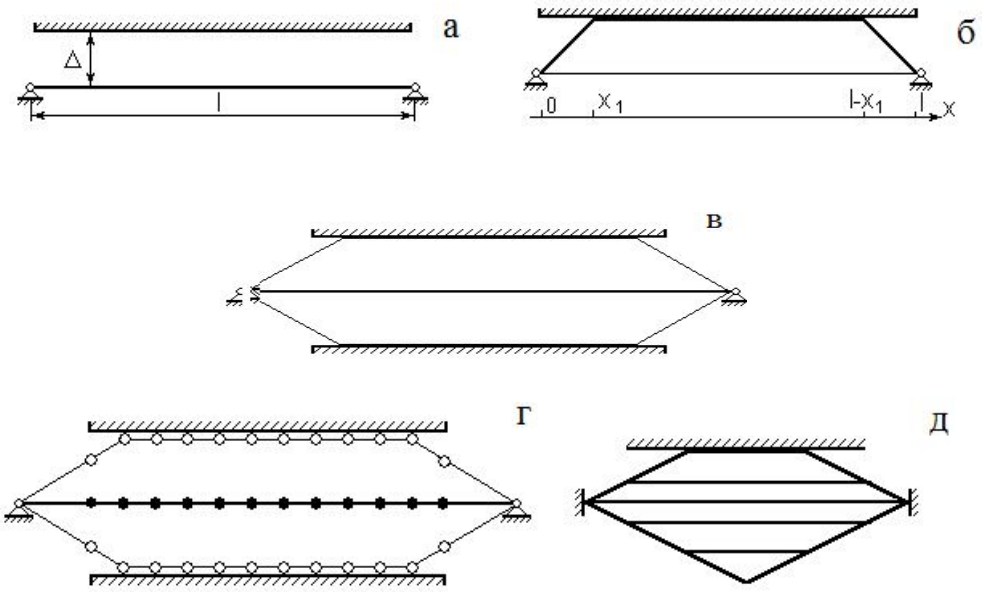


Рис.1.

На рис. 1,в показана система с двусторонним ограничителем, а на рис. 1,г дан пример дискретного аналога такой системы. Здесь также наблюдаются трапециевидные профили стоячих волн, но могут фиксироваться также и иные динамические явления [5, 7, 8]. В системе с односторонним ограничением (рис. 1,д) начальный профиль представляет собой треугольник с вершиной, обращенной вниз. Все промежуточные профили – трапециевидные.

Приложения подобных моделей весьма широки [5, 7]: они используются при расчетах гибких нитей, проводов, тросов, тонкостенных трубок, ремней и других подобных объектов, вибрирующих около протяженных препятствий.

Рассмотрим теперь точечные ограничителя хода распределенных систем. Начнем с примера (рис. 2). В работе [20], например, рассматривалась методика, позволяющая проводить измерения сил, в частности, сил тяжести, при посредстве устройств, содержащих взаимодействующую с точечным ограничителем распределенную систему. Если такую систему описать при помощи натянутой струны, то можно прийти к схеме, данной на рис 2.

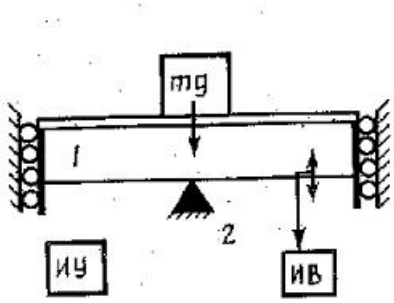


Рис. 2

Натянутая струна 1, возбуждаемая каким-либо источником возбуждения (ИВ), совершает резонансные колебания, взаимодействуя с точечным ограничителем 2. Из-за неизохронности колебаний резонансные частоты такой системы занимают, вообще говоря, некоторый промежуток. В зависимости от величины измеряемой силы (в данном случае силы тяжести mg) изменяется зазор (натяг) и соответственно резонансная частота, регистрируемая измерительным устройством (ИУ), которая ставит ей в соответствие значение величины искомой силы. Изучение таких систем является весьма нетривиальной и важной задачей [2].

Рассмотрим, наконец, тавровые ограничители (Рис. 3, а-в) [9, 14]

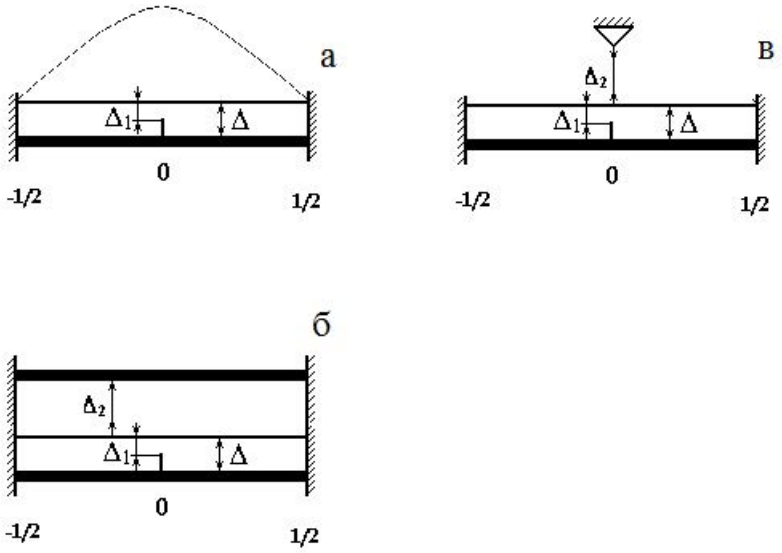


Рис.3

На рис.3,а показан ограничитель, состоящий из прямой протяженной и точечной частей. На рис.3, б показана система, содержащая тавровый и верхний прямой ограничители; на рис.3, в над струной расположен точечный ограничитель, в то время как под ней – тавровый. Смысл приведенных и последующих обозначений понятен из рисунков. Профили устанавливающейся стоячей волны показаны рис 4, а, б.

