УДК 534.1

МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ И РЕДУКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

© Людмила Яковлевна Банах

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
banl@inbox.ru

Аннотация. *Для исследования колебаний механических систем большой размерности предлагаются методы редукции расчетных моделей, основанные на исключении физических координат или подсистем. При этом применяются различные подходы декомпозиции, учитывающие слабые динамические взаимодействия между элементами системы. Вводятся критерии слабых взаимодействий. Используются методы разделения на слабосвязанные подсистемы, а также методы агрегирования (объединения) элементов с различным уровнем энергии. Редуцированные таким способом модели описываются в физических координатах и, кроме того, они сохраняют наперед заданную степень точности расчета в исследуемом диапазоне частот.*

Ключевые слова. *Энергетическое ядро системы, дискретизация модели, Метод конечных элементов, большие системы, слабые взаимодействия между подсистемами, частотная иерархии расчетных моделей.*

Реальные конструкции, включают в себя большое число различных подсистем и элементов, и их расчетные модели обычно содержат сотни и тысячи параметров. Основная проблема-это редукция модели и выявление небольшого числа переменных, определяющих динамику системы (ее энергетическое «ядро»). При построении динамической модели обычно используется дискретизация исходной системы (в том числе (МКЭ) и представление ее как системы с сосредоточенными параметрами. Уравнение в виде блочной матрицы отражает структуру системы

$$\mathbf{D} = \mathbf{K} - \lambda\mathbf{M} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M}]_{11} & [\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M}]_{12} & \cdots & [\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M}]_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M}]_{N1} & [\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M}]_{N2} & \cdots & [\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M}]_{NN} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{K}_{ii}$, $\mathbf{M}_{ii}$ - матрицы жесткости и инерции i -й парциальной подсистемы, $\mathbf{K}_{ij}$, $\mathbf{M}_{ij}$ – матрицы связи между подсистемами i и j. Демпфирование можно учесть, полагая **K** комплексной матрицей. Парциальной подсистемой называется подсистема i, которая получена при жестком закреплении всех остальных подсистем

При исследовании больших систем естественны подходы декомпозиции. Но произвольная декомпозиция математической модели малоэффективна, необходимы подходы, учитывающие влияние динамических взаимодействий. Основная закономерность при колебаниях больших систем – это возникновение слабых взаимодействий между подсистемами. В механических системах слабые взаимодействия возникают, например, при большом разбросе упругих и/или инерционных параметров, при наличии малой асимметрии, при разбросе собственных частот.

Определение. Подсистемы i и j слабо-связаны, если их формы колебаний можно представить в виде

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} \\ \varepsilon\mathbf{h}_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon\mathbf{h}_{21} \\ \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{h}_i$ – матрица- столбец собственных векторов для 1 и 2 парциальных подсистем. Это означает, что отношение компонент собственного вектора, относящихся к другой подсистеме, очень мало и равно ε<<1.

1. Коэффициенты слабых взаимодействий между подсистемами:

Коэффициенты слабых связей и связанности, введенные в [2] для двухмассовых систем, нуждаются в обобщении на случай –n-мерных систем. Были найдены следующие обобщенные коэффициенты, характеризующие взаимодействие подсистем и /или элементов [1]:

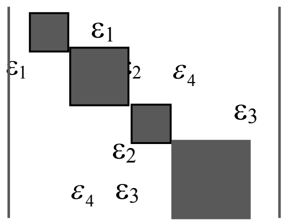
-энергетические коэффициенты, α_{ij}^{pr} определяют отношение работы, произведенной силами связей между подсистемами к энергии, накопленной в парциальных подсистемах

$$\alpha_{pr}^{ij} = \frac{\left(\mathbf{h}_i^p\right)^{tr}\left(\mathbf{K}_{ij} - \lambda \mathbf{M}_{ij}\right)\mathbf{h}_j^r}{\left(\lambda_i^p \lambda_j^r\right)^{1/2}}, \quad p = 1 \cdots n_i,\ r = 1 \cdots n_j$$

-спектральные коэффициенты, s_{ij}^{pr} зависящие от расстройки частот в подсистемах

$$s_{pr}^{ij} = \frac{\alpha_{pr}^{ij}}{1 - \lambda_i^p / \lambda_j^r}$$

Для слабосвязанных подсистем эти коэффициенты малы; $\alpha_{ij}^{pr} < \varepsilon$, $s_{ij}^{pr} < \varepsilon$. Матрица **D** может быть выражена в виде, содержащем внедиагональные ε -блоки.

