

УДК 621

## К АНАЛИЗУ УСКОРЕНИЙ И НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОГО МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

© Сергей Валерьевич Хейло, Виктор Аркадьевич Глазунов,  
Юрий Васильевич Кулемкин, Виктор Львович Эфрос

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук  
[vaglznv@mail.ru](mailto:vaglznv@mail.ru)

*Аннотация.* Рассмотрен сферический механизм параллельной структуры с тремя степенями свободы. Представлено решение задачи об ускорении и исследовании колебаний механизма. Нелинейность определяется геометрией расположения приводов и их взаимным влиянием.

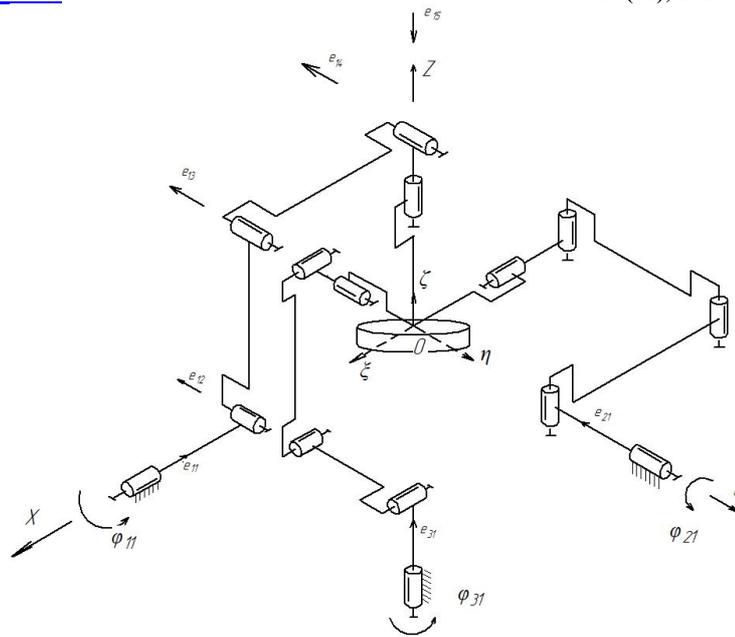
Среди механизмов параллельной структуры сферические манипуляторы занимают важное место [1–5]. Эти механизмы предназначены для осуществления ориентирующих движений. Они применяются в устройствах для ориентирования антенн, телескопов, в кистях роботов. Эти механизмы были темой многих публикаций, в которых рассматривались структура, задача о положениях и скоростях, некоторые вопросы динамического анализа. Однако, некоторые важные вопросы не были рассмотрены ранее. Это касается задачи об ускорениях, задачи анализа нелинейных колебаний. Данная статья посвящена решению этих вопросов.

При анализе ускорений в данной работе применяется подход, основанный на дифференцировании уравнений связей. Этот метод применялся Д. Анджелесом и К. Госленом при анализе скоростей [6]. При анализе нелинейных колебаний в данной работе учитываются нелинейности, связанные геометрией кинематических цепей. На эту особенность устройств подобного рода впервые обратили внимание В.О. Кононенко и Р.Ф. Ганиев [7]. В применяемом подходе рассматриваются инерционные характеристики выходного звена и упругие обобщенные силы, действующие в приводах механизма.

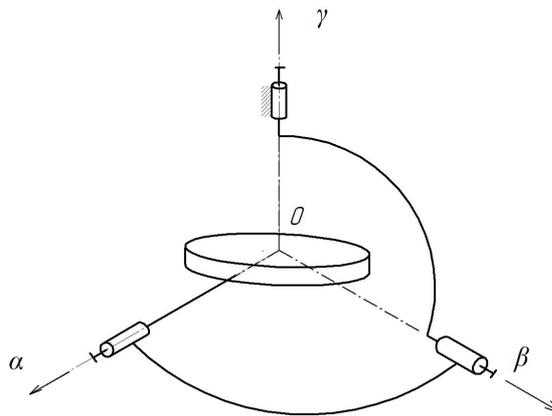
В рассматриваемом механизме (рис.1) каждое входное звено цепи соединено с двигателем. Выходное звено представляет собой платформу, которая вращается вокруг трех осей, пересекающихся в точке  $O$ . Выходными координатами являются углы поворота платформы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  вокруг осей, взаимные расположения которых описываются фиктивной кинематической цепью (рис. 2). Обобщенными координатами являются углы  $\varphi_{11}$ ,  $\varphi_{21}$ ,  $\varphi_{31}$  – соответственно углы поворота входных звеньев первой, второй и третьей кинематических цепей. В каждой из трех кинематических цепей имеются два шарнира с пересекающимися осями и три шарнира с параллельными осями.