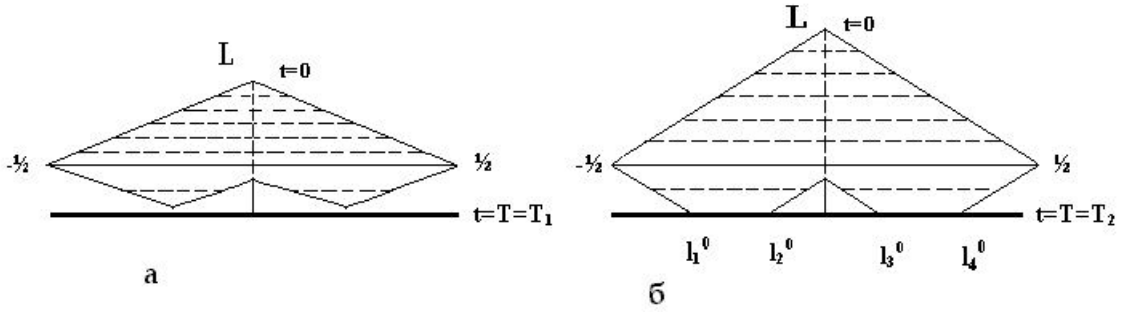


Рис.4.

На рис. 4, а даны профили, порождаемые треугольной начальной конфигурацией, запас начальной потенциальной энергии определяется величиной L. Как и случае точечного ограничителя здесь происходит выстой струны, до момента t= T_1. И далее процесс идет в обратном направлении. Если величина L увеличивается, то получаются профили показанные на рис. 4,б. Здесь, наряду с выстоем центральной точки появляются парные хлопки соседних участков. После мгновенного удара в момент времени $t=T_2 > T_1$, процесс опять-таки идет в обратном направлении.

Практически все динамические эффекты, которые вначале были описаны теоретически находятся в удовлетворительном согласии с экспериментами. На рис. 5 показан трапециевидный профиль струны, с вибрирующими концами и соударяющейся с неподвижным ограничителем [7, 12-15].

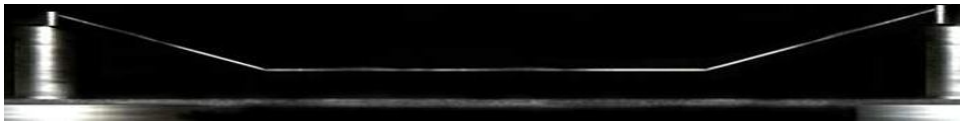


Рис.5.

На рис.6,а-в даны три профиля струны, взаимодействующей с «точечным ограничителем» [7, 14, 15].

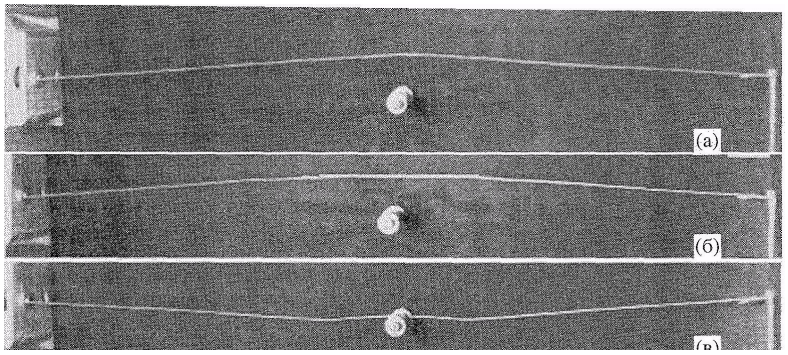


Рис.6

Наконец, на рис. 7, а-в показаны три профиля струны, взаимодействующей с тавровым ограничителем [7, 14].

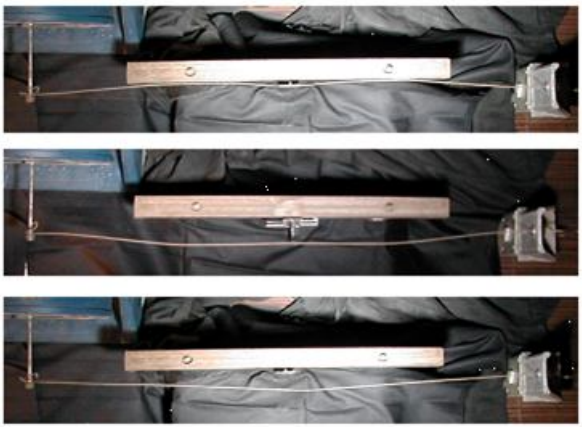


Рис.7

Любая из представленных моделей описывается при помощи нелинейного уравнения Клейна - Гордона, вообще говоря, с правой частью вида

$$\Box u - \Phi(u) = \varepsilon H(t, x, u_t, u_x, \ldots), \qquad (1)$$

где $u = u(x,t)$ - определяющая функция состояния, например прогиб струны в точкех в момент времени t; $\Box u \equiv u_{tt} - u_{xx}$ – оператор Д'Аламбера; ε - малый параметр; H – нелинейная T-периодическая функция времени, зависящая как от независимых переменных, так и от высших частных производных перемещения. Предполагается, что масштаб измерений выбран так, что скорость звука в линейной части системы равна единице. Предполагается также, что гладкость функции H обеспечивает существование и единственность решения хотя бы в обобщенном смысле [1, 3, 4, 6]. К уравнению (1) могут быть добавлены граничные или (и), если необходимо начальные условия.

