УДК 534.1

РАСЧЕТ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ЗОММЕРФЕЛЬДА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДВИГАТЕЛЕМ ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ

© Александр Михаилович Гуськов[1], Григорий Яковлевич Пановко[2]

[1]Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
[2] Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
gouskov_am@mail.ru; gpanovko@yandex.ru

Аннотация. *Проводится численный анализ периодических режимов движения механической системы, взаимодействующей с электрическим двигателем ограниченной мощности. Рассмотрены вопросы, связанные с проявлением эффекта Зоммерфельда, дано подробное описание ряда механических явлений.*

Ключевые слова: *упруго-вязкая опора, колебательная система, уравнения движения с учетом свойств привода, параметрическое возбуждение, динамическая неустойчивость, бифуркационный анализ.*

Расчетная модель рассматриваемой системы представлена на рис. 1, где схематично изображена платформа с установленным на ней электродвигателем с неуравновешенным ротором [1 - 3]. Горизонтальное перемещение платформы по идеальному основанию ограничено линейной упруговязкой опорой. Движение системы будем рассматривать относительно неподвижной системы координат *Oxy* (рис. 1), начало которой совмещено с положением статического равновесия общего центра масс платформы и электродвигателя, причем вертикальная ось *Oy* совпадает с направлением вектора сила тяжести.

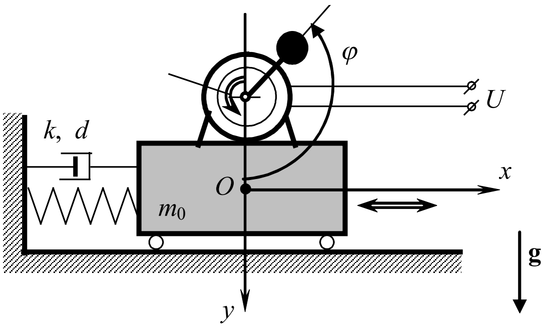

Рис. 1

Горизонтальное смещение платформы описывается координатой x, а угол φ поворота ротора электродвигателя отсчитывается против часовой стрелки от положительного направления вертикальной оси *Oy* (рис. 1).

Движущий (вращающий) момент $M_e(i)$ электродвигателя (для определенности – постоянного тока) зависит от силы тока i в обмотке якоря, который определяется законом Кирхгофа [2, 4].

С учетом сделанных предположений полная система уравнений, описывающих движение системы и силу тока в цепи обмотки якоря электродвигателя, может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}
&m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=-m_e e[\ddot{\varphi}\cos\varphi-(\dot{\varphi})^2\sin\varphi];\\
&\left(J+m_e e^2\right)\ddot{\varphi}+m_e e\left(\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi\right)=M_e(i)-M_c;\\
&L\frac{di}{dt}+iR+K\dot{\varphi}=U,
\end{aligned} \qquad (1)$$

где $m=m_0+m_e$ – полная масса системы; m_0 – масса платформы с электродвигателем; m_e – масса ротора; b и k – коэффициенты демпфирования и жесткости упруговязкой опоры; e – расстояние от оси вращения ротора до его центра масс (эксцентриситет); J – центральный момент инерции ротора; $M_e=Ki$ – движущий момент электродвигателя; K – постоянная э.д.с. двигателя; U – напряжение, приложенное к обмотке якоря; L и R – индуктивность и сопротивление обмотки якоря; M_c – момент сопротивления вращению ротора двигателя; g – ускорение силы тяжести.

Отметим одну важную особенность системы уравнений (1): ее решения зависят от напряжения U, подаваемого на электродвигатель, которое является *управляющим воздействием (параметром)*, причем горизонтальные колебания платформы можно рассматривать как *параметрическое возбуждение* колебаний угловой скорости ротора, считая ее независимой переменной.

В *нерезонансных* областях амплитуды колебаний твердого тела (платформы) незначительны и их воздействие на угловую скорость ротора также незначительно. В *резонансной* области картина развития колебаний существенно меняется: амплитуды колебаний твердого тела увеличиваются, и частота вращения ротора может резко изменяется. Это скачкообразное изменение частоты приводит и скачкообразному изменению амплитуды и частоты колебаний самого тела (*эффект Зоммерфельда*) [5]. Тем самым в системе проявляется *динамическая неустойчивость* периодических режимов движения. Отметим, что в системах с ограниченным возбуждением могут наблюдаться не только скачкообразное изменение амплитуд и частот колебаний, но, в ряде случаев, при недостаточной мощности двигателя и невозможность преодоления резонанса.

