УДК 621.01

# О ПЛАНИРОВАНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ДВУХМАССОВОЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ

**© Исаак Наумович Статников, Георгий Игоревич Фирсов**
*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки*
*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН*
*instant@gmail.com; firsovgi@mail.ru*

***Аннотация.*** *Рассмотрены проблемы относящиеся, к планированию вычислительных экспериментов, проводимых при изучении двухмассовых виброударных систем. - в заданной исходной области изменения коэффициентов математической модели (для конструктивных параметров реальной системы) удается выделить некоторые подобласти, концентрирующие наилучшие решения по критерию качества движения масс, причем для большинства критериев эти подобласти совпадают между собой. Получены другие важные выводы.*

***Ключевые слова:*** *двухмассовая виброударная система, удар, динамические критерии, вычислительные эксперименты, алгоритм ПЛП – поиска, критерии качества движения.*

В работах [1,2] описаны краткие результаты расчетов динамического поведения двухмассовой виброударной системы, моделирующей колебания $i$-го сечения теплообменной трубы [3],

$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i + p_{ix}(\dot{x},\dot{y}) + q_{ix}(x,y) &= F_{ix}(t),\\ m_i\ddot{y}_i + p_{iy}(\dot{x},\dot{y}) + q_{iy}(x,y) &= F_{iy}(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $m_i$ - масса, приведенная к рассматриваемому $i$-му сечению; $p_{ix}(\dot{x},\dot{y}), p_{iy}(\dot{x},\dot{y})$ - проекции на оси $x$ и $y$ сил сопротивления движению, которые предполагаются зависящими как от скоростей в $i$-м сечении, так и от скоростей относительного перемещения сечения; $q_{ix}(x,y), q_{iy}(x,y)$ - проекции упругой силы, зависящие от величин абсолютного смещения $i$-го и относительного смещения обоих сечений из положения статического равновесия, отвечающего недеформированному состоянию упругой системы; $F_{ix}(t), F_{iy}(t)$ - внешние силы, возбуждающие колебания, которые задаются в виде явных функций времени.

В предположении линейности диссипативных и упругих сил в (1) запишем систему уравнений на интервалах движения в зазоре в следующем виде

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) &= P_{1x}\sin\omega t,\\ m_1\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 + k_1y_1 + c_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2(y_1 - y_2) &= P_{1y}\sin 2\omega t, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} m_2\ddot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + c_3\dot{x}_2 + k_3x_2 &= P_{2x}\sin\omega t,\\ m_2\ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2(y_2 - y_1) + c_3\dot{y}_2 + k_3y_2 &= P_{2y}\sin 2\omega t. \end{aligned} \tag{3}$$

Удвоенная частота возбуждающей силы, действующей по оси $y$, соответствует вихревому характеру возбуждения колебаний трубы потоком жидкости [3]. Система уравнений (2), (3) может использоваться только при движении обеих масс без контакта с ограничителем. В рассматриваемой модели предполагается, что каждая из масс совершает плоское поступательное движение, причем и массы, и ограничители имеют круглую форму. Соответствующие геометрические характеристики масс и ограничителей обозначим так: $r_{i1}$ - радиус $i$-й массы; $r_{i2}$ - радиус ограничителя; $\Delta_i = r_{i2} - r_{i1}$ - максимальное относительное перемещение центра $i$-й массы в зазоре; $e_{ix}$ , $e_{iy}$ - координаты центра для $i$-го ограничителя (эксцентриситеты). При недеформированном состоянии упругой системы координаты центров обеих масс равны нулю, $x_i = y_i = 0$, что вытекает из системы уравнений (2), (3), другими словами, начало системы координат совпадает с недеформированным положением системы.