D* =


В зависимости от расположения слабых взаимодействий (ε -блоков) (табл.1), следует применять различные способы декомпозиции

Табл.1

Виды слабых взаимодействий	$\left[\boldsymbol{\alpha}_{ij}\right] < \varepsilon \quad \left[\mathbf{s}_{ij}\right] \neq \varepsilon$	$\left[\boldsymbol{\alpha}_{ij}\right] < \varepsilon, \left[\mathbf{s}_{ij}\right] < \varepsilon$	$\left[\boldsymbol{\alpha}_{ij}\right] \cong 1, \left[\mathbf{s}_{ij}\right] < \varepsilon$
Структура динамической матрицы	$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \varepsilon\mathbf{D}_{12} \\ \varepsilon\mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \varepsilon\mathbf{D}_{12} \\ \varepsilon\mathbf{D}_{21} & \varepsilon^2\mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{K}_{11} - \lambda\varepsilon\mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}$
Способ декомпозиции	Разделение на независимые подсистемы $\mathbf{D}_{11}$ and $\mathbf{D}_{22}$	Исключение подсистем, описываемых матрицей $\mathbf{D}_{22}$	Агрегирование элементов
Условия возникновения	Разброс упругих параметров, малая асимметрия	Большой диапазон собственных частот.	Большой разброс парциальных частот

Коэффициенты слабых взаимодействий совпадают со следующими критериями:

1. Условиями плохой обусловленности матрицы при вынужденных колебаниях
2. Условиями плохой обусловленности для собственных векторов
3. Критериями чувствительности форм колебаний *i*-й подсистемы при вариации параметров j-й подсистемы;
4. Критериями эквивалентности различных математических моделей системы между собой, которые можно представить как

$$\|\alpha_{ij}\|_1 - \|\alpha_{ij}\|_2 \leq \varepsilon, \qquad \|s_{ij}\|_1 - \|s_{ij}\|_2 \leq \varepsilon.$$

Этот критерий очень важен, так как выбор расчетной модели – неоднозначен.

2. Декомпозиция с помощью разделения на независимые подструктуры.

Колебания в слабосвязанных подсистемах происходят практически независимо[1]:

- собственные частоты связанной системы близки с точностью до ε к собственным частотам несвязанных парциальных подсистем;
- формы собственных колебаний меняются мало при отсутствии близких частот в подсистемах. Но формы, соответствующие близким частотам, резко меняются, что означает обмен энергией при резонансных режимах.

Динамические взаимодействия в системе газотурбинного двигателя (ГТД) [3]. Двигатель имеет три подсистемы (Рис.1): ротор низкого давления (РНД)(1), ротор высокого давления (РВД)(2), и корпус (К)

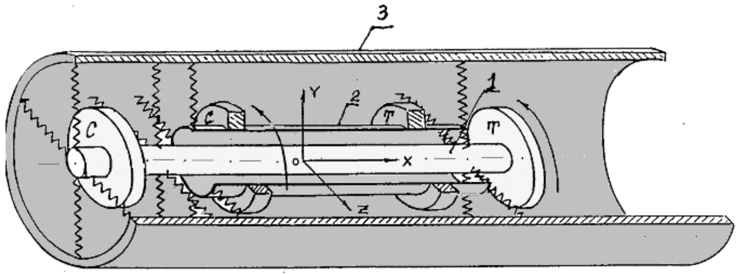


Рис.1–конечно-элементная модель ГТД и его основные подсистемы

Между корпусом двигателя и роторами имеется слабое динамическое взаимодействие в низкочастотной области. Собственные частоты несвязанных парциальных подсистем (РВД, РНД, К) и собственные частоты для связанной системы ГТД близки (табл.2).

Табл.2. Собственные частоты парциальных подсистем ГТД и связанной системы.