Выходному звену механизма поставим в соответствие подвижную систему координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , оси которой расположены по главным центральным осям инерции этого звена. Отметим, что при нулевых значениях углов ориентации ( $\alpha=\beta=\gamma=0$ ) направление осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  совпадают с направлениями осей соответственно  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Кроме того, укажем, что в данном случае одна кинематическая пара  $e'_{i2}$ , входящая в эквивалентный механизм (рис.3), заменяет три вращательные пары  $e_{i2}$ ,  $e_{i3}$ ,  $e_{i4}$ , входящие в исходный механизм. Отметим, что при нулевых углах ориентации имеет место соотношение  $e_{11}=e'_{32}=e_{23}$ . Для остальных кинематических цепей имеются аналогичные соотношения.



**Рис.1** Сферический механизм с пятью кинематическими парами в каждой цепи



**Рис.2** Схема фиктивной цепи

Рассмотрим задачу об ускорениях, которая может иметь значение при анализе динамики механизма. Уравнения связей для сферического механизма с тремя кинематическими цепями можно представить следующей системой уравнений [8]:

$$\begin{cases} F_1 = \operatorname{tg} \varphi_{11} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = 0 \\ F_2 = \frac{\sin \beta}{\cos \gamma \cdot \cos \beta} - \operatorname{tg} \varphi_{21} = 0 \\ F_3 = \frac{\cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \sin \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} + \operatorname{tg} \varphi_{31} = 0 \end{cases}$$

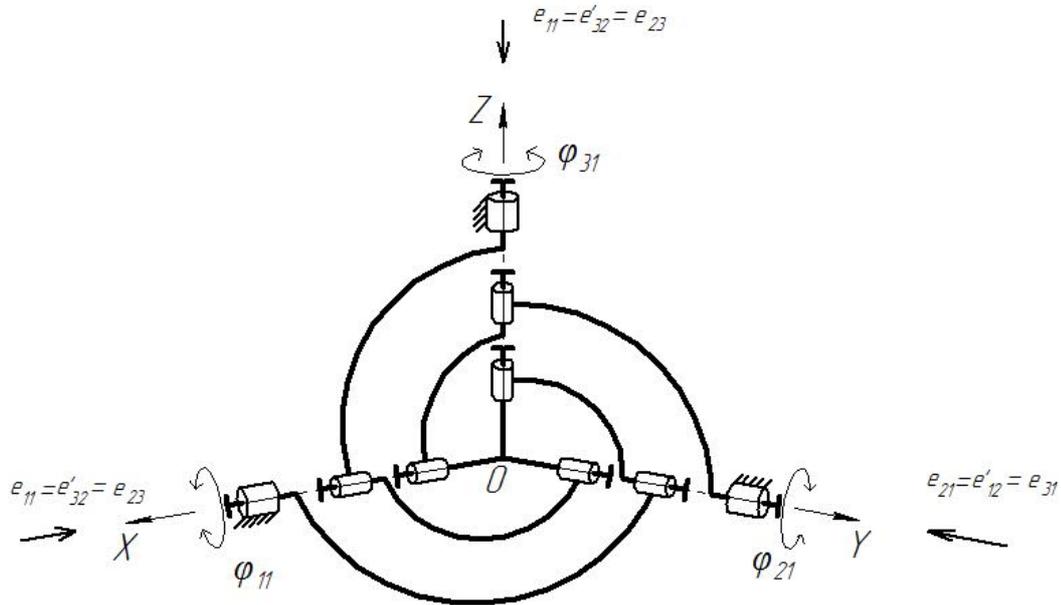


Рис.3. Сферический механизм с тремя кинематическими парами в каждой цепи

Дифференцируя указанные выражения по  $t$ , получаем систему уравнений, связывающих скорости входных и выходных звеньев:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} \dot{\varphi}_{11} &= 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} \dot{\varphi}_{21} &= 0 \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial F_3}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + \frac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} \dot{\varphi}_{31} &= 0 \end{aligned}$$