Принятые допущения и условия соударения масс приведены в работе [1]. Основные положения по формированию системы уравнений и алгоритмам расчета динамики рассматриваемой системы приведены в работах [4,5]. К анализируемым динамическим характеристикам относятся следующие: $A_i$ - полное число ударов $i$-й массы; $\Sigma|u_{i-}|$, $\Sigma|v_{i-}|$ - накопленные тангенциальная и нормальная составляющие скорости удара $i$-й массы; $\tau_i$, $\Sigma|s_i|$ - полная длительность режима скольжения и полный путь скольжения $i$-й массы; $\int \Phi_{in} dt$ - полный импульс силы нормального давления при скольжении $i$-й массы. После завершения процесса моделирования полученные накопленные значения динамических характеристик нормируются. Величины $A_i$ делятся на число периодов интегрирования, так что нормированные значения определяют среднее число ударов на период возбуждающей силы, если эта величина равна нулю, то имеет место безударный режим чистого скольжения. Остальные характеристики нормируются длительностью интервала реализации, определяя среднее значение соответствующего критерия в единицу времени.

Помимо перечисленных выше в отдельных вычислительных экспериментах (ВЭ) определялись и характеристики «комплексного» характера, относящиеся к ударным взаимодействиям и к режиму скольжения. Такими характеристиками являются, соответственно, средняя полная скорость удара $\sqrt{(u_{i-})^2 + (v_{i-})^2}$ и среднее значение работы сил трения скольжения $\int f \Phi_{in} ds_i$, где $f$ - коэффициент ударного трения, определяющий уменьшение тангенциальной составляющей скорости удара вследствие мгновенного проскальзывания соударяющихся тел.

В качестве варьируемых параметров были выбраны следующие: значения радиусов зазоров $\Delta_1$ и $\Delta_2$, ограничивающих перемещение масс; значения составляющих $e_{ix}$, $e_{iy}$, эксцентриситетов, определяющих положение центров ограничителей относительно равновесного положения упругой системы; амплитуды $P_{ix}$, $P_{iy}$ возбуждающих сил и частота возбуждения $\omega$.

Введем вектор $\bar{\alpha}$ варьируемых параметров, используя следующие обозначения: $\alpha_1 = \Delta_1$, $\alpha_2 = \Delta_2$ , $\alpha_3 = e_{1x}$, $\alpha_4 = e_{1y}$, $\alpha_5 = e_{2x}$, $\alpha_6 = e_{2y}$, $\alpha_7 = \ln (P_{1y}/P_{1x})$, $\alpha_8 = \ln (P_{2y}/P_{2x})$, $\alpha_9 = \omega$. Представление отношений амплитуд возбуждающих сил в форме экспоненциальной функции от соответствующих параметров $\alpha_7$ и $\alpha_8$, равномерно распределенных в анализируемой области пространства параметров, позволяет эффективно проводить вычислительные эксперименты в достаточно широкой зоне изменения отношений $P_{iy}/P_{ix}$, охватывающей точку равенства амплитуд $P_{ix} = P_{iy}$ ($\alpha_j = 1$).

Приведем обозначения динамических критериев:

$\Phi_1(\bar{\alpha})$ , $\Phi_4(\bar{\alpha})$ - среднее значение числа ударов первой и второй масс в установившемся режиме за один период возбуждающей силы;

$\Phi_2(\bar{\alpha})$, $\Phi_5(\bar{\alpha})$ - среднее значение накопленной нормальной составляющей ударной скорости первой и второй масс в единицу времени;

$\Phi_3(\bar{\alpha})$ , $\Phi_6(\bar{\alpha})$ - среднее значение накопленной тангенциальной составляющей ударной скорости первой и второй масс в единицу времени;

$\Phi_7(\bar{\alpha})$ - средняя доля времени, когда первая масса двигалась в контакте с ограничителем (режим скольжения);

$\Phi_8$(□) - среднее значение скорости скольжения по ограничителю для первой массы;

$\Phi_9(\bar{\alpha})$ - среднее значение силы нормального давления первой массы на ограничитель (для критериев $\Phi_8$ и $\Phi_9$ в качестве нормирующего множителя при усреднении выбирается длительность интервала скольжения). Аналогичные критерии с индексами от $\Phi_{10}$ до $\Phi_{12}$ вычисляются для движения массы $m_2$ в режиме скольжения по ограничителю.