При исследовании колебаний в системах с приводом ограниченной мощности свойства привода довольно часто представляют в упрощенном виде, считая в первом приближении, что $\frac{di}{dt} \approx 0$. Тогда из последнего уравнения системы (1) следует:

$$i = \frac{U - K\dot{\varphi}}{R}. \tag{2}$$

С учетом (2) движущий момент $M_e = Ki$ во втором уравнении системы (1) представляет собой *статическую* характеристику двигателя

$$\begin{gathered} M_e = M_0 - M_1\dot{\varphi}, \\ M_0 = \frac{UK}{R}, \; M_1 = \frac{K_2}{R}, \end{gathered} \tag{3}$$

т.е. связь между моментом и угловой скоростью при отсутствии нагрузки на ротор двигателя.

Обычно решение системы (1) с учетом (3) сводят к нахождению периодических режимов движения методами возмущений в виде зависимости координаты x от средней угловой скорости $\overline{d\varphi/dt}$ ротора вблизи основного резонанса и анализу их устойчивости [1-3]. Тем самым из рассмотрения «выпадает» роль *истинного управляющего параметра – напряжения электрического тока*, определяющего поведение фазовых переменных системы (1), что ограничивает анализ движений *всех* подсистем и устойчивость получаемых периодических решений. В результате получаемое решение обладает рядом дефектов:

1. Создается ложное представление об угловой скорости вращения ротора, как о независимой переменной.

2. Не удается в естественном виде представить бифуркационную картину потери устойчивости периодических движений динамической системы и выявить тип имеющих место бифуркаций.

В настоящем работе задача о нахождении периодических движений платформы и ротора и анализ их устойчивость решается *в зависимости от параметра управления* (напряжения U в цепи возбуждения электродвигателя) численно методом продолжения по параметру, где в качестве параметра рассматривается дуга в четырехмерном пространстве – три начальных условия и управляющий параметр [6].

Приведем уравнения системы (1) при учете статической характеристики (3) к безразмерному виду, используя безразмерное время $\tau = t/T_*$ ($T_* = \sqrt{m/k}$) и безразмерное перемещение $\xi = x/X_*$, $X_* = \sqrt{(J + m_e e^2)/m}$:

$$\begin{aligned} &\xi'' + 2\zeta\xi' + \xi = -E[\varphi''\cos\varphi - (\varphi')^2\sin\varphi]; \\ &\varphi'' + E[\xi''\cos\varphi + \beta\sin\varphi] = \Gamma - \gamma_c, \end{aligned} \tag{4}$$

где $(...)' = d(...)/d\tau$ – производные по безразмерному времени τ; $E = (m_e e)/(mX_*)$ – эксцентриситет ротора; $\zeta = b/(2kT_*)$ – нормированный коэффициент линейного демпфирования; $\beta = gT_*^2/X_*^2$ – вес ротора; $\Gamma = \gamma_0(u - \varphi'/\omega_0)$ – движущий момент двигателя; $(\gamma_0 u) = KU/kRX_*^2$ – максимальный момент; создаваемый электродвигателем; $\gamma_c = M_c/kX_*^2$ – постоянный момент сопротивления вращения ротору двигателя; $(u\omega_0)$ – круговая частота вращения электродвигателя без нагрузки, $\omega_0 = \Omega_0 T_*$.

Используя обозначения $\nu \doteq \xi'$, $\omega \doteq \varphi'$, разрешим уравнения (4) относительно переменных $\{\nu', \omega'\}$:

$$\begin{aligned} &\nu' = P_\nu, \qquad P_\nu = \frac{1}{D}\left(Q_\xi - EQ_\varphi\cos\varphi\right); \\ &\omega' = P_\omega, \qquad P_\omega = \frac{1}{D}\left(-EQ_\xi\cos\varphi + Q_\varphi\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где $D = 1 - E^2\cos^2\varphi$, $Q_\xi = -\xi - 2\zeta\nu + E\omega^2\sin\varphi$, $Q_\varphi = -\beta E\sin\varphi + \gamma_0(u - \omega/\omega_0) - \gamma_c$.