Данная задача достаточно широко анализировалась.

2. Задача о систематических торцевых соударениях тонких стержней. Учитывая общность уравнений движения продольных колебаний стержня и изгибных колебаний струны, рассмотрим также задачу о расчете виброударных режимов движения тонких стержней. Пример системы – дан на рис. 8.

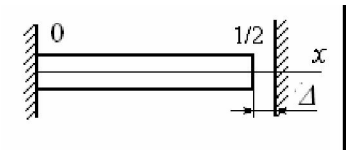


Рис.8

Наряду с этой системой могут быть рассмотрены и другие подобные модели: ограничители могут быть расположены как показано на рис.9

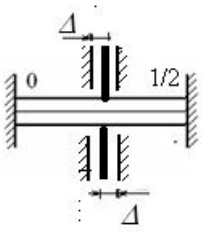


Рис.9.

В середине стержня выполнена проточка, в которую вставлена тонкая шпилька, расположенная между симметричными ограничителями. Модели такого типа имеют

многочисленные приложения, связанные с расчетом соударяющихся протяженных объектов. Например, модель рис.8 возникает, в частности, при анализе динамики ультразвуковых технологических машин [16, 17]. Главные динамические эффекты, проявляющиеся в такой системе, рассмотрены в [18, 19]. Использованные в цитируемых работах методы расчета, основанные на идеях эквивалентной линеаризации, позволили не только провести первоначальное теоретическое исследование системы, но и получить соотношения, необходимые для осуществления реальных машин. Однако, круг вопросов, связанных со свойствами законов движения системы, остался до конца не исследованным.

Вернемся к уравнению (1) применительно к модели рис 8. Будем предполагать, что способы измерения независимых переменных *x* и *t*, определяющие искомое перемещения сечений стержня *u(x, t)* выбраны так, что линейная плотность стержня, а также величина *ES* (*E* и *S* – соответственно модуль упругости материала стержня и площадь его сечения) равны единице. Тогда, как и отмечалось выше, при выбранных способах измерения, единичной оказывается и скорость звука в материале стержня. Без ограничения общности, можно считать координаты концов стержня, находящегося в статическом состоянии равными *x=0* и *x=½*.

Граничные условия поставим в виде:

$$u(0,t)=0,\quad u_x(1/2,t)=0$$

В данном случае функция *H,* в частности, может моделировать присоединенный к концу стержня инструмент и обрабатываемую среду при расчете ультразвуковой технологической машины.

Функция $\Phi(u)$ в уравнении (1) описывает силу взаимодействия свободного конца стержня с неподвижным ограничителем (например, обрабатываемой поверхностью). Пусть взаимодействие осуществляется при $u(1/2,t)=\Delta$. Если $\Delta>0$, имеем систему с зазором, при $\Delta<0$ - с натягом. Таким образом, при всех t

$$u(1/2,t)\le\Delta. \qquad (2)$$

При возникновении контакта стержня с ограничителем его концевое сечение $x=1/2$ будет некоторое время покоиться, находясь в контакте с ограничителем. При этом в неравенстве (2) реализуется равенство. Если t_k – момент начала *k*-го взаимодействия, а θ_k – его окончание, то равенство в (2) реализуется при $t\in[t_k,\theta_k]$, и поэтому

$$\Phi[u(1/2,t)]=\sum_k R_k(t)\delta(x-1/2)[\eta(t-t_k)-\eta(t-\theta_k)], \qquad (3)$$

где $k=1,2,\ldots$ - целые числа; $\delta(x)$ и $\eta(t)$ – функции Дирака и Хевисайда;

$$R_k(t)=u_x(1/2,t)\le 0,\quad t\in[t_k,\theta_k]\ - \qquad (4)$$

- сила реакции ограничителя.

Наличие выстоев контактирующего сечения стержня приводит к парадоксальной для традиционной теории удара, использующей предположение о мгновенном отскоке ударника, ситуации. Оказывается, что при ударе энергия не теряется, но он, тем не менее, оказывается подобным абсолютно неупругому.

Наличие выстоев контактирующего сечения стержня приводит к парадоксальной для традиционной теории удара, использующей предположение о мгновенном отскоке ударника, ситуации. Оказывается, что при ударе энергия не теряется, но он, тем не менее, оказывается подобным абсолютно неупругому.

При реализации в (2) строгого неравенства, в соотношении (4) реализуется равенство, и контакт прекращается. Таким образом, действие ограничителя равносильно возникновению систематических прижимов к нему конца стержня.

В предположении периодичности процесса, обозначим здесь и далее T – период стационарной стоячей волны, устанавливающейся в случае нелинейных периодических колебаний. В соответствии с методами частотно – временного анализа виброударных процессов, запишем интегральное уравнение периодического процесса в виде [5, 7, 11]:

$$u(x,t)=\int_0^T\int_0^{1/2}\chi(x,z,t-s)\{\Phi[u(z,s)]+\varepsilon H(s,x,u_t,u_x,...)\}dzds\,, \qquad (5)$$

где

$$\chi(x,z,t)=4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin[(2k+1)\pi x]\sin[(2k+1)\pi z]\chi_{2k+1}(t)\,.- \qquad (6)$$

Т-периодическая функция Грина (ПФГ) стержня с граничными условиями (1), причем функции

$$\chi_{2k+1}(t)=T^{-1}\left\{[(2k+1)\pi]^{-2}+2\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2k+1)^2\pi^2-(2n+1)^2\omega^2\right]^{-1}\cos(2k+1)\omega t\right\}-$$

ПФГ линейных осцилляторов с собственными частотами стержня $\Omega_k=(2k+1)\pi$; $\omega=2\pi T^{-1}$.