В работах [1,2] анализ динамических свойств двухмассовой системы проводился путем построения сечений для области

$$\begin{cases} \alpha_1 \in (0,05;0,85); & \alpha_4 \in (0,05;0,85); & \alpha_7 \in (-1,7;1,7); \\ \alpha_2 \in (0,05;0,85); & \alpha_5 \in (0,05;0,85); & \alpha_8 \in (-1,7;1,7); \\ \alpha_3 \in (0,05;0,85); & \alpha_6 \in (0,05;0,85); & \alpha_9 \in (0,7;2,4). \end{cases} \quad (4)$$

пространства параметров по частоте ω при фиксированных значениях всех параметров, за исключением величин зазоров $\Delta_1$, $\Delta_2$. Очевидно, что проводить аналогичное исследование для каждого из параметров рассматриваемой системы не представляется возможным в силу высокой размерности пространства параметров. Поэтому дальнейшее исследование с учетом найденных в [1,2] качественных закономерностей целесообразно проводить методом планируемого вычислительного эксперимента, основные принципы которого изложены в работах [6-9].

Каждый из проведенных ВЭ включал формирование плана-матрицы варьируемых параметров динамической системы, $k$-я строка которой представлялась используемым вектором параметров $\bar{\alpha}_k$ , а число строк (т.е. число ВЭ) обозначалось через $N_0$. По результатам моделирования каждому вектору $\bar{\alpha}_k$ параметров системы ставится в соответствие вектор $\bar{\Phi}_k$ значений критериев. Полученная матрица критериев дает возможность, несмотря на высокую размерность пространства варьируемых параметров, проводить одномерный анализ по всем парам «критерий – варьируемый параметр», при этом безусловно надо все время иметь ввиду, что мы оперируем усредненными величинами. Структура метода ПЛП-поиска позволяет дополнительно к такому анализу привлекать для получения простейших количественных оценок однофакторный дисперсионный анализ, а для выработки качественных представлений — строить наглядные графические отображения для средних значений анализируемых критериев зависимости от различных параметров. Очевидно, что такая структура метода достаточно хорошо приспособлена к ведению диалога между исследователем и ЭВМ, способствуя более полной реализации его знаний и интуитивных представлений об исследуемом объекте.

В табл. 1 перечислены все 10 групп проведенных ВЭ и указаны их основные характеристики, к которым относятся:

$N_0$ - число векторов $\bar{\alpha}_k$ (пробных точек) для данного ВЭ;

$J$ - число независимо варьируемых параметров в каждом векторе $\bar{\alpha}_k$;

$M$ - число векторов $\bar{\alpha}_k$, входящих в каждую серию эксперимента;

$T$ - число серий ВЭ ($N_0=T\times M$);

$G(\alpha)$ - область изменения параметров модели.

Кроме того, в табл. 1 указано, когда отдельные пары параметров модели $\alpha_i$, $\alpha_j$, входящие в $\bar{\alpha}$ , выбирались совпадающими.

Целесообразность представления матрицы планируемого ВЭ в виде последовательности из $T$ отдельных серий, каждая из которых включает по $M$ векторов параметров, обусловлена тем обстоятельством, что число $M$ экспериментов в серии совпадает с числом уровней изменения для каждого из параметров, причем для применяемого метода ПЛП-поиска каждый из параметров $\alpha_j$ «пробегает» в каждой из серий по всем заданным уровням. Таким образом, в каждой из серий получаем по одному уровню для каждого из параметров $\alpha_j$, так что для $N_0$=$T$×$M$ точек моделирования имеем $T$ выборок по $M$ значений на каждом из уровней параметра $\alpha_j$.