Дифференцируя данные выражения второй раз по  $t$ , получаем уравнения связывающие ускорения входных и выходных звеньев:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha^2} \dot{\alpha} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha \partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha \partial \gamma} \dot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha \partial \varphi_{i1}} \dot{\varphi}_{i1} \right) \dot{\alpha} + \frac{\partial F_i}{\partial \alpha} \ddot{\alpha} + \left( \frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha \partial \beta} \dot{\alpha} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \beta^2} \dot{\beta} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \beta \partial \gamma} \dot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \beta \partial \varphi_{i1}} \dot{\varphi}_{i1} \right) \dot{\beta} + \\ &+ \frac{\partial F_i}{\partial \beta} \ddot{\beta} + \left( \frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha \partial \gamma} \dot{\alpha} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \beta \partial \gamma} \dot{\beta} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \gamma^2} \dot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \gamma \partial \varphi_{i1}} \dot{\varphi}_{i1} \right) \dot{\gamma} + \frac{\partial F_i}{\partial \gamma} \ddot{\gamma} + \\ &+ \left( \frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha \partial \varphi_{i1}} \dot{\alpha} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \beta \partial \varphi_{i1}} \dot{\beta} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \gamma \partial \varphi_{i1}} \dot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \varphi_{i1}^2} \dot{\varphi}_{i1} \right) \dot{\varphi}_{i1} + \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_{i1}} \ddot{\varphi}_{i1} = 0 \end{aligned}$$

После упрощения получаем уравнение ускорений:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha^2} \dot{\alpha}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial \beta} \dot{\alpha} \dot{\beta} + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial \gamma} \dot{\alpha} \dot{\gamma} + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial \varphi_{i1}} \dot{\alpha} \dot{\varphi}_{i1} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta^2} \dot{\beta}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta \partial \gamma} \dot{\beta} \dot{\gamma} + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta \partial \varphi_{i1}} \dot{\beta} \dot{\varphi}_{i1} +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \gamma \partial \varphi_{i1}} \dot{\gamma} \dot{\varphi}_{i1} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \gamma^2} \dot{\gamma}^2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_{i1}^2} \dot{\varphi}_{i1}^2 + \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \ddot{\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \ddot{\beta} + \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \ddot{\gamma} + \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{i1}} \ddot{\varphi}_{i1} = 0$$

Эти

уравнения можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{i1}} \ddot{\varphi}_{i1} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha^2} \dot{\alpha}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial \beta} \dot{\alpha} \dot{\beta} + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial \gamma} \dot{\alpha} \dot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta^2} \dot{\beta}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta \partial \gamma} \dot{\beta} \dot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \gamma^2} \dot{\gamma}^2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_{i1}^2} \dot{\varphi}_{i1}^2 +$$

$$+ \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \ddot{\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \ddot{\beta} + \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \ddot{\gamma};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} \ddot{\varphi}_{21} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta^2} \dot{\beta}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta \partial \gamma} \dot{\beta} \dot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \gamma^2} \dot{\gamma}^2 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \varphi_{21}^2} \dot{\varphi}_{21}^2 + \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \ddot{\beta} + \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \ddot{\gamma};$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} \ddot{\varphi}_{31} = \frac{\partial^2 F_3}{\partial \alpha^2} \dot{\alpha}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial \alpha \partial \beta} \dot{\alpha} \dot{\beta} + 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial \alpha \partial \gamma} \dot{\alpha} \dot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial \beta^2} \dot{\beta}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial \beta \partial \gamma} \dot{\beta} \dot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial \gamma^2} \dot{\gamma}^2 + \frac{\partial^2 F_3}{\partial \varphi_{31}^2} \dot{\varphi}_{31}^2 +$$

$$+ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \ddot{\alpha} + \frac{\partial F_3}{\partial \beta} \ddot{\beta} + \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \ddot{\gamma}.$$

Приведем численный пример, для этого зададим закон движения выходного звена:

$$\alpha = 0,706 \cdot t^2 - 0,15 \cdot t^3; \quad \beta = 0,706 \cdot t^2 - 0,15 \cdot t^3; \quad \gamma = 0,706 \cdot t^2 - 0,15 \cdot t^3$$

Этому закону движения соответствуют значения ускорений в приводах (рис.4).

