

УДК 539.3

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПРИ НЕСОВЕРШЕННОМ КОНТАКТЕ СЛОЕВ МНОГОСЛОЙНОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

© Владимир Иванович Ерофеев, Наталья Владимировна Ключева,
Игорь Николаевич Солдатов

Институт проблем машиностроения РАН

erf04@sinn.ru

Аннотация. В работе рассматривается многослойный твердотельный волновод с соединением слоев, отличным от жесткого контакта. Проводится анализ различных моделей граничных условий, в частности, условий, учитывающих инерционные эффекты в зоне контакта слоев. Предлагается и обосновывается с помощью метода матриц-пропагаторов оригинальная модель граничного условия в области несовершенного контакта слоев волновода.

Ключевые слова: твердотельный волновод, слоистость, несовершенный контакт, граничные условия.

Ультразвуковой контроль объемными волнами возможен, когда размеры исследуемых тел намного больше длины волны. Это ограничение в значительной степени снимается при использовании волн Лэмба [1-3], позволяя резко уменьшить объем и трудоемкость сканирования. “Протяженность зоны контроля трубы при одной установке специального преобразователя от 3 – 100 м при использовании ультразвука частотой 10 – 100 кГц и 1,5 – 3 м при использовании ультразвука частотой 0,6 – 4,2 МГц.” [4]. Использование нормальных волн позволяет проводить контроль протяженных объектов без сканирования непосредственно над наблюдаемыми участками – так называемый дальний ультразвуковой контроль. Волны Лэмба применяются для определения различных физических характеристик плит, корпусов судов, труб (при отношении толщины к диаметру меньше 0,1 решения уравнений распространения упругих волн в трубе переходят в соответствующие решения для нормальных волн в слое), профилей автомобильных и самолетных конструкций, лопаток газовых турбин, кожухов камер сгорания реактивных двигателей и других аналогичных структур. В зависимости от того, определение каких параметров представляет интерес, используются те или иные моды Лэмба. Например, для определения толщины упругой плиты удобно использовать низшую антисимметричную моду a_0 , обладающую сильной дисперсией на низких частотах. Хорошо известно, что в отличие от основных мод s_0 и a_0 высшие моды Лэмба на высоких частотах не локализируются вблизи поверхностей, а имеют сложную осциллирующую структуру перемещений внутри упругого слоя, усложняющуюся с ростом номера моды. На высоких частотах, таким образом, только высшие моды, в принципе, можно использовать для неразрушающего контроля больших участков толстостенных изделий с глубоко расположенными дефектами, когда применение объемных волн становится чрезвычайно трудоемким. Отраслевым стандартом ОСТ 5.9332-80 [5] для неразрушающего контроля листов с дефектами рекомендованы пять мод s_0, a_0, s_1, a_1, s_2 , выбор которых осуществляется в зависимости от параметра $f \cdot h$ (произведения частоты колебаний на толщину пластины) и типа материала.

Для возбуждения и приема волн Лэмба чаще всего используют специальные клиновые преобразователи с переменным углом ввода ультразвука. При оптимальном построении такого преобразователя эффективность преобразования энергии падающего пучка в энергию поверхностных волн и волн Лэмба является весьма высокой. Максимальное значение коэффициента преобразования по энергии оказывается равным 81% при использовании жидко-

стных клиновых преобразователей и пучков с равномерным амплитудным распределением. Для клина, выполненного из твердого материала, коэффициент преобразования несколько ниже. Реже применяется, но представляется очень перспективным, электромагнитно-акустический метод возбуждения и приема нормальных волн, использующий возможность бесконтактного возбуждения и приема упругих колебаний в металлах и магнетиках. Для многих методов возбуждения Лэмба разработаны приёмы селективного возбуждения отдельных мод.