Алгоритм ПЛП-поиска позволяет получать выборки из средних значений критериев $\{\bar{\Phi}_{kij}\}$, где $\bar{\Phi}_{kij}$ - среднее значение $k$-го критерия $\Phi_k(\bar{\alpha})$ на $i$-ом уровне $j$-го параметра при любых значениях остальных ($J$ – 1) параметров из области изменения допустимых значений этих параметров $G(\bar{\alpha})$: $G(\bar{\alpha}) = \{\forall \alpha_j \in G(\bar{\alpha}), \alpha_{j*} \le \alpha_j \le \alpha_{j**}\}$, здесь $k$ = 1,…, $K$; $i$ = 1,… $M_j$, $j$ = 1,…, $J$, где $K$ - число критериев, $J$ - число варьируемых коэффициентов и $M_j$ - число уровней, на которые разбивается $j$-ый коэффициент.

Результаты статистической обработки ВЭ представляются в виде соответствующих таблиц. В таблицах первого вида отражены сводные статистические характеристики результатов каждого из ВЭ: средние значения $\bar{\Phi}_{k0}$ критериев $\Phi_k(\bar{\alpha})$ по всей совокупности $N_0$ ВЭ, их среднеквадратические отклонения от $\bar{\Phi}_{k0}$, изменчивость выборки, максимальное и минимальное значения $\Phi_k(\bar{\alpha})$. В таблицах второго вида представлены результаты однофакторного дисперсионного анализа по каждому критерию для каждого параметра. Всюду в этих таблицах на пересечении столбца ($k$-ый критерий) и строки ($j$-ый параметр) записана следующая информация: интервал значений уровней значимостей ($\beta_1$, $\beta_2$) для найденного значения критерия F, степени свободы анализировавшейся выборки данных $\nu_1$ и $\nu_2$ и эмпирическое значение F критерия Фишера.

**Таблица 1**

| №№ п/п | Обозначение ВЭ | Условия проведения ВЭ |
|---|---|---|
| 1. | Эксперимент I $N_0$ = 256 | Задана область исследования (4) в виде исходного гиперпараллелепипеда; во всех ВЭ $\Delta_1 = \Delta_2$ и $P_{1y} = P_{2y}$ |
| 2. | Эксперимент Iа $N_0$ = 64 | По результатам предыдущих ВЭ выделена область концентрации $G_1(\bar{\alpha})$ наилучших решений по всем критериям качества; $\Delta_1 = \Delta_2$; $P_{1y} = P_{2y}$ |
| 3. | Эксперимент Iб $N_0$ = 64 | В области $G_1(\bar{\alpha})$ параметры амплитуд и частоты возбуждения брались из исходного диапазона области (4): $\Delta_1 = \Delta_2$; $P_{1y} = P_{2y}$ |
| 4. | Эксперимент Iв $N_0$ = 64 | Задана область исследования $G_1(\bar{\alpha})$, но во всех ВЭ $\Delta_1 \neq \Delta_2$, в $P_{1y} = P_{2y}$ |
| 5. | Эксперимент Iг $N_0$ = 128 | Задана исходная область исследования (4), но во всех ВЭ: $\Delta_1 = \Delta_2$, а $P_{1y} \neq P_{2y}$ |
| 6. | Эксперимент II $N_0$ = 256 | Задана область исследования (4), но во всех ВЭ $\Delta_1 \neq \Delta_2$, в $P_{1y} = P_{2y}$ |
| 7. | Эксперимент IIа $N_0$ = 64 | По результатам предыдущих экспериментов выделена область концентрации $G_2(\bar{\alpha})$ наилучших решений по всем критериям качества: $\Delta_1 \neq \Delta_2$; $P_{1y} = P_{2y}$ |
| 8. | Эксперимент IIб $N_0$ = 64 | В выделенной области $G_2(\bar{\alpha})$ оставили исходные диапазоны варьирования амплитуд и частоты возбуждения: $\Delta_1 \neq \Delta_2$; $P_{1y} = P_{2y}$ |
| 9. | Эксперимент IIв $N_0$ = 64 | В исходной области (4) оставили без изменения диапазон варьирования амплитуды возбуждения, а диапазон частоты возбуждения выбран между двумя собственными частотами системы: $\Delta_1 \neq \Delta_2$; $P_{1y} = P_{2y}$ |
| 10. | Эксперимент IIг | Задана область исследования (4) и варьировались все параметры, т.е.: |

| | | |
|---|---|---|
| | $N_0 = 128$ | $\Delta_1 \neq \Delta_2$ и $P_{1y} \neq P_{2y}$ |