РНД	27,	66	134,9	221,1	954		
РВД	142	241	339,5	1251			
корпус	132	217	2189				
Связанная система.	27	53	65,13	72,45	137	157	238

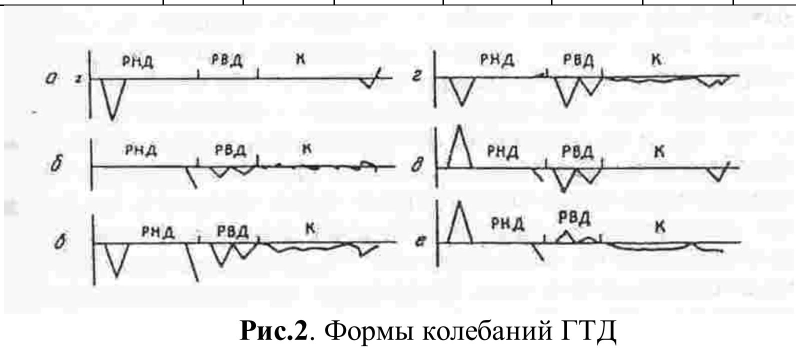


Рис.2. Формы колебаний ГТД

Слабые взаимодействия в конструкции играют двоякую роль. С одной стороны повышается виброизоляция подсистем, что препятствует передаче вибрации, а также определяется местоположение дефекта. Но с другой стороны, усложняется мониторинг дефектов из-за слабой передачи сигнала внутри системы.

3. Декомпозиция с помощью объединения элементов (агрегирование).

Агрегирование состоит в объединении низкочастотных парциальных элементов (или подсистем) с высокочастотными таким способом, чтобы собственные частоты и формы колебаний в интересующем нас частотном диапазоне определялись с наперед заданной степенью точности ε. Число степеней свободы математической модели уменьшается, и остаются лишь элементы, определяющие ее энергию [1,4].

Условие исключения s-го инерционного элемента $v_5 = m_s \Big/ \sum k_{is} >> \omega_{\max}$

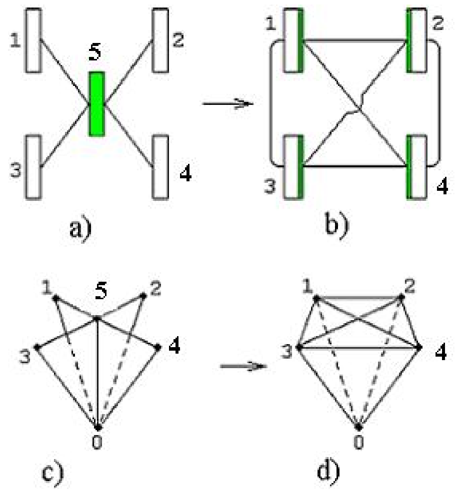


Рис. 3. Редукция 5-массовой разветвленной системы и соответствующее преобразование графов «звезды в треугольник» а-исходная 5- массовая разветвленная система, b 4 –массовая система после исключения 5-й массы,с- граф исходной 5-массовой системы (5-лучевая звезда O-1-2-3-4-5), d- граф редуцированной 4-х массовой системы.

На рис. 4 представлен процесс агрегирования расчетной модели привода станка путем поэтапного исключения высокочастотных элементов привода. Число степеней свободы было уменьшено от 21 до 6 и одновременно выявлены элементы, концентрирующие энергию колебаний. Точность вычисления собственных частот 6-массовой модели - 4 %.

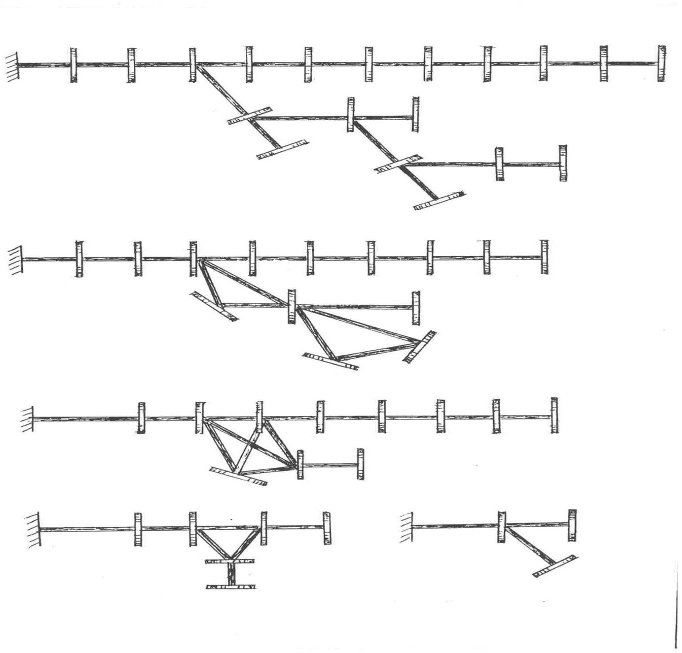


Рис. 4. Процесс агрегирования расчетной модели привода станка

3. Построение частотной иерархии расчетных моделей жидкостного ракетного двигателя [5].

