

УДК 534.1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ В АУКСЕТИЧНОМ СТЕРЖНЕ

© Владимир Иванович Ерофеев, Владимир Владимирович Кажаяев,
Надежда Петровна Семерикова

Нижегородский филиал Института машиноведения РАН, Нижний Новгород, Россия
erf04@sinn.ru

Аннотация. В линейной и нелинейной постановках рассмотрена задача о распространении продольных волн в стержне, материал которого обладает отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетичный стержень). Показано, что отрицательный коэффициент Пуассона приводит к качественно иному (аномальному) дисперсионному поведению линейных волн. Учет геометрической и физической упругих нелинейностей, в свою очередь, приводит к возможности формирования в стержне стационарных волн деформации существенно несинусоидального профиля – солитонов и их периодических аналогов.

Ключевые слова: отрицательный коэффициент Пуассона; стержень; волна; дисперсия; нелинейность.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большой интерес проявляется к материалам, обладающим нестандартными реакциями на разного рода деформации. К примеру, существуют материалы, которые при растяжении в длину будут увеличиваться в поперечных размерах. За такими материалами в иностранной литературе закрепился термин Auxetic. Аномальное поведение связано с измененной внутренней структурой материала, что приводит к появлению таких свойств, как анизотропия, отсутствие центральной симметрии, появление вращательных степеней свободы и т.д. [1].

Особенность таких материалов заключается в том, что их поведение при деформации не согласуется с общепринятыми стандартами. С точки зрения теории упругости изменение поперечных размеров тела (ширины) к изменению его продольных размеров (длины) при одноосном растяжении характеризуется коэффициентом Пуассона. В классической теории упругости коэффициент Пуассона принимает значения из интервала $0 \leq \nu \leq 0,5$, при этом большинство материалов имеют коэффициент Пуассона $0 \leq \nu \leq 0,3$. Однако для новых материалов, демонстрирующих «ненормальное» поведение, коэффициент Пуассона принимает отрицательные значения и может в два раза превосходить принятые положительные значения по модулю.

Отрицательный коэффициент Пуассона встречается в основном в специально синтезируемых искусственных материалах, разрабатываемых специально для получения необычных свойств и характеристик. К их числу относятся полимеры, полиэтилен, керамика, композиционные материалы, слоистые структуры.

Целью данной работы является исследование распространения продольных волн в стержне из материала с отрицательным коэффициентом Пуассона.

2. ЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА

Наряду с инженерными (классическими) моделями в динамике стержней существуют так называемые, уточненные или неклассические модели [2, 3]. Эти модели учитывают дополнительные факторы, влияющие на динамический процесс, или свободны от некоторых гипотез, принятых в инженерных теориях и ограничивающих область их применимости.

Классическую теорию Бернулли, принятую при описании продольных колебаний стержня, обобщает модель Бишопа, учитывающая дополнительно кинетическую энергию поперечных движений частиц стержня и потенциальную энергию сдвиговых деформаций:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho v^2 I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + v^2 \mu I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (1)$$

где $u(x,t)$ – продольное перемещение, ρ - плотность, F - площадь поперечного сечения, I_0 - полярный момент инерции, E - модуль Юнга, μ - модуль сдвига, ν - коэффициент Пуассона.

Продольные волны, описываемые уравнением (1), обладают дисперсией, при этом частота ω и волновое число k гармонической волны $u = u_0 \exp(i(\omega t - kx))$ связаны соотношением:

$$\omega = k \sqrt{\frac{c_0^2 + c_\tau^2 \nu^2 R^2 k^2}{1 + \nu^2 R^2 k^2}} \quad (2)$$

R - полярный радиус инерции.

График зависимости (2) определяет дисперсионную кривую на плоскости (ω, k) . Эта кривая при малых волновых числах k имеет асимптоту $\omega = c_0 k = \sqrt{\frac{E}{\rho}} k$, а при больших -

асимптотически приближается к прямой $\omega = c_\tau k = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} k$. Таким образом, при малых частотах

волны в стержне модели Бишопа распространяются со скоростями, близкими к стержневой скорости c_0 , а при больших частотах их скорости близки к скорости сдвиговых волн в бесконечной среде c_τ . Отношение этих скоростей может быть выражено через коэффициент Пуассона следующим образом:

$$\frac{c_0}{c_\tau} = \sqrt{\frac{E}{\mu}} = \sqrt{\frac{2\mu(1+\nu)}{\mu}} = \sqrt