Вводя обозначения

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \doteq \begin{Bmatrix} \xi \\ \varphi \\ \nu \\ \omega \end{Bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{6}$$

где

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T, \quad \mathbf{f} = \{x_3, x_4, P_\nu, P_\omega\}^T, \tag{7}$$

уравнения (5) приводятся к нормальной форме Коши.

Уравнения (6) и (7) описывают нелинейную (автономную) динамику горизонтальных движений платформы с установленным на ней вращающимся неуравновешенным ротором, приводимым в движение электродвигателем с ограниченной мощностью. Мощность электродвигателя определяется, как $\mathrm{N}_u = \Gamma\omega = \gamma_0(u - \omega/\omega_0)\omega$ и достигает своего максимума $\mathrm{N}_{u\max} = (\gamma_0 u)(u\omega_0)/4$ при частоте вращения, равной $\omega = u\omega_0/2$. Таким образом, для описания динамики платформы необходимо задать семь безразмерных параметров

$$E, \zeta, \beta, \gamma_c, \gamma_0, \omega_0, u \tag{8}$$

и четыре начальных условия

$$\xi(0),\ \varphi(0),\ \nu(0),\ \omega(0). \tag{9}$$

Бифуркационный анализ. Численное решение строится с помощью метода установления последовательного нагружения [6] по параметру возбуждения – напряжения тока u в обмотке якоря при $E = 0{,}1$; $\beta = 0{,}5$; $\gamma_c = 0{,}05$; $\gamma_0 = 0{,}5$; $\omega_0 = 5$ для двух различных значений параметра демпфирования ζ.

На рис. 2 приведены бифуркационные диаграммы последовательных экстремумов (отображение Пуанкаре - *а* и интервалы времени - *б*) положения платформы Extr[ξ] и угловой скорости ротора Extr[ω]. Как видно из приведенных рисунков в интервалах $0{,}1900 < u < 0{,}1925$ и $0{,}3700 < u < 0{,}3725$ происходит скачкообразное изменение уровня и вида вибраций платформы и угловой скорости ротора. На участке $u < 0{,}1900$ вибрации не возбуждаются: ротор и платформа остаются неподвижными. На участке $0{,}1925 < u < 0{,}3700$ происходит медленный рост средней круговой частоты вращения ротора от $\overline{\omega} \approx 0{,}5$ до $\overline{\omega} \approx 1$. При $u > 0{,}3725$ происходит рост частоты вращения ротора пропорционально уровню возбуждения.