3. Консервативная модель. Для реализации общих схем приближенного изучения резонансных режимов, разработанных в [5, 11], рассмотрим вырожденную консервативную модель. Для этого положим в (1) *ε=0*. Поставим начальные условия в виде

$$u(x,0)=u_0(x)\,,\ \ u_t(x,0)=0\,, \qquad (7)$$

причем для простоты ограничим рассмотрения начальными условиями, обеспечивающие в линейном случае стоячие волны, близкие к первой форме линейных колебаний (кривая 1на рис.2,а). Поэтому предположим, что функция $u_0(x)$ в (7) имеет единственный максимум на границе отрезка $[0,\ ½]$ при $x=½$.

Далее в этом пункте рассматривается один принципиальный пример. Пусть $u_0(x)\equiv A_0(x)=-2E_0x$ (линия 2 на рис.10,а). Очевидно, параметр $E_0\geq 0$ однозначно определяет полную энергию системы. Обозначим искомое решение $A(x,t)$.

В линейном случае эпюры перемещений (профили стоячей волны) в любые моменты времени будут иметь трапецеидальный вид (рис.10,б) за исключением моментов времени $t=½nT_0=n$ *(n=0,1,2,...; T_0=2* – период свободных колебаний стержня), где трапеции вырождаются в треугольники. Свободное сечение стержня движется с постоянной по величине скоростью $v=2D_0$, которая через каждые полпериода меняет направление в моменты наибольших деформаций стержня.

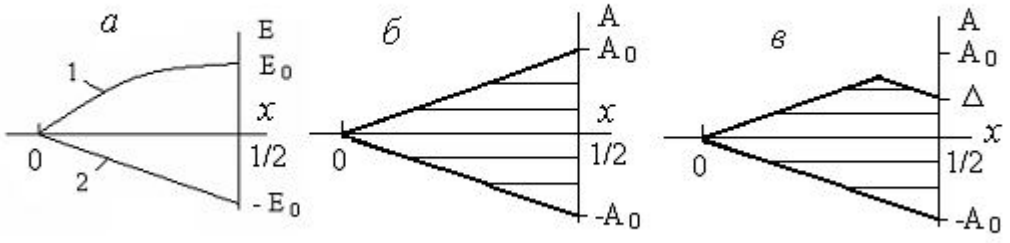


Рис.10

При наличии ограничителя в моменты времени $t = t_k = t_1 + kT$, когда выполняется равенство $A(0,t_k) = \Delta$, свободное сечение $x = 1/2$ стержня достигает ограничителя, мгновенно останавливается, и некоторое время остается в контакте с ограничителем. В течение удара профиль волны $A(x,t)$ образует зубец (рис.10,в). В крайнем положении расположенная слева от вершины зубца часть стержня растянута, а левая - сжата. Затем волна движется в обратном направлении, и остановка сечения прекращается в моменты $\theta_k = \theta_1 + kT$. Моменты начала и окончания удара и период колебаний при естественном предположении $E_0 > |\Delta|$ определяются равенствами

$$t_1 = (E_0 + \Delta)/2E_0, \quad \theta_1 = 1, \quad T = (3E_0 + \Delta)/2E_0. \tag{8}$$

Внося (6) и (8) в (5), найдем

$$A(E_0, x, t) = 2E_0 \sum_{k=1}^{\infty} D_k\left(t^*; \omega, t\right) \sin\left[(2k+1)\pi x\right], \tag{9}$$

где $t^* = (t_2 - t_1) = 1 - t_1$ - время удара; $D_k\left(t^*; \omega, t\right) = t^*\left[T(2k+1)^2 \pi t_1^2\right]^{-1} +$

$$+ 2T^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+1)\omega\right]^{-2} \left[(2k+1)^2 \pi^2 - (2n+1)^2 \omega^2\right]^{-1} \cos n\omega t.$$

Решение A_0 можно использовать в качестве порождающего при исследовании резонансных процессов. Однако оно отвечает начальным условиям специального вида и на первый взгляд не может претендовать на надлежащую общность. Пользуясь результатами работ [5. 6. 10], установим, что данное решение, полученное для начальных условий, в определенном смысле подобным порождающим первую форму линейных колебаний, обладает качествами, пригодными для анализа резонансных стоячих волн.

4. Решение консервативной задачи. Будем искать решение нелинейной задачи с начальными условиями, имеющими единственный экстремум при x=0, в виде

$$u(x,t) = A_0\left[z(x,t), \tau(x,t)\right]; \quad E_0 = 1, \tag{10}$$

где A_0 – построенное в п.2 решение; z и τ - новые переменные.

Рассматривая по-прежнему консервативную задачу, внесем (10) в (1) при $\varepsilon = 0$ и после преобразований придем к выражению

$$\left(\tau_t^2 - \tau_x^2\right) A_{0\tau\tau} - \left(z_x^2 - z_t^2\right) A_{0zz} + \left(z_{tt} - z_{xx}\right) A_{0z} + \left(\tau_{tt} - \tau_{xx}\right) A_{0\tau} - \Phi\left[A_0(z,\tau)\right] = 0,$$

где дифференцирование, вообще говоря, понимается в смысле обобщенных функций.