В этих таблицах отражены такие интервалы теоретических значений критерия Фишера [10], что при приведенных значениях $\nu_1$ и $\nu_2$ эмпирическое значение F удовлетворяет неравенству

$$F_{\beta_1} < F < F_{\beta_2}. \qquad (5)$$

Неравенство (5) означает, что вероятность

$$P1 - \beta_1 < P < 1 - \beta_2. \qquad (6)$$

Полученный доверительный интервал (6) используется для проверки гипотезы о том, что имеет место существенное влияние изменения параметра $\alpha_j$ на значения критерия $\Phi_k$ при произвольном изменении всех остальных варьируемых параметров в заданных диапазонах. Величина $P$, входящая в (6), представляет собой вероятность того, что гипотеза о существенной зависимости $\Phi_k$ от $\alpha_j$ справедлива. Если бы такая существенная зависимость отсутствовала, то средние значения $\overline{\Phi}_{kij}$, взятые при различных уровнях параметра $\alpha_j$, представляли бы собой статистически однородную выборку.

Применяемый метод, как и другие методы статистического анализа, требует от пользователя принятия некоторого интуитивного уровня достоверности при оценке полученных результатов. Если значение ($1 - \beta_1$), дающее нижнюю границу доверительного интервала для вероятности $P$, оказывается выше принятого уровня достоверности, то анализируемая гипотеза считается статистически обоснованной. В большинстве практических приложений статистических методов используются уровни достоверности порядка 0,95 или 0,98.

В таблицах третьего вида представлены результаты линейного корреляционного анализа по каждому эксперименту из табл. 1 в предположении о возможной линейной связи между критериями $\Phi_k(\overline{\alpha})$. Для этого вычислялись нормированные значения коэффициентов $r_{lk}$ ($l = \overline{1,K}; k = \overline{1,K}; l \neq k$; при $l = k$ имеем $r_{ll} = r_{kk} = 1$), являющихся оценками коэффициентов корреляции $\rho_{lk}$. Структура указанных таблиц имеет следующий вид: над диагональю таблицы выписываются значения коэффициентов $r_{lk}$, а под диагональю — соответствующие им эмпирические (расчетные) значения критериев Стьюдента $t^{э}_{lk}$, удостоверяющие статистическую значимость этих коэффициентов. Степень статистического влияния параметров на критерии маскируется возможной корреляцией самих значений критериев (линейной или нелинейной). Сама же корреляция обуславливается как условиями проведения ВЭ (например, степенью независимости варьируемых параметров), так и реально существующей функциональной (детерминированной) связью между критериями; установление такой функциональной связи затруднительно вследствие невозможности получить в замкнутом виде аналитические решения исходной существенно нелинейной системы дифференциальных уравнений. С этой целью для всех групп ВЭ исчислялись коэффициенты $r_{lk}$ по формуле

$$r_{lk} = \frac{\sum_{p=1}^{N_0} \Phi_{pl}\Phi_{pk} - \left(\sum_{p=1}^{N_0} \Phi_{pl}\right)\left(\sum_{p=1}^{N_0} \Phi_{pk}\right) \Big/ N_0}{\sqrt{\left[\sum_{p=1}^{N_0} \Phi_{pl}^2 - \left(\sum_{p=1}^{N_0} \Phi_{pl}\right)^2 \Big/ N_0\right]}\sqrt{\left[\sum_{p=1}^{N_0} \Phi_{pk}^2 - \left(\sum_{p=1}^{N_0} \Phi_{pk}\right)^2 \Big/ N_0\right]}}$$

и значения коэффициентов Стьюдента $t^{э}_{lk}$, которые вычислялись по формуле

$$t^{э}_{lk} = \sqrt{N}\left|r_{lk}\right| / \left(1 - r_{lk}^2\right).$$

Значимость коэффициентов $r_{lk}$ определяется следующим образом: при $t_{lk}^{э} \in \left(t_{\beta_1}, t_{\beta_2}\right)$ и заданном числе степеней свободы выборки $\nu = N_0$ -1 можно утверждать, что с вероятностью $P \in \left(1-\beta_1, 1-\beta_2\right)$ данный коэффициент $r_{lk}$ значим или, наоборот, с вероятностью, равной (1 – $P$), его значение случайно.