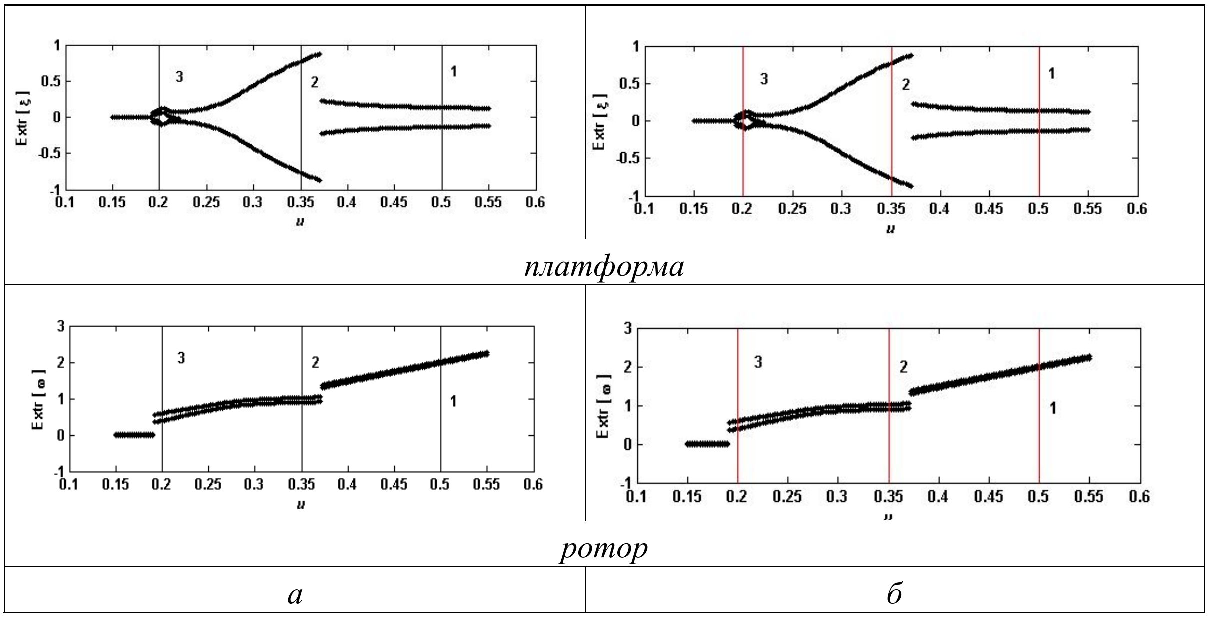

Рис. 2

Анализ 2π-периодических движений. Для вычисления периодических движений системы за один полный оборот ротора двигателя (при его вращении без остановок) целесообразно от безразмерного времени τ перейти к новой независимой переменной – углу поворота ротора φ. Тогда при замене $\tau \to \varphi$:

$$\frac{d(\ldots)}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d(\ldots)}{d\varphi}; \quad \omega = \frac{d\varphi}{d\tau}. \tag{10}$$

Используя обозначения $y_1 \doteq x_1 = \nu,\ y_2 \doteq x_2 = \xi,\ y_3 \doteq x_3 = \omega$, уравнения движения принимают вид:

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}^{\bullet} = \mathbf{R}(\varphi,\ \mathbf{y},\ u,\ \ldots);\ \varphi \in (0,\infty);\ \mathbf{y} \in \Re^3, \\ &\tau^{\bullet} = y_3^{-1}; \\ &\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,\ \tau(0) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$(\ldots)^{\bullet} = \frac{d(\ldots)}{d\varphi}, \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{y_3}\begin{Bmatrix} P_\nu \\ y_1 \\ P_\omega \end{Bmatrix}. \tag{12}$$

При этом правые части $\mathbf{R}(\varphi,\ \mathbf{y};\ u,\ldots)$ явным образом зависят от независимой переменной φ через 2π-периодические тригонометрические функции $\cos\varphi, \sin\varphi$, которые в соответствии с (5) будут иметь вид:

$$P_\nu = \frac{1}{D}\left(Q_\xi - EQ_\varphi \cos\varphi\right); \quad P_\omega = \frac{1}{D}\left(-EQ_\xi \cos\varphi + Q_\varphi\right), \tag{13}$$

где

$$Q_\xi = -y_2 - 2\zeta y_1 + Ey_3^2 \sin\varphi; \quad Q_\varphi = -\beta E \sin\varphi + \gamma_0(u - y_3/\omega_0) - \gamma_c; \quad D = 1 - E^2\cos^2\varphi.$$

Выбор новой независимой переменной позволяет сократить размерность задачи при вычислении периодических движений.

Устойчивость 2π-периодических движений. Пусть для некоторых начальных условий $\mathbf{y_0} = \mathbf{a}$ существует частное периодическое решение системы (11) , которое запишем в виде:

$$\boldsymbol{\psi}(\varphi;\, \mathbf{a};\, u) : \boldsymbol{\psi}(0,\, \mathbf{a},\, u) = \mathbf{a}; \quad \boldsymbol{\psi}(\varphi,\, \mathbf{a},\, u)^\bullet = \mathbf{R}(\varphi,\, \boldsymbol{\psi}(\varphi;\, \mathbf{a};\, u),\, u, \ldots); \quad \boldsymbol{\psi}(2\pi,\, \mathbf{a},\, u) = \mathbf{a}. \tag{14}$$

Устойчивость периодических движений исследуется методом Флоке – Ляпунова для уравнений в вариациях