Требуя, чтобы преобразованное таким образом уравнение движения сохраняло свою структуру, наложим на функции z и τ ограничения, положив

$$z(x,t) = g(x-t) + g(x+t), \quad \tau(x,\tau) = g(x-t) - g(x+t). \tag{11}$$

Тогда получаем

$$2g'(x-t)g'(x+t)\left[A_{0\tau\tau} - A_{0zz}\right] - \Phi\left[A_0(z,\tau)\right] = 0. \tag{12}$$

В силу (3), (4) $\Phi > 0$ и из формулы (11) следует, что введенная функция g должна быть монотонной; из дальнейшего станет видно, что ее следует выбрать монотонно возрастающей, т.е. $g' > 0$ на всей числовой оси. Выберем эту функцию, исходя из вида начального условия $u_0(x)$, определенного вначале на отрезке $[0, 1/2]$. Так как $u_0(x) = A_0\left[z(x,0),0\right] = -2x = 4|g(x)| - 1$, то можно положить, доопределяя функцию $g(x)$ антисимметрично на отрезке $[1/2, 1]$

$$g(x)=\begin{cases} -\frac{1}{4}\left[1+u_0(x)\right] & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 0 & x=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\left[1+u_0(x)\right] & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}. \qquad (13)$$

Таким образом, $g(x)$– нечетная возрастающая на отрезке [-1/2, 1/2] функция. Доопределим ее на всю числовую ось при помощи двух равенств

$$g(x+1)=\frac{1}{2}+g(x),\ g(-x)=-\frac{1}{2}-g(x). \qquad (14)$$

На рис.11 показаны графики возможной начальной конфигурации волны (рис.12,а) и отвечающей ей функции $g(x)$ (рис.12,б). Из (14) и (11) следует, что $z(x,t)\in[0,1]$ и $z(x,t+2)=z(x,t)$, т.е. функция z имеет период, совпадающий с периодом свободных колебаний линейного стержня $(T_0=2)$. В то же время $\tau(x,t+2)=\tau(x,t)+2$.

Установим, что представление (10) отвечает исходной задаче. Так как ограничитель действует на стержень только при его выходе на ограничитель в единственной точке $x=\frac{1}{2}$, то представление решения, во-первых, должно удовлетворять волновому уравнению. Из (12) следует, что если $A_0(x,t)$ – решение волнового уравнения, то и $A_0\left[g(x-t)+g(x+t),\ g(x-t)-g(x+t)\right]$ - также решение волнового уравнения. Во-вторых, должно выполняться неравенство (2), но так как A_0 - решение рассматриваемой консервативной задачи, а функция $g(x)$ – антисимметрична относительно $x=\frac{1}{2}$, то $u(x,t)=A_0\left[0,\ 2g(t)\right]\le\Delta$, и указанное неравенство действительно выполняется. В-третьих, должно иметь место неравенство (4).

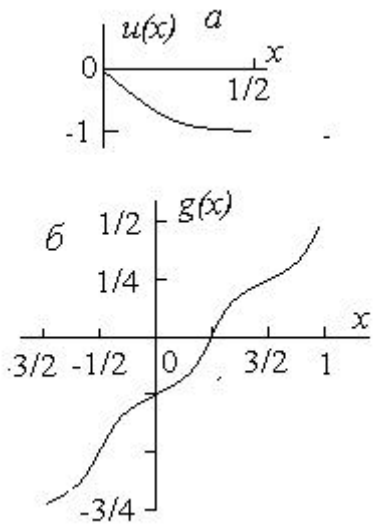


Рис.11

Ввиду того, что для волны A_0 на протяжении всего времени выстоя стержня на ограничителе $R_0=A_{0x}(+0)=2$, учитывая возрастание функции g, в соответствии с (10) находим $R_0=4g'(t)>0$.

Таким образом, представление (10) действительно определяет искомый процесс. Поэтому с помощью формулы (9) при $E_0=1,\ t_1=\frac{1}{2}(1+\Delta)$ найдем

$$u(x,t)=8\sum_{k=1}^{\infty}D_{2k+1}\left[(\omega;\ \tau(x,t))\right]\sin\left\{(2k+1)\pi\left[z(x,t)+\frac{1}{2}\right]\right\}. \qquad (15)$$

Периоды функций D_{2k+1} по τ равны $T_\tau = (3+\Delta)/2$. Одновременно $z(x,t+2) = z(x,t)$, $\tau(x,t+2) = \tau(x,t) + 2$. Поэтому периодичность стоячей волны (15) оказывается возможной только, когда числа $T_0=2$ и Δ численно несоизмеримы. Это, в свою очередь, возможно лишь в случае, когда значение Δ является рациональным числом; при иррациональных значениях величины зазора формула (15) определяет почти–периодический процесс [3, 4, 10].

Таким образом, $\{A_0(E_0,x,t)\}$- единственное семейство периодических стоячих волн, слабо чувствительных к изменению значения зазора (натяга). Факт потери периодичности процесса при переходе от значения, дающегося рациональным числом, к иррациональному значению означает практическую невозможность установления периодического режима других типов. Поэтому представляется естественным предположение о том, что резонансный периодический режим, устанавливающийся в исходной системе при $\varepsilon \neq 0$, описывается при помощи элементов семейства $\{A_0(E_0,x,t)\}$.