Жидкостной ракетный двигатель (ЖРД) можно представить в виде совокупности подсистем, соединенных как упругими связями (трубопроводы, и т.п.), так и демпферными элементами (Рис.5). Были построены модели 4 уровня частотной иерархии: 1)твердотельная модель- низкочастотная (рис.5,а) колебания основных агрегатов (камеры сгорания, ТНА, газогенератор - среднечастотный диапазон, 3) колебания совокупностей нескольких подсистем двигателя, а также отдельных узлов и агрегатов - среднечастотный и высокочастотный диапазон(рис.5,б), 4)колебания отдельных узлов с возможностью учета их дефектов- высокочастотный диапазон (рис.5,в). Так, для определения нагрузок при наземной транспортировке достаточна модель первого частотного уровня.

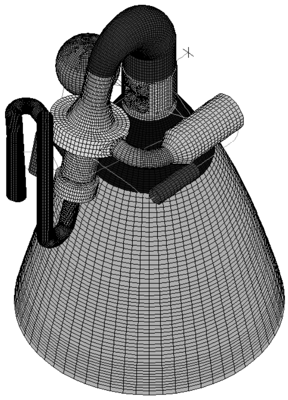
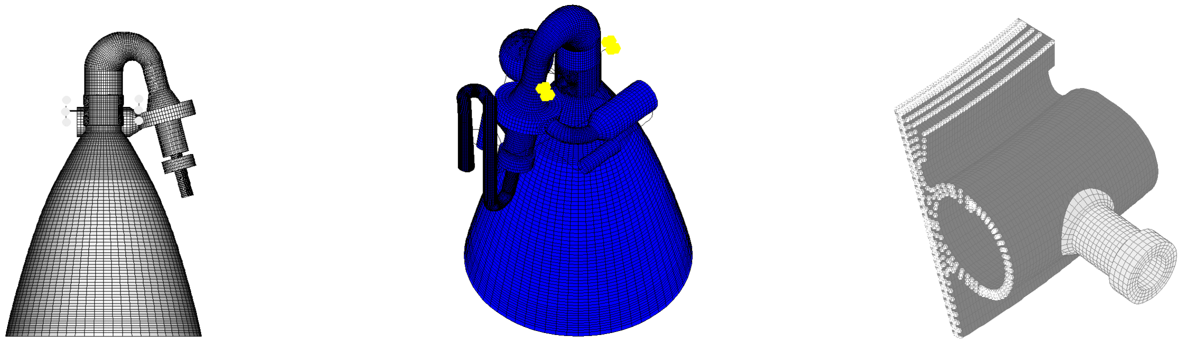


Рис. 5. МКЭ- модель ЖРД



а)	б)	в)
1-й уровень иерархии (твердотельная) (3-110 Гц) (маятник)	2-3-й уровень иерархии совместные колебания двигателя (110-270 Гц)	4-й уровень иерархии независимые колебания агрегатов (выше 300 Гц)

Рис.5, а-в. Частотная иерархия моделей ЖРД

Литература

1. Банах Л.Я. Методы декомпозиции при колебаниях многомерных систем. ДАН, 1994, т.337, №3, Техническая физика. С.189-193.
2. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний.М.:Наука,1964,438 с.
3. Ахметханов Р. С., Банах Л. Я.. Анализ вибрационных взаимодействий в роторных системах газотурбинного двигателя// Проблемы машиностроения и надежности машин,1996, № 4, С 29-33

4.Ривин Е.И. Динамика привода станков. М.: Машиностроение, 1969
5. Банах Л.Я., Жеребчиков С.Н., Рудис М.А. Разработка математической модели и анализ собственных колебаний жидкостного ракетного двигателя с учетом упругости составляющих подсистем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004. № 6. С.3-8.
6.Новожилов И.В. Фракционный анализ, Изд.МГУ,1995, 224 с.

Поступила: 24.04.12.