Чувствительность различных мод к дефектам разных типов (трещины, расслоения, поры и т. д.) изменяется в значительных пределах и, кроме того, чувствительность любой конкретной моды к дефектам определенного типа сильно меняется с изменением параметра $f \cdot h$. Для дефектов типа расслоений в [6] предложено использовать две селективно возбуждаемые нормальные моды для приближенной оценки величины расслоения и глубины нахождения в толще плиты, также указаны рабочие участки на дисперсионных кривых.

Ограничимся рассмотрением двухмерных волновых движений, происходящих в сакитальной плоскости многослойного волновода (рис.1). Используем декартову систему координат с осью x_1 , перпендикулярной границам раздела, и осью x_2 вдоль направления распространения волны. Математическая формулировка условий жесткого контакта заключается в требовании непрерывности напряжений и перемещений на границе раздела

$$[\sigma_j] = 0, \quad [u_j] = 0, \quad j = 1, 2 \quad (1)$$

где квадратные скобки обозначают разность значений величин на границе раздела $[\sigma_j] = \sigma_j^+ - \sigma_j^-$, $[u_j] = u_j^+ - u_j^-$, $j = 1, 2$, $\sigma_j = \sigma_{1j}$ – компоненты тензора напряжений, u_1, u_2 – нормальная и тангенциальная компоненты вектора перемещений, индекс + (–) используется для обозначения значений величин на верхней (нижней) стороне плоскости, разделяющей слои.

Для описания явлений, возникающих при разнообразных соединениях слоёв, отличных жесткого контакта, было предложено несколько моделей. По-видимому, первой моделью была модель, предложенная в 1943г. Ньюмарком (Newmark [7]), в которой

$$[\sigma_1] = 0, \quad [u_2] = \alpha \sigma_2^-, \quad (2)$$

где α – некоторая положительная константа (α^{-1} – танверсальная жесткость нарушенного контакта). Подобные же граничные условия использовал Murty [8,9]. В [9] эти условия выведены как редукция условий на границе двух упругих полупространств разделенных тонким слоем вязкой жидкости. Параметр α в последнем случае зависит от частоты. Jones и Whittier [10] предложили моделировать более глубокие нарушения контакта граничными условиями вида

$$[\sigma_1] = 0, \quad [\sigma_2] = 0, \quad [u_1] = \beta \sigma_1^-, \quad [u_2] = \alpha \sigma_2^- \quad (3)$$

Существует несколько моделей, связывающих величину разрыва нормальных и тангенциальных перемещений на границе раздела слоёв с соответственно нормальными и тангенциальными напряжениями на этой границе формулами подобными (3). Отличия между ними в том, как коэффициенты β, α определяются через те или иные физико-механические характеристики (в частности, модули упругости). Одной из наиболее известных является модель Шонберга 1980г. (Schoenberg M. [11]); ссылки на литературу по другим моделям этого типа можно найти в [12-14].

Исходя из мнения, что в граничных условиях, моделирующих нарушения жесткого контакта, необходим учет инерционных эффектов Baik J. и Thompson R.B. [15] ввели более общие условия

$$[\sigma_j] = q_j \langle u_j \rangle, \quad [u_j] = f_j \langle \sigma_j \rangle, \quad j = 1, 2$$

где $\langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{2}(\sigma_j^+ + \sigma_j^-)$.