5. Частотные свойства решений. Рассмотрим вначале частотные свойства режимов (15) $A_0(E_0,x,t)$. Учитывая, что $T=2\pi/\omega$, где ω – частота процесса, разрешим третье соотношение (8) относительно $E_0(\omega)>0$. После преобразований получим

$$E_0(\omega) = \Delta\omega(4\pi - 3\omega)^{-1} \qquad (16)$$

На рис.12 показаны графики зависимости (16) при различных величинах зазора. Для систем с зазором ($\Delta > 0$) имеет место жесткий анизохронизм, и могут существовать волны лишь с частотами $\pi < \omega < 4/3\,\pi$. При $\Delta = 0$ частота $\omega = 4/3\,\pi$, и имеет место изохронизм движения. Наконец, для систем с натягом $\Delta < 0$ имеет место мягкий анизохронизм и $4/3\pi < \omega < 2\pi$. Частота $\omega=\pi$ отвечает линейным колебаниям с касанием ограничителя, происходящим при $\Delta > 0$ и $E_0=\Delta$. Частота $\omega=2\pi$ отвечает собственным колебаниям прижатого к ограничителю стержня при $\Delta < 0$ и $E_0 < \Delta$. Приведенные кривые являются энергетическими аналогами скелетных кривых в теории нелинейных колебаний. При $\Delta > 0$ скелетная кривая дополнена вертикальным отрезком $\omega=\pi$, отвечающим свободным колебаниям свободного конца стержня в пределах зазора при $E_0<\Delta$.

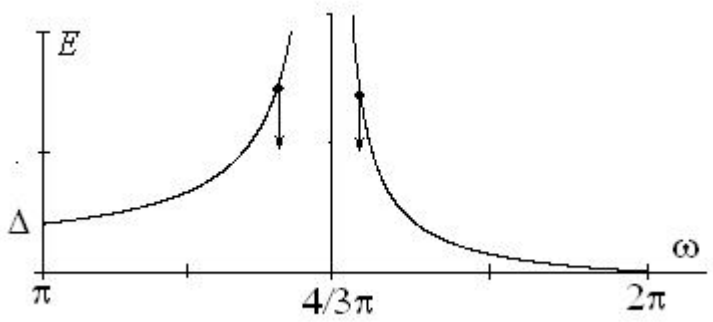


Рис.12

Имея в виду замечание, приведенное в конце п.4. будем искать резонансные режимы движения, описываемые при помощи семейства $\{A_0(E_0,x,t)\}$. Предположим $\Delta \neq 0$, и для определенности будем полагать, что в уравнении движения (1) $\varepsilon H(t,x,u_t,u_x,\ldots) = \varepsilon[P(x,t) - 2bu_t]$.

Пусть сила возбуждения

$$P(x,t) = P(x)\cos(\omega_1 t + \psi) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \sin m\pi x \sin \pi x \cos(\omega_1 t + \psi). \qquad (17)$$

При этом предполагается, что начало отсчета времени совпадает с началом какого-либо взаимодействия стержня и ограничителя, а фаза ψ - неизвестна. Полученная выше

зависимость $E_0(\omega)$ и приведенные ее свойства позволяют сделать вывод о том, что резонансные режимы типа $u(x,t)\approx A_0(E_0,x,t)+\ldots$, где $E_1 = E_0(\omega) = \Delta\omega(4\pi - 3\omega)^{-1}$, могут существовать при $\Delta>0$ только в частотном диапазоне $\pi<\omega<{}^4\!/_3\,\pi$, а при $\Delta<0$ –только в частотном диапазоне ${}^4\!/_3\pi. <\omega<2\pi.$ Изохронизм движения не рассматривается.

Для приближенного описания резонансных стоячих волн близких (при малых ε) к волнам $\{A_0(E_1,x,t)\}$, воспользуемся, как обычно [5, 7. 11], принципом энергетического баланса, в соответствии с которым при реализации T_1 –периодического процесса, например, $u(x,t)$, поддерживаемого T_1 – периодической силой (17) за период движения должны сбалансироваться работы сил возбуждения и диссипации, т.е.

$$\int_0^T P(x)\cos(\omega_1 t+\psi)u_t(x,t)dt=\int_0^T 2bu_t{}^2(x,t)dt. \qquad (18)$$

Для определения неизвестной фазы ψ выполним необходимые подстановки переменных в уравнение (17). Имеем:

$$\sin\psi\sum_{k=1}^{\infty}P_k\frac{\sin(\omega t_1/2)}{k^2\left(\pi^2-\omega_1^2\right)}=16bE_1(\pi\omega_1)^2\sum_{m=1}^{\infty 1}\sum_{n=1}^{\infty 1}\frac{\sin^2(\omega t_1/2)}{\left(m^2\pi^2-n^2\omega^2\right)^2}. \qquad (19)$$

Здесь и в (15) $m=2q+1$. Обозначая правую часть (19) $bE_1Y(\omega_1)$ и ограничиваясь случаем $P(x,t) = P_1\sin\pi x\cos(\omega_1 t+\psi)$, получим два возможных значения фазы и условие существования резонансных режимов движения ($|\sin\psi|\le 1$)

$$\psi_1 = \arcsin\left\lfloor bP_1^{-1}E_1\left|Y(\omega_1)\left(\pi^2-\omega_1^2\right)\sin^{-1}(\omega_1 t_1/2)\right|\right\rfloor,\quad \psi_2=\pi-\psi_1;$$

$$bE_1\left|Y(\omega_1)\left(\pi^2-\omega_1^2\right)\right|\le P_1\left|\sin(\omega_1 t_1/2)\right|.$$

Анализ последнего неравенства показывает, что при $\omega_1\to{}^4\!/_3\,\pi\pm 0$ (знаки «+» и «-» отвечают соответственно неравенствам $\Delta<0$ и $\Delta>0$) $|Y(\omega_1)|\to\infty$ ($\frac{1}{2}\omega_1 t_1\to{}^\pi\!/_3$). На рис.4 точками отмечены границы области существования, где выполняются равенства в условии существовании. Очевидно, что в этих точках, расположенных в окрестности «предельной частоты» $\omega={}^4\!/_3\pi$ происходят срывы колебаний, как это показано вертикальными стрелками на рис.12. Найденная выше зависимость (16) и рис.12 показывают также возможность проявления здесь известных в традиционной теории виброударных систем [5, 7, 11] явления затягивания по частоте.