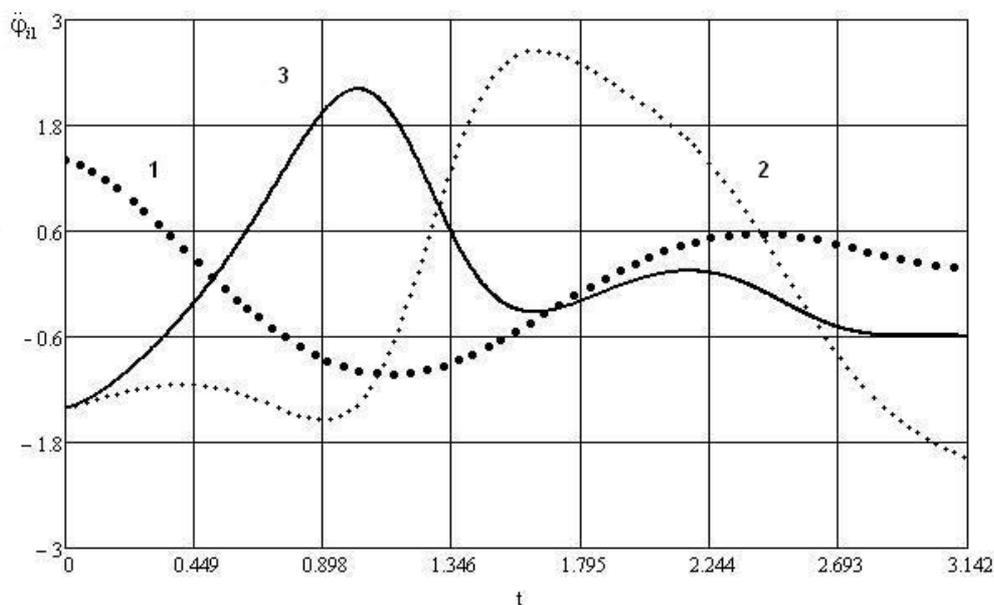


Рис.4. График изменения ускорений в приводах: 1-первой цепи; 2- второй цепи  
3- третьей цепи

Перейдем к анализу нелинейных колебаний исследуемого механизма. Как отмечалось, нелинейность механической системы обусловлена ее геометрией и взаимосвязанностью приводов. Уравнение движения сферического механизма с тремя степенями свободы имеет вид:

$$\begin{cases} J_{\xi} \cdot \ddot{\varphi}_{\xi} = M_1 \cdot \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\xi}} + M_2 \cdot \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \varphi_{\xi}} + M_3 \cdot \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\xi}} + \dot{\varphi}_{\eta} \cdot \dot{\varphi}_{\zeta} \cdot (J_{\zeta} - J_{\eta}) \\ J_{\eta} \cdot \ddot{\varphi}_{\eta} = M_1 \cdot \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\eta}} + M_2 \cdot \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \varphi_{\eta}} + M_3 \cdot \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\eta}} + \dot{\varphi}_{\xi} \cdot \dot{\varphi}_{\zeta} \cdot (J_{\xi} - J_{\zeta}) \\ J_{\zeta} \cdot \ddot{\varphi}_{\zeta} = M_1 \cdot \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\zeta}} + M_2 \cdot \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \varphi_{\zeta}} + M_3 \cdot \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\zeta}} + \dot{\varphi}_{\xi} \cdot \dot{\varphi}_{\eta} \cdot (J_{\eta} - J_{\xi}) \end{cases}$$

где  $J_{\xi} = J_{\eta}$ ,  $J_{\zeta}$  - моменты инерции относительно осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$

$M_1, M_2, M_3$  - моменты в приводах.

$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \varphi_{\xi}}$  - переменные коэффициенты.

$\ddot{\varphi}_{\xi}, \dot{\varphi}_{\xi}, \ddot{\varphi}_{\eta}, \dot{\varphi}_{\eta}, \ddot{\varphi}_{\zeta}, \dot{\varphi}_{\zeta}$  - проекции ускорений и скоростей на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ .

Переменные коэффициенты можно определить из уравнений прямой задачи о скоростях методом винтового исчисления [10, 11]. При этом требуется найти силовой винт  $R_i$  с координатами  $(r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}, r_{ix}^0, r_{iy}^0, r_{iz}^0)$ , взаимный двум ортам осей  $e'_{i2}, e'_{i3}$  неприводных пар. Как отмечалось, в данном случае кинематическая пара  $e'_{i2}$ , входящая в эквивалентный механизм (рис.3), заменяет три пары  $e_{i2}, e_{i3}, e_{i4}$  исходного механизма.

Кинематический винт выходного звена равен сумме кинематических винтов в парах цепи  $\Omega_i = \Omega_{i1} + \Omega_{i2} + \Omega_{i3}$ ,

где  $\Omega_i$  - кинематический винт выходного звена с координатами  $(V_x, V_y, V_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$ .

Отметим, что в данном случае  $V_x = V_y = V_z = 0$ ,

$\Omega_{i1}, \Omega_{i2}, \Omega_{i3}$  - кинематические винты первой, второй, третьей кинематических пар с координатами соответственно  $(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}, x_{i1}^0, y_{i1}^0, z_{i1}^0) \cdot \omega_{i1}$ ,  $(x_{i2}, y_{i2}, z_{i2}, x_{i2}^0, y_{i2}^0, z_{i2}^0) \cdot \omega_{i2}$ ,  $(x_{i3}, y_{i3}, z_{i3}, x_{i3}^0, y_{i3}^0, z_{i3}^0) \cdot \omega_{i3}$ .

Можно записать, что относительный момент двух винтов равен

$$\text{mom}(R_i, \Omega_i) = \text{mom}(R_i, \Omega_{i1} + R_i, \Omega_{i2} + R_i, \Omega_{i3}).$$

Так как силовой винт взаимен ортам неприводных пар, то относительные моменты  $\text{mom}(R_i, \Omega_{i2}) = 0$ ,  $\text{mom}(R_i, \Omega_{i3}) = 0$ , таким образом  $\text{mom}(R_i, \Omega_i) = \text{mom}(R_i, \Omega_{i1})$ . Подставив значения координат силовых и кинематических винтов, получим уравнения относительных моментов:

$$\begin{aligned} \text{mom}(R_i, \Omega_i) &= \omega_{\xi} \cdot r_{i\xi}^0 + \omega_{\eta} \cdot r_{i\eta}^0 + \omega_{\zeta} \cdot r_{i\zeta}^0; \\ \text{mom}(R_i, \Omega_{i1}) &= \omega_{i1} \cdot (x_{i1} r_{ix}^0 + y_{i1} r_{iy}^0 + z_{i1} r_{iz}^0), \end{aligned}$$

где  $(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1})$  - плюккеровы координаты единичных векторов  $e_{i1}$ , расположенных вдоль осей приводных пар;

$R_i^0$  - моментная часть силового винта с координатами  $r_{ix}^0, r_{iy}^0, r_{iz}^0$ .

Система уравнений для трех кинематических цепей имеет вид:

$$\omega_{\xi} \cdot r_{i\xi}^0 + \omega_{\eta} \cdot r_{i\eta}^0 + \omega_{\zeta} \cdot r_{i\zeta}^0 = \omega_{i1} \cdot (x_{i1} r_{ix}^0 + y_{i1} r_{iy}^0 + z_{i1} r_{iz}^0);$$

$$\begin{aligned}\omega_{\xi} \cdot r_{2\xi}^0 + \omega_{\eta} \cdot r_{2\eta}^0 + \omega_{\zeta} \cdot r_{2\zeta}^0 &= \omega_{21} \cdot (x_{21}r_{2x}^0 + y_{21}r_{2y}^0 + z_{21}r_{2z}^0); \\ \omega_{\xi} \cdot r_{3\xi}^0 + \omega_{\eta} \cdot r_{3\eta}^0 + \omega_{\zeta} \cdot r_{3\zeta}^0 &= \omega_{31} \cdot (x_{31}r_{3x}^0 + y_{31}r_{3y}^0 + z_{31}r_{3z}^0)\end{aligned}$$

где -  $\omega_{\xi}, \omega_{\eta}, \omega_{\zeta}$  - угловые скорости выходного звена вокруг осей  $\xi, \eta, \zeta$

$r_{i\xi}^0, r_{i\eta}^0, r_{i\zeta}^0$  - координаты моментной части  $i$ -го силового винта.