В результате проведенного вычислительного эксперимента с исследуемой двухмассовой виброударной системой с двумя степенями свободы:

- в заданной исходной области изменения коэффициентов математической модели (для конструктивных параметров реальной системы) удается выделить подобласти $G_k(\bar{\alpha})$, концентрирующие наилучшие решения по критерию качества движения масс $\Phi_k(\bar{\alpha})$, причем, для большинства критериев эти подобласти совпадают между собой;

- вывод из предыдущего пункта объясняется твердо установленных фактами наличия сильных линейных корреляционных связей между критериями (положительных и отрицательных); наличие таких связей позволяет существенно снизить размерность пространства критериев;

- установлен и статистически подтвержден факт о том, что в исследуемой математической модели наличие неравных зазоров в двух ударных парах при неравных амплитудах сил возмущения приводит к улучшению характеристик ударного режима, не меняя существенно значения характеристик режимов скольжения;

- в рамках рассматриваемой математической модели установлено, что минимальные значения динамических нагрузок при ограничении диапазонов варьирования анализируемых параметров (при выделении областей концентрации наилучших решений) достигаются в том случае, когда принимаются равными и величины зазоров в обеих парах, и амплитуды сил возбуждения.

## Литература

1. Статников И.Н., Фирсов Г.И. Использование ПЛП-поиска в задачах исследования виброударных систем // Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем. XV симпозиум (Москва - Звенигород, 17-23 сентября 2006г.). Сб. трудов. - М.: ИМАШ РАН, 2006. - С.290-295.

2. Динамика конструкций гидроаэроупругих систем / Фролов К.В., Махутов Н.А., Каплунов С.М. и др.); отв. ред. Каплунов С.М., Смирнов Л.В. – М.: Наука, 2002. – 397 с.

3. Махутов Н.А., Каплунов С.М., Прусс Л.В. Вибрация и долговечность судового энергетического оборудования. - Л.: Судостроение, 1985. - 302 с.

4. Кобринский А.А., Кобринский А.Е. Двумерные виброударные системы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 336 с.

5. Каплунов С.М., Кобринский А.А., Статников И.Н. К анализу двумерных виброударных колебаний для многопролетных труб теплообменных аппаратов // Нелинейные колебания механических систем. Ч. 2. – Горький: Изд. ГГУ, 1987. – С.91-93.

6. Статников И.Н., Фирсов Г.И. ПЛП-поиск - эвристический метод решения прикладных задач оптимизации // Практика применения научного программного обеспечения в образовании и научных исследованиях. - СПб.: СПбГПУ, 2003. - С. 54-67.

7. Статников И.Н., Андреенков Е.В. ПЛП-поиск - эвристический метод решения задач математического программирования. - М.: Изд-во МГУДТ, 2006. - 140 с.

8. Статников И.Н., Фирсов Г.И. Эвристические возможности ПЛП-поиска при проектировании динамических систем // Обозрение прикладной и промышленной математики. - 2008. - Т.15, вып. 3. - С.930-931.

9. Статников И.Н., Фирсов Г.И. ПЛП-поиск – эвристический метод отыскания рациональных решений в задачах проектирования динамических систем // Проблемы

машиноведения. Сборник трудов конференции (Москва, 12-14 октября 2008 г.) - М.: ИМАШ РАН, 2008. - С. 502-506.

10. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. - М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит. 1971. - 576 с.

*Поступила: 07.04.12.*