Заметим, что, если $\Delta<0$ и $\omega_1\to\pi$, время взаимодействия стержня и ограничителя $t_1\to 0$, стержень совершает линейные колебания в пределах зазора, не касается ограничителя. Если $\Delta>0$ и $\omega_1\to 2\pi$ (период колебаний $T_1=1$), время взаимодействия $t_1\to T_1=1$, и стержень совершает колебания без отрывов от ограничителя такие же как стержень с обоими закрепленными концами.

Отметим кроме того, что если при $\Delta<0$ изначально покоящийся стержень установлен с натягом, так что $u_0(x)=2\Delta x$, то для получения резонансных колебаний рассматриваемого типа его необходимо предварительно отвести от ограничителя, т.е. осуществить жесткий запуск стоячей волны [5, 7, 11]. Наконец, легко показать, что, как и в традиционных виброударных системах, здесь оказывается возможным реализовать затягивание резонансных колебаний по амплитуде. Указанные нелинейные эффекты неоднократно наблюдались в натурных и численных экспериментах.

Таким образом, найденные режимы, как и режимы трапециевидных стоячих волн в системах с распределенными ударными элементами, дают возможность провести аналогию между достаточно сложной рассматриваемой системой и элементарной виброударной системой типа «ударный осциллятор» [5, 7, 11].

6. Сравнение с приближенными решениями. Полученное выше решение нелинейной задачи является точным. Поэтому мы имеем редкую возможность сравнить результаты точного и полученного ранее в [1] приближенного решений. Проведем

сравнение, сопоставив частотные характеристики свободных колебаний. Для удобства запишем результаты полученного выше решения в размерной форме.

Положим, что длина стержня равна l. Тогда период свободных колебаний стержня с одним свободным и вторым закрепленным концом $T_0 = 4l/c$, а его первая собственная частота $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi c/2l$, где c – скорость звука в материале стержня. По аналогии с рис 3,а примем, что стержень предварительно сжат, причем начальное смещение свободного конца равно $A > |\Delta|$. Тогда амплитуда его колебаний с соударениями об ограничитель

$$a = (A + \Delta)/2, \tag{20}$$

период колебаний $T = (3 + \Delta/A)T_0/4$, а частота колебаний

$$\omega = 4\omega_0/(3 + \Delta/A). \tag{21}$$

Из условия $A > |\Delta|$ следует, что частота колебаний с соударениями $\omega > \omega_0$. Из (21) и (20) найдем следующую зависимость частоты от амплитуды колебаний

$$\omega = \omega_0 \frac{4 - 2\Delta/a}{3 - \Delta/a}. \tag{22}$$

Обратная (22) функция определяет скелетную кривую

$$a = \Delta \frac{2 - \omega/\omega_0}{4 - 3\omega/\omega_0} \tag{23}$$

Из (22), (23) легко найти области существования скелетных кривых, которые совпадают с полученными в п.4 (см. рис.12). Скелетные кривые, построенные по формуле (23), показаны на рис.13 сплошными линиями.

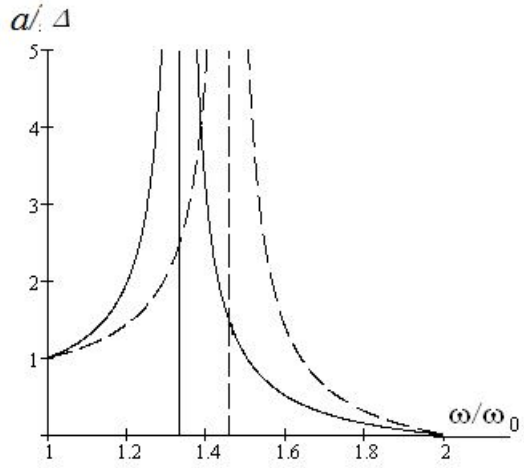


Рис.13

В [1] при решении той же задачи методом гармонической линеаризации получена следующая зависимость для скелетных кривых:

$$a = 4\Delta\left(\pi\frac{\omega}{\omega_0}\operatorname{ctg}\frac{\pi\omega}{2\omega_0} + 4\right) \tag{24}$$

Скелетные кривые, построенные по формуле (24), показаны на рис.13 штриховыми линиями. Асимптоты скелетных кривых находятся решением уравнения $\pi\frac{\omega}{\omega_0}\operatorname{ctg}\frac{\pi\omega}{2\omega_0} + 4 = 0$, которое дает следующее значение частоты изохронных колебаний при $\Delta = 0$:

7. О динамических эффектах. Как и в других случаях изучения нелинейных волновых процессов в распределенных виброударных системах [4, 5, 7, 11], проделанные опыты выявили аналогию между поведением традиционных виброударных систем с одной сосредоточенной ударной парой и рассматриваемых систем всех типов (с точечными, протяженными и тавровыми ограничителями, а также более подробно изученных здесь стержневых систем) при реализации в них описанных выше стоячих волн с и изломанными профилями, состоящими из отрезков прямой.