Тогда переменные коэффициенты, стоящие перед значениями моментов  $M$ , можно определить следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\xi}} = \frac{\omega_{11}}{\omega_{\xi}} = \frac{r_{1\xi}^0}{r_{1x}^0}, \quad \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\eta}} = \frac{\omega_{11}}{\omega_{\eta}} = \frac{r_{1\eta}^0}{r_{1x}^0}, \quad \dots \dots \dots \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\eta}} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{\eta}} = \frac{r_{3\eta}^0}{r_{3z}^0} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\zeta}} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{\zeta}} = \frac{r_{3\zeta}^0}{r_{3z}^0}.$$

Остальные коэффициенты имеют сходный вид.

Координаты ортов второй ( $x_{12}, y_{12}, z_{12}$ ) и третьей ( $x_{13}, y_{13}, z_{13}$ ) пар первой цепи в неподвижной системе координат рассчитываются следующим образом:

- для второй пары координаты ортов определяются произведением матрицы поворота вокруг оси  $x$  на координаты второй пары в ее начальном положении

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} \\ 0 & \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi_{11} \\ \sin \varphi_{11} \end{pmatrix};$$

- координаты ортов третьей пары первой цепи определяются произведением матрицы  $A$ , описывающей переход от подвижной координатной системы к неподвижной, на координаты указанного орта в ее начальном положении

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ y_{13} \\ z_{13} \end{pmatrix} = (A) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \sin \gamma \\ \cos \beta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A$  имеет вид  $A = A_3 \cdot A_2 \cdot A_1$ ;

где  $A_1$  - матрица поворота вокруг оси  $x$ ,  $A_2$  - матрица поворота вокруг оси  $y$ ,  $A_3$  - матрица поворота вокруг оси  $z$ .

Для второй цепи координаты ортов второй и третьей пар равны:

$$\begin{pmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & \sin \varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{21} & 0 & \cos \varphi_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{21} \\ 0 \\ \cos \varphi_{21} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ y_{13} \\ z_{13} \end{pmatrix} = (A) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ -\sin \beta \end{pmatrix}.$$

Для третьей цепи координаты ортов второй и третьей пар равны:

$$\begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} & -\sin \varphi_{31} & 0 \\ \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} \\ \sin \varphi_{31} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{33} \\ y_{33} \\ z_{33} \end{pmatrix} = (A) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \\ -\cos \beta \cdot \sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Координаты ортов вторых пар первой, второй и третьей цепей в подвижной системе координат определяются матрицей  $A^{-1}$ , обратной матрице  $A$ .

$$\begin{pmatrix} e_{\xi 12} \\ e_{\eta 12} \\ e_{\zeta 12} \end{pmatrix} = (A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{11} - \sin \beta \cdot \sin \varphi_{11} \\ \cos \varphi_{11} \cdot (\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) + \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{11} \\ \cos \beta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \varphi_{11} - \cos \varphi_{11} \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_{\xi 22} \\ e_{\eta 22} \\ e_{\zeta 22} \end{pmatrix} = (A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_{\xi 32} \\ e_{\eta 32} \\ e_{\zeta 32} \end{pmatrix} = (A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{pmatrix}$$

Координаты ортов третьих пар первой, второй и третьей цепей равны:

$$\begin{pmatrix} e_{\xi 13} \\ e_{\eta 13} \\ e_{\zeta 13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_{\xi 23} \\ e_{\eta 23} \\ e_{\zeta 23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_{\xi 33} \\ e_{\eta 33} \\ e_{\zeta 33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Моментная часть силового винта для первой кинематической цепи в подвижной системе координат равна:

$$\mathbf{r}_1^0 = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ e_{\xi 12} & e_{\eta 12} & e_{\zeta 12} \\ e_{\xi 13} & e_{\eta 13} & e_{\zeta 13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ e_{\xi 12} & e_{\eta 12} & e_{\zeta 12} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \xi \cdot (e_{\eta 12} \cdot 1 - e_{\zeta 12} \cdot 0) + \eta \cdot (e_{\zeta 12} \cdot 0 - e_{\xi 12} \cdot 1) + \rho \cdot (e_{\xi 12} \cdot 0 - e_{\eta 12} \cdot 0),$$

$$\mathbf{r}_{1\eta}^0 = -\sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{11} + \sin \beta \cdot \sin \varphi_{11}$$

$$\mathbf{r}_{1\xi}^0 = \cos \varphi_{11} \cdot (\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) + \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{11}$$