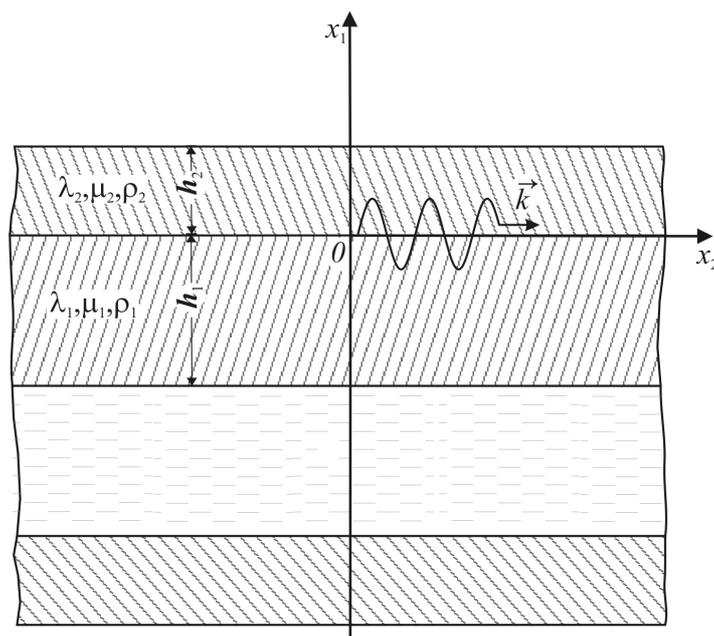


Рис. 1

В данной работе рассмотрим более общий случай. Рассмотрение будем вести на основе матричного формализма. Для расчета коэффициентов отражения и прозрачности для произвольного числа упругих слоев в 1950г. Томсон (Thomson) [16] предложил рекуррентные формулы, связывающие амплитуды волн в соседних слоях. В работе Хаскела (Haskell) [17] 1953г. была сделана поправка для формул Томсона, а в труде Бреховских Л.М. [18] матричное представление для интерференционного поля было достаточно полно развито. Позднее за матричным формализмом закрепилось название метода Томсона-Хаскела (хотя было бы более справедливо, если бы в названии фигурировала фамилия Бреховских, а не Хаскела) или ТММ (transfer matrix method). Gilbert и Backus [19] (1966) использовали более общий подход, получивший название метод матриц-пропагаторов (propagator matrix method – РММ), сводящийся, впрочем, к ТММ при некоторых условиях. Название “метод матриц-пропагаторов” в настоящее время объединяет целую группу матричных методов и почти вытеснило оригинальное название “transfer matrix method”, данное Томсоном, чему виной, в немалой степени, популярная среди сейсмологов книга Аки и Ричардса [20]. Было быстро замечено, что при использовании ТММ возникают вычислительные проблемы на высоких частотах или наличии тонких слоев. Формально математически, трудности связаны с плохой обусловленностью матриц. Матрица плохо обусловлена, поскольку соответствующая ей обратная матрица неустойчива. Как известно, обратная матрица \mathbf{A}^{-1} называется устойчивой, если малым изменениям в элементах матрицы \mathbf{A} соответствуют малые изменения в элементах обратной матрицы \mathbf{A}^{-1} (для устойчивости обратной матрицы, по крайней мере, необходимо, чтобы определитель матрицы был не слишком мал). Как это часто случается, недостаточно написать формально правильные математические выражения, нужно ещё найти эффективный метод численного расчёта. С целью преодоления вычислительных трудностей Л. Кнопов (Knoroff) в 1964 г. [21] предложил использовать матрицы 6×6 . Непосредственный переход от матриц Томсона-Хаскелла к характеристическим матрицам 6×6 был осуществлен в 1965 г. И. Данкином (Dunkin) [22] и Е. Трауэром (Thrower) [23] на основании свойств ассоциированных минорных матриц (Ф.Р. Гантмахер [24]): если для любых матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} , удовлетворяющих условию $\mathbf{AB}=\mathbf{C}$ построить соответствующие минорные матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ и