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\psi} + \delta\mathbf{y} : \ \delta\mathbf{y}^\bullet = \mathbf{A}(\varphi,\, \psi;\, u)\delta\mathbf{y}, \ \delta\mathbf{y}(0) = \delta\mathbf{y}_0$$

$$\mathbf{A}(\varphi,\, \psi;\, u) = \frac{1}{D\psi_3}\begin{vmatrix} -2\zeta & -1 & (2E\psi_3\sin\varphi + E\dfrac{\gamma_0}{\omega_0}\cos\varphi) - \dfrac{S_\nu}{\psi_3} \\ D & 0 & -D\dfrac{\psi_1}{\psi_3} \\ 2\zeta E\cos\varphi & E\cos\varphi & (-2E^2\psi_3\cos\varphi\cdot\sin\varphi - \dfrac{\gamma_0}{\omega_0}) - \dfrac{S_\omega}{\psi_3} \end{vmatrix}$$

$$S_\nu = Q_\xi - EQ_\varphi\cos\varphi; \quad S_\omega = -EQ_\xi\cos\varphi + Q_\varphi,$$

$$Q_\xi = -\psi_2 - 2\zeta\psi_1 + E\psi_3^2\sin\varphi; \ Q_\varphi = -\beta E\sin\varphi + \gamma_0(u - \psi_3/\omega_0) - \gamma_c$$

Изложенный алгоритм был положен в основу численного расчета амплитудных и частотных зависимостей от напряжения u постоянного тока (рис. 3 и 4).

Анализ полученных результатов

На амплитудной (для платформы) кривой $A_\xi(u)$ наблюдаются несколько (при заданных параметрах и выбранного разрешения – три) резонансных состояния, соответствующих основному резонансу $\omega \approx \omega_\xi = 1$ и субгармоническим колебаниям системы с частотой $\omega \approx \omega_\xi/n$, $n = 2,3$ (ω_ξ - собственная частота платформы при невращающемся роторе). Здесь же на рис. 3,*б* представлена «традиционная» амплитудная зависимость $A_\xi(\omega_{mean})$ от усредненной за период частоты вращения ротора ω_{mean}. В данной системе резонансы типа $\omega = \omega_\xi / n$ можно трактовать как параметрические резонансы (так как в коэффициенты системы уравнений (11) независимая переменная φ входит в виде $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$). На частотной зависимости $\omega(u)$ видны гистерезисы, соответствующие скачкам угловой скорости ротора вблизи основного резонанса $\omega_\xi = 1$ и дополнительных – вблизи $\omega = 1/2$, $\omega = 1/3$.

В резонансных областях амплитудных и частотных зависимостей наблюдаются неустойчивые режимы (участки ветвей, выделенные красным цветом). Область вблизи основного резонанса амплитудной зависимости, соответствующей случаю $\zeta = 0{,}02$, в увеличенном масштабе представлена на рис. 4, где видно, что в интервале изменения напряжения, ограниченном вертикальными прямыми возникают два неустойчивых состояния. Полученный результат принципиально отличается от традиционных решений, при которых выявляется существование двух устойчивых и только одного неустойчивого режима. Это связано с тем, что в данной системе реализуется не только бифуркация типа «предельная точка», когда наибольший по модулю мультипликатор $\mu = +1$, $\left(|\mu_k| < 1,\ k = 2{,}3\right)$, но также реализуется субкритическая бифуркация Неймарка – Саккера, при которой появляются два комплексно сопряженных мультипликатора $\mu_{1,2} = \exp(\pm i\Theta)$, $\Theta \in (0, \pi)$, $(\mu_3 \in (-1, +1)$.