$$\mathbf{r}_{1\zeta}^0 = 0$$

Аналогичным образом рассчитываются моментные части силовых винтов для второй и третьей цепей:

$$\mathbf{r}_{2\xi}^0 = 0$$

$$\mathbf{r}_{2\eta}^0 = -\sin \varphi_{21} \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) + \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{21}$$

$$\mathbf{r}_{2\zeta}^0 = \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{21} - \sin \varphi_{21} \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)$$

$$r_{3\xi}^0 = -\cos \varphi_{31} \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) - \sin \varphi_{31} \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$r_{3\eta}^0 = 0$$

$$r_{3\zeta}^0 = \cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{31} + \sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \varphi_{31}$$

Для определения углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  необходимо соотношение между угловыми скоростями в подвижной системе координат  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$ ,  $\omega_\zeta$  и скоростями изменения углов  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\gamma}$ . Эти соотношения можно записать в следующем виде:

$$\omega_\xi = \dot{\alpha} \cdot \alpha_\xi + \dot{\beta} \cdot \beta_\xi + \dot{\gamma} \cdot \gamma_\xi;$$

$$\omega_\eta = \dot{\alpha} \cdot \alpha_\eta + \dot{\beta} \cdot \beta_\eta + \dot{\gamma} \cdot \gamma_\eta;$$

$$\omega_\zeta = \dot{\alpha} \cdot \alpha_\zeta + \dot{\beta} \cdot \beta_\zeta + \dot{\gamma} \cdot \gamma_\zeta$$

где  $\begin{pmatrix} \alpha_\xi \\ \alpha_\eta \\ \alpha_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  - проекции орта третьей пары фиктивной кинематической цепи,

соответствующей скорости изменения угла  $\alpha$  на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ;

$\begin{pmatrix} \beta_\xi \\ \beta_\eta \\ \beta_\zeta \end{pmatrix}$  - проекции орта второй пары фиктивной кинематической цепи, соответствующей скорости

изменения угла  $\beta$ , на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ :  $\begin{pmatrix} \beta_\xi \\ \beta_\eta \\ \beta_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \\ \gamma_\zeta \end{pmatrix}$  - проекции орта первой пары фиктивной цепи, соответствующей скорости изменения  $\gamma$  на

оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ :

$$\begin{pmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \\ \gamma_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Выразим  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\gamma}$  через  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$ ,  $\omega_\zeta$ :

$$\dot{\alpha} = \frac{\omega_\xi \cdot \cos \beta + \omega_\eta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + \omega_\zeta \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\dot{\beta} = \omega_\eta \cdot \cos \alpha - \omega_\zeta \cdot \sin \alpha$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega_\eta \cdot \sin \alpha + \omega_\zeta \cdot \cos \alpha}{\cos \beta}$$

Моментная часть силового винта в неподвижной системе координат равна [9]:

$$\begin{pmatrix} r_{1x}^0 \\ r_{1y}^0 \\ r_{1z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} \\ -\sin \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} \\ \cos \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{2x}^0 \\ r_{2y}^0 \\ r_{2z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} \\ \cos \varphi_{22} \\ \sin \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{3x}^0 \\ r_{3y}^0 \\ r_{3z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32} \\ \cos \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32} \\ \cos \varphi_{32} \end{pmatrix}$$

Зависимость углов поворота промежуточных  $\varphi_{12}$  определяются из решения задачи о положении [8]:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{12} &= \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta; \\ \sin \varphi_{22} &= \cos \beta \cdot \sin \gamma; \quad \sin \varphi_{32} = \cos \beta \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Моменты в приводах равны:

$$\begin{cases} M_1 = -c_1 \cdot \varphi_{11} \\ M_2 = -c_2 \cdot \varphi_{21} \\ M_3 = -c_3 \cdot \varphi_{31} \end{cases}$$

где  $c_i$  - жесткость привода

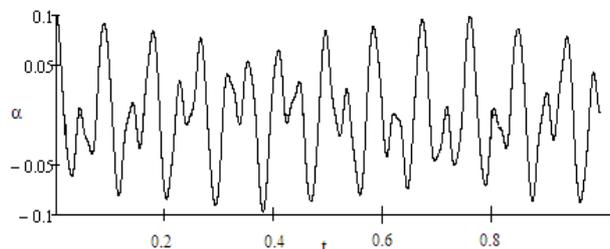
Сферический механизм находится в равновесии при следующих углах:

$$\varphi_{11} = 0, \quad \varphi_{21} = 0, \quad \varphi_{31} = 0, \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