$\tilde{\mathbf{C}}$, то будет справедливо соотношение $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{C}}$. Ватсон (Watson T.), учитывая повторяющиеся строки и столбцы в характеристических матрицах, показал в 1970 г. возможность перехода к матрицам пятого порядка и ускорения расчетов [25]. Ещё до работ Данкина и Трауэра аналогичная работа была выполнена Молотковым Л.А. [26, 27], однако она осталась незамеченной на Западе. Предпринимались также другие многочисленные попытки модифицировать ТММ (см., например, [28]) с целью увеличения стабильности метода или предложить более эффективный альтернативный вариант. Обобщенный R/T метод (reflection-transmission method) был предложен Kennett [29] (1983) и Luco, Aspel [30] (1983). Позднее Chen X.F. [31], Hisada Y. [32-33], Zeng Y., Anderson J.G. [34], Pei [35-36] и др. внесли усовершенствования в алгоритм R/T метода. Rokhlin S.I. and L. Wang L. [37], основываясь на работе Kausel and Roesset [38] (1981), предложили способ вычисления матрицы податливости с использованием рекурсивных формул (recursive stiffness matrix). Здесь невозможно дать ссылки на все важные работы по методу матриц-пропагаторов, дополнительно отметим лишь работы Маркушевича В.М., Стеблов Г.М., Цемахмана А.С. [39] и Бабешко В.А., Глушкова Е.В., Глушковой Н.В. [40].

Перейдем к безразмерным переменным $u'_{1n} = u_{1n}/h_1$, $u'_{2n} = u_{2n}/h_1$, $\sigma'_{1n} = \sigma_{1n}/\mu_1$, $\sigma'_{2n} = \sigma_{2n}/\mu_1$, $\mu'_n = \mu_n/\mu_1$, $h'_n = h_n/h_1$, где h_1 и μ_1 – некоторые характерные величины, например, толщина и модуль сдвиговой жесткости какого-то выделенного слоя. Величины, относящиеся к верхней и нижней сторонам слоя, будем обозначать значком “+” и “-” соответственно. Введем следующие векторы

$$\mathbf{U}_{\pm} = (u'_{2n}^{\pm}, u'_{1n}^{\pm}, \sigma'_{1n}^{\pm}, \sigma'_{2n}^{\pm})^T$$

Матрица \mathbf{G} , связывающая безразмерные перемещения и напряжения на верхней и нижней сторонах n -ого упругого слоя

$$\mathbf{U}_+ = \mathbf{G}\mathbf{U}_-$$

в [6] записана в виде

$$\mathbf{G}_n(h_n) = \frac{c_{sn}^2}{\Omega^2 c_{s1}^2} \begin{pmatrix} -(k^2 + \zeta_n^2)ch \zeta_n h_n + 2k^2 ch \eta_n h_n & -ik((k^2 + \zeta_n^2)\eta_n^{-1}sh \eta_n h_n - 2\zeta_n sh \zeta_n h_n) \\ ik((k^2 + \zeta_n^2)\zeta_n^{-1}sh \zeta_n h_n - 2\eta_n sh \eta_n h_n) & -(k^2 + \zeta_n^2)ch \eta_n h_n + 2k^2 ch \zeta_n h_n \\ -2i\mu_n k(k^2 + \zeta_n^2)(ch \eta_n h_n - ch \zeta_n h_n) & \mu_n [-(k^2 + \zeta_n^2)^2 \eta_n^{-1}sh \eta_n h_n + 4k^2 \zeta_n sh \zeta_n h_n] \\ \mu_n [4k^2 \eta_n sh \eta_n h_n - (k^2 + \zeta_n^2)^2 \zeta_n^{-1}sh \zeta_n h_n] & -2i\mu_n k(k^2 + \zeta_n^2)(ch \eta_n h_n - ch \zeta_n h_n) \\ -i\mu_n^{-1}k(ch \eta_n h_n - ch \zeta_n h_n) & \mu_n^{-1} [k^2 \eta_n^{-1}sh \eta_n h_n - \zeta_n sh \zeta_n h_n] \\ \mu_n^{-1} [k^2 \zeta_n^{-1}sh \zeta_n h_n - \eta_n sh \eta_n h_n] & -i\mu_n^{-1}k(ch \eta_n h_n - ch \zeta_n h_n) \\ -(k^2 + \zeta_n^2)ch \eta_n h_n + 2k^2 ch \zeta_n h_n & -ik((k^2 + \zeta_n^2)\eta_n^{-1}sh \eta_n h_n + 2\zeta_n sh \zeta_n h_n) \\ -ik((k^2 + \zeta_n^2)\zeta_n^{-1}sh \zeta_n h_n + 2\eta_n sh \eta_n h_n) & -(k^2 + \zeta_n^2)ch \zeta_n h_n + 2k^2 ch \eta_n h_n \end{pmatrix}$$