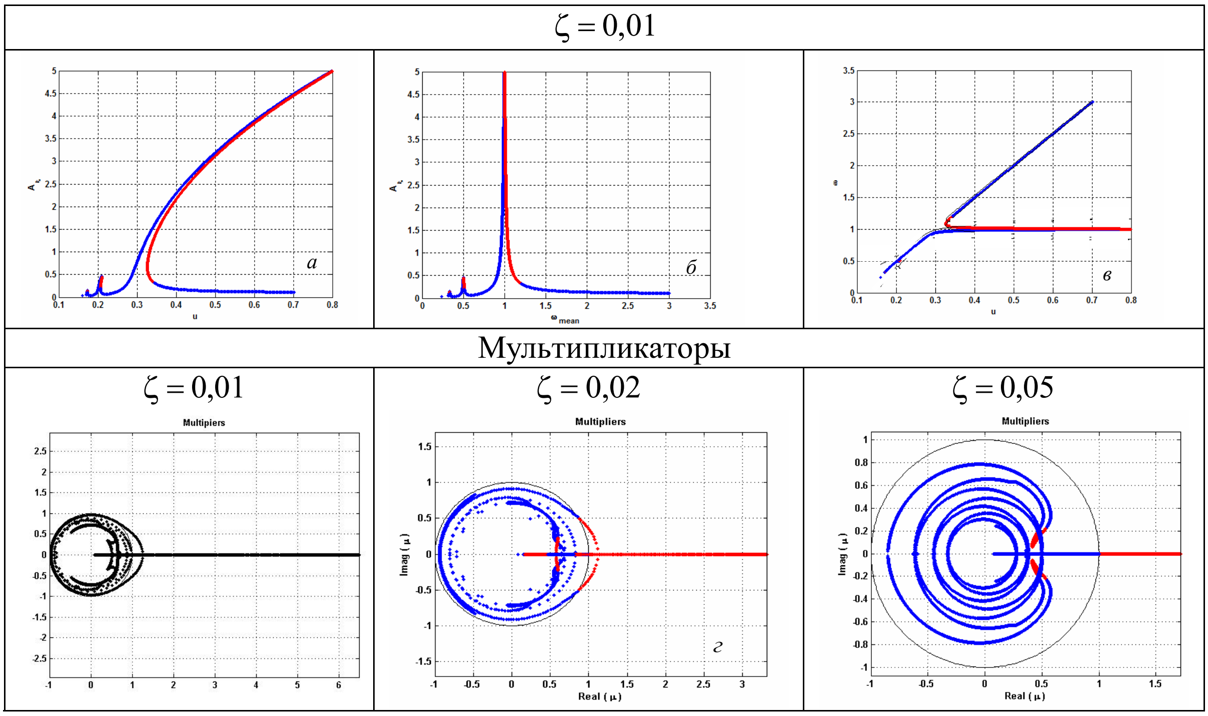

Рис. 3

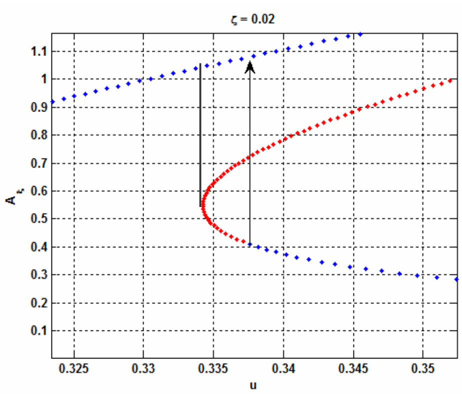

Рис. 4

Отметим, что с увеличением демпфирования область существования двух неустойчивых режимов уменьшается и существует «критическое по устойчивости» значение параметра демпфирования, при котором бифуркация Неймарка – Саккера исчезает, что соответствует слиянию двух комплексно сопряженных мультипликаторов в точке +1.

Переход мультипликаторов за единичную окружность происходит не только в точке $\mu = +1$, но и в точках $\mu = \exp(\pm i\Theta)$. В случае «большого» демпфирования $\zeta = 0{,}05$ наблюдается только один тип бифуркации $\mu = +1$.

Литература

1. Блехман И.И. Вибрационная механика. – М.: Физмалит, 1994. – 400 с.
2. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 324 с.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
4. Волкова Л.Ю., Лупехина И.В., Пановко Г.Я., Яцун С.Ф. Исследование динамики вибрационного инструмента при его взаимодействии с обрабатываемой средой. Машиностроение и инженерное образование. 2010, №4(25), с. 43-52.

5. Sommerfeld A. Zur Hydrodynamichen Theorie der Schmiermittelreibung, Zeitchrift für Mathematik und Physik, 1904, Vol. 50, pp. 97-155.
6. Seydel R. Practical Bifurcation and Stability Analysis. Springer – Verlag New York, Ink. 1994. – 407 p.

Поступила: 02.04.12.