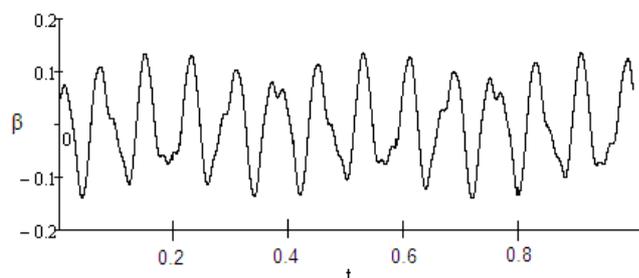
Используя численное интегрирование, найдем изменения координат выходного звена при следующих начальных условиях:

$$\alpha=0,1 \text{ рад}; \quad \beta=0,05 \text{ рад}; \quad \gamma=0,325 \text{ рад}.$$

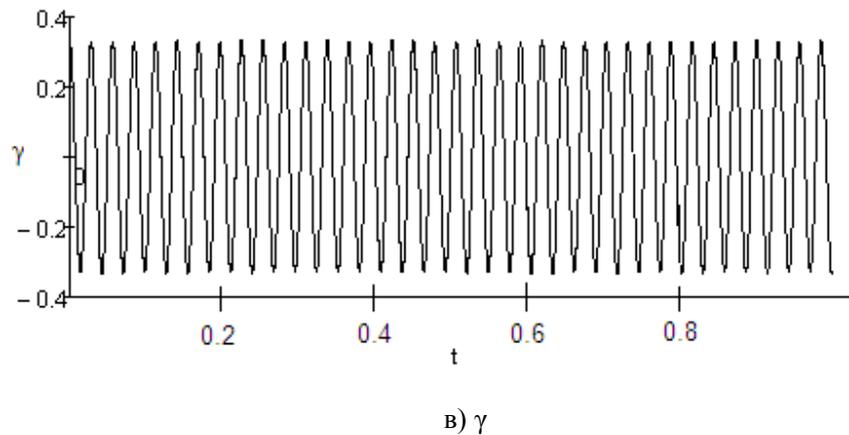
На рис.5 представлены законы изменения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  для нелинейных колебаний выходного звена.



а)  $\alpha$



б)  $\beta$



**Рис.5** Графики изменения координат

В статье приведен расчет ускорений с использованием метода дифференцирования уравнений связей  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Получены законы изменения углов ориентации входного звена при наличии упругих сил, действующих в приводах.

Полученные решения уравнений ускорений могут быть использованы в дальнейшем для решения задачи управления.

#### Список литературы

1. Gosselin C. Kinematic analysis optimization and programming of parallel robotic manipulators: Ph.D Thesis. – McGill University, Montreal, June 15 1988.
2. Leguay–Durand S. and Reboulet C. Optimal design of a redundant spherical parallel manipulator// Robotica. 1997. 15(4).P.399–405.
3. Alizade R.I., Tagiyev N.R. and Duffy J. A forward and reverse displacement analysis of an in-parallel spherical manipulator// Mechanism and Machine Theory. 1994. 29(1).P.125–137.
4. Mianovski K. Singularity analysis of parallel manipulator POLMAN 3×2 with six degrees of freedom / 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June 18–21, 2007.
5. Merlet J. P. Parallel robots. Kluwer Academic Publishers, 2000, 372p.
6. Gosselin C.M., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. // IEEE. Transactions on Robotics and Automatics. V. 6(3). June 1990. P. 281–290.
7. Р. Ф. Кононенко В. О. Колебания твердых тел. Главная редакция физико-математической литературы, М., 1976. 432 с.
8. Хейло С.В. Решение задачи кинематики сферического манипулятора параллельной структуры // Машиностроение и инженерное образование. –2010. –№ 4. – С. 18–22.
9. Хейло С.В., Глазунов В.А., Во Динь Тунг. Решение задачи о скоростях и особых положениях сферического манипулятора параллельной структуры // Машиностроение и инженерное образование. – 2011. –№ 1. – С. 2–9.
10. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. – М.:Наука, 1991. – 95 с.
11. Диментберг ФМ. Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978, 327 с.