8.1.Затягивание по частоте. Все указанные типы стоячих волн в режиме вынужденных колебаний могут быть затянуты от частоты близкой к собственной частоте f_0 линейных колебаний струны, до некоторой частоты "срыва" колебаний, лежащей выше частоты f_0. Конкретные проявления явления затягивания и др.(см. далее) зависят от специфики системы.

8.2. Двузначность амплитудно-частотных характеристик. При синусоидальном возбуждении существует частотная область двузначности амплитудно-частотных характеристик. При полигармоническом периодическом возбуждении возможно существование стольких пар режимов, сколько кратных гармоник имеется в возбуждении.

8.3.Срывы колебаний. После реализации предельных частот затягивания при дальнейшем увеличении частоты каждая нелинейная стоячая волна "срывается", т.е. виброударный процесс исчезает, и при синусоидальном возбуждении устанавливаются линейные стоячие волны с амплитудами, лежащими в пределах установки ограничителей. При уменьшении частоты возбуждения после прохода частоты срыва линейные волны не исчезают до достижения частоты, при прохождении которой происходил срыв колебаний, на нелинейную ветвь и волны с изломанными профилями не появляются.

8.4. Жесткий запуск. Для возникновения режимов, соответствующих нелинейной ветви амплитудной - частотной характеристики, можно (и соответственно стоячих волн с изломанными профилями), как и в случае традиционных виброударных систем с одной ударной парой, необходимо придать системе дополнительную запускающую энергию, позволяющую установиться нелинейным волнам при тех же частотах возбуждения, что и линейные волны. Это свойство двузначности при синусоидальном возбуждении вполне аналогично известному свойству традиционных систем с одной ударной парой [7, 11]. Пользуясь той же аналогией, придание упомянутых запускающих начальных условий будем называть *жестким запуском* [7, 11].

Указанные эффекты сопровождают все типы экспериментально наблюдаемых периодических стоячих волн рассмотренного здесь вида.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-08-01235 и № 13-08-90419 Укр_ф_а).

Список литературы

1. Cabbanes H., Haraus A. Mouvements presque – periodiques d'une cordevibrantee en presence d'un obstacle fixe, rectiligne ou ponctuel // I.J. Nonlinear Mecanics. 1981,V.55, №5/6, p.p. 449-457.
2. Крупенин В.Л. К расчету резонансных колебаний гибкой нити, взаимодействующей с точечным ограничителем хода// Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992,№2, с.29-36.
3. Amerio L., Prouse G. Study of the Motion of a String Vibrating Against an Obstacle //Rend. di Mat. Ser. 6(8). 1975. N.2. P. 563-585.
4. Крупенин В.Л. Трансформация форм колебаний струны, взаимодействующей с двумя протяженными преградами// ДАН СССР,1990, т.313, N6, с. 1390-1394.

5. Крупенин В.Л. О представлении периодических виброударных процессов через параметры движения «импульс - фаза» //Проблемы машиностроения и надежности машин.2010.№1.С. 34-42.
6. Cabannes H. Cordes Vibrantes avec Obstacles // Acustica,. 1984, V.55, p.p. 14-20.
7. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах// Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998, № 5, с. 13-30.
8. Крупенин В.Л. Об исследованиях одномерных и многомерных виброударных процессов при случайном широкополосном возбуждении //Проблемы машиностроения и надежности машин.2010. №6.С. 34-42.
9. Крупенин В.Л. К описанию динамических эффектов, сопровождающих колебания струн вблизи однотавровых ограничителей// Доклады Российской Академии наук. 2003. № 388 (3). С. 75-80.
10. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Продольные колебания тонкого стержня, взаимодействующего с неподвижным ограничителем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2007. №6. С. 41-48.
11. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Springer 2001, 330 p.
12. Веприк А.М., Крупенин В.Л. О резонансных колебаниях системы с распределенным ударным элементом //Машиноведение. 1988. № 6. С. 39-47.
13. Асташев В.К. , Крупенин В.Л. Эксперименты с протяженными виброударными системами (резонансные движения) // Вестник научно-технического развития. 2010. № 7(35). С.3-10.
14. В.К. Асташев, В.Л. Крупенин. Картины стоячих волн с изломами профилей, в распределенных объектах, соударяющихся с препятствиями различных конфигураций (часть I)// Интернет –журнал ВНТР. 2011,.№2 (42), с.3-12.
15. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Экспериментальное исследование колебаний струн, взаимодействующих с точечными ограничителями // Доклады Академии Наук. 2001. Т. 379. №3. С. 329-333
16. Асташев В.К. Нелинейные эффекты в ультразвуковых технологических системах // Труды XXVIII Летней школы «Актуальные проблемы механики». Т. 2. Санкт-Петербург. 2001. С.368-380.
17. Асташев В.К., Бабицкий В.И. Резонансные колебания вязкоупругого стержня с ограничителем // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 176–182.
18. Асташев В.К. Настройка ультразвуковых станков под нагрузкой // Станки и инструмент. 1972. №10. С. 32 – 34.
19. Асташев В.К., Бабицкий В.И. Эффективность резонансной настройки систем для ультразвуковой обработки // Машиноведение. 1981. № 6. С. 3–9.
20. Асташев В.К., Бабицкий В.И., Герц М.Е. и др. Измерение сил с использованием виброударной системы // Измерительная техника, 1986. №7. С. 33-35.