где $\zeta_n^2 = k'^2 - \Omega^2 c_{s1}^2 / c_{sn}^2$, $\eta_n^2 = k'^2 - \Omega^2 c_{s1}^2 / c_{pn}^2$, $\Omega = \omega h / c_{s1}$ – безразмерная циклическая частота, $k' = kh_1$ – безразмерное волновое число, $c_{sn}^2 = \mu_n / \rho_n$. Ниже штрихи опускаются. Это выражение остается справедливым и для случая, когда в системе слоев присутствуют слои вязкой сжимаемой жидкости, если под “модулем сдвиговой жесткости жидкости” понимать $\mu = -i\omega\chi$ (χ – коэффициент сдвиговой вязкости).

Далее нас будет интересовать только один слой из системы слоёв. Индексы у величин, относящихся к этому слою, будем опускать. Чтобы включить в рассмотрение также случай, когда интересующий нас слой находится не в системе слоёв, а контактирует снизу и сверху с упругими полупространствами, под h_1 будем понимать величину обратную харак-

терному волновому числу $h_1 = k_0^{-1}$. При малой толщине рассматриваемого вязко-упругого слоя в сравнении с длиной волны, выражения для элементов матрицы \mathbf{G} разложим в ряд по малому параметру $h' = hk_0^1$ и оставим только линейные слагаемые

$$\mathbf{G} \approx \begin{pmatrix} 1 & -ikh & 0 & \frac{h}{\mu} \\ -ikhg_{21} & 1 & \frac{h}{\mu}g_{23} & 0 \\ 0 & -\rho'h\Omega^2 & 1 & -ikhg_{34} \\ \rho'hg_{41} & 0 & -ikhg_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

где $g_{21} = 1 - 2c_s^2/c_p^2$, $g_{41} = 4k^2(1 - c_s^2c_p^{-2})c_s^2c_{s1}^{-2} + \Omega^2$, $\rho' = \rho/\rho_1$, $g_{23} = c_s^2/c_p^2$,
 $g_{43} = -1 - 4\frac{k^2c_s^2}{\Omega^2c_{s1}^2} - 2c_s^2/c_p^2$, $g_{34} = 4\frac{k^2c_s^2}{\Omega^2c_{s1}^2} - 3$.

Воспользуемся произволом в выборе нормирующих множителей и выберем c_{s1} так, чтобы она совпадала со скоростью интерференционной волны в системе слоёв. После очевидных преобразований получим

$$\mathbf{G} \approx \begin{pmatrix} 1 & hD & 0 & \frac{1}{K_t} \\ hg_{21}D & 1 & \frac{1}{K_n} & 0 \\ 0 & -\rho'hD^2 & 1 & h\tilde{g}_{34}D \\ \rho'h\tilde{g}_{41}D^2 & 0 & h\tilde{g}_{43}D & 1 \end{pmatrix}$$

где $D = \frac{\partial}{\partial x}$ – дифференциальный оператор, $\tilde{g}_{41} = 4(1 - c_s^2c_p^{-2})c_s^2c_{s1}^{-2} + 1$,

$\tilde{g}_{43} = -1 - 4c_s^2/c_{s1}^2 - 2c_s^2/c_p^2$, $\tilde{g}_{34} = 4\frac{c_s^2}{c_{s1}^2} - 3$, $K_t = \mu/h$, $K_n = \mu/(hg_{23})$. В выражения

для двух элементов матрицы входит параметр c_s^2/c_{s1}^2 , значение которого не определено. Для вязкой жидкости значение этого параметра может быть положено равным нулю, поскольку скорость сдвиговой волны в жидкости на несколько порядков меньше скорости звука и скорости интерференционной волны. Для упругого тела значение параметра может быть взято равным 1. Заметим, что сами эти элементы матрицы очень малы. Таким образом, для длинных волн влияние тонкого слоя может быть смоделировано неклассическими граничными условиями вида

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] &= \mathbf{A}\mathbf{u}^- + \mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}^- \\ [\boldsymbol{\sigma}] &= \mathbf{C}\mathbf{u}^- + \mathbf{F}\boldsymbol{\sigma}^- \end{aligned}$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & hg_{21}D \\ hD & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{K_n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_t} \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -\rho'hD^2 \\ \rho'h\tilde{g}_{41}D^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & h\tilde{g}_{34}D \\ h\tilde{g}_{43}D & 0 \end{pmatrix}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-08-90032-Бел-а).

Литература

1. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – М.: Наука, 1966. 170с.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев, Наукова думка, 1981. 283с.
3. Su Z., Ye L. Identification of Damage Using Lamb Waves – Springer, 2009. (ISBN 1848827830) 354p.
4. Егоров Н.Н. Ультразвуковой контроль протяженных объектов нормальными волнами // «Компетентность», 2005. – №10.
5. ОСТ 5.9332-80. Контроль неразрушающий. Прокат листовой металлический. Ультразвуковые методы контроля сплошности. Ввод в действие 26.02.80, продлен с 25.02.90. М.: Изд-во стандартов, 1980.
6. Ключева Н.В., Солдатов И.Н. Распространение нормальных волн в упругих слоях с нарушенным межслойным контактом // Дефектоскопия (в печати).
7. Newmark N.M., Siess C.P., Viest I.M. Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction. // Proc. Soc. for Experimental Stress Analysis, 1951, v. 9, N. 1, p. 75–92.
8. Murty G.S. A theoretical model for the attenuation and dispersion of Stoneley waves at the loosely bonded interface of elastic half spaces. // Phys. of the Earth & Planetary Interiors, 1975, v. 11, p. 65–79.
9. Banghar A.R., Murty G.S., Raghavacharyulu I.V.V. On the parametric model of loose bonding of elastic half spaces. // J. Acoust. Soc. Amer., 1976, v. 60, p. 1071–1078.
10. Jones J.P., Whittier J.S. Waves at a flexibly bonded interface // Trans. ASME J. Appl. Mech., 1967, v. 34, p. 905–909.
11. Schoenberg M. Elastic wave behavior across linear slip interfaces. // J. Acoust. Soc. Amer., 1980, v. 68, N 5, p. 1516–1521.
12. Nagy P.B. Ultrasonic classification of imperfect interfaces. // J. of Nondestructive Evaluation, 1992, v.11. N 3/4, p. 127–139.
13. Абакумов К.Е., Коновалов Р.С. Влияние нарушения акустического контакта на распространение волн Стоунли вблизи границы твердых полупространств. // Дефектоскопия, 2008, № 3, с. 52–58.
14. Liu E., Hudson J.A., Crampin S., Rizer W.D., Queen J.H. Seismic properties of a general fracture. // Mechanics of Jointed and Faulted Rock, Rossmanith (ed), 1995, p. 673–678.
15. Baik J., Thompson R.B. Long Wavelength Elastic Scattering From a Planar Distribution of Inclusions. // Trans. ASME J. Appl. Mech., 1985, v. 52, N. 4, p. 974–976.
16. Thomson W.T. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // Journal of Applied Physics. 1950. V.21. P. 89-93.
17. Haskell N.A. The dispersion of surface waves on multilayered media. // Bull. Seism. Soc. Am. 1953. V.43. P. 17-34.

18. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. - М. : Изд-во АН СССР. 1957. 504с.
19. Gilbert F., Backus G. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems //Geophysics 1966. V. 31, № 2. P. 326-332.
20. Aki K., Richards P.G. Quantitative seismology. Theory and methods. - W.H Freeman and Company 1980.
21. Knopoff L. A matrix method for elastic wave problems //Bull. Seism. Soc. Am. 1964. V.54, p. 431-438.
22. Dunkin J.W. Computations of modal solutions in layered elastic media at high frequencies // Bull. Seism. Soc. Amer. 1965. V. 55, № 2, p.335-358.
23. Thrower E.N. The computation of the dispersion of elastic waves in layered media // J. Sound Vib. 1965. V. 2. p. 210-226.
24. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2004. 560с.
25. Watson T.H. A note on fast computation of Rayleigh wave dispersion in the multilayered elastic half-space // Bull. Seism. Soc. Amer. 1970. V. 60. № 1. P. 161-166.
26. Молотков Л.А. О распространении упругих волн в средах, содержащих тонкие плоско-параллельные слои. - В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л., 1961, сб. №5, с.240-280.
27. Молотков Л.А. О матричных представлениях дисперсионного уравнения для слоистых упругих сред. // Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1972, т.25, с.116-131.
28. Hosten B., Castaings M. Delta operator technique to improve the Thomson-Haskell-method stability for propagation in multilayered anisotropic absorbing plates // J. Acoust. Soc. Amer., 1994. V. 95, 1931–1941.
29. Kennett B.L.N. Seismic wave propagation in stratified media - Cambridge: Cambridge University Press. 1983.
30. Luco J. E., R. J. Apsel On the Green's function for a layered half-space, Part I // Bull. Seism. Soc. Amer., 1983. V.73. P. 909-929.
31. Chen X F. A systematic and efficient method of computing normal modes for multi-layered half-space. // Geophys. J. Int., 1993. V.115. №2. P. 391-409.
32. Hisada Y. An efficient method for computing Green's functions for a layered halfspace with sources and receivers at close depths // Bull. Seism. Soc. Amer. 1994. V. 84, 1456-1472.
33. Hisada Y. An efficient method for computing Green's function for a layered half space with sources and receivers at close depth (part 2) // Bull. Seism. Soc. Amer. 1995. V. 85, 1080-1093
34. Zeng Y., Anderson J.G. A method for direct computation of the differential seismograms with respect to the velocity change in a layered elastic solid // Bull. Seism. Soc. Amer. 1995. V. 85. № 1. P. 300-307.
35. Pei D., Louie J.N., Pullammanappallil S.K. Improvements on computation of phase velocities of Rayleigh waves based on the generalized R/T coefficient method // Bull. Seism. Soc. Amer. 2008 V.98. P. 280-287.
36. Pei D., Louie J.N., Pullammanappallil S.K. Erratum to “Improvements ...”// Bull. Seism. Soc. Amer. 2009. Vol. 99, No. 4, P. 2610– 2611.
37. Rokhlin S.I., Wang L. Stable recursive algorithm for elastic wave propagation in layered anisotropic media: Stiffness matrix method //J. Acoust. Soc. Am. 2002 112(3), Pt.1. P. 822-834.
38. Kausel E., Roesset J.M. Stiffness matrices for layered soils // Bull. Seism. Soc. Amer. 1981 V. 71. No. 6. P. 1743-1761.
39. Маркушевич В.М., Стеблов Г.М., Цемахман А.С. Быстрый алгоритм матричного пропагатора на основе представления Штурма-Лиувилля для волн Рэлея // ДАН 1992. Т. 325. № 4. С.724-729.
40. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Методы построения матрицы Грина стратифицированного упругого полупространства //ЖВМиМФ. 1987. Т.27. №1. С. 93-101.

Поступила: 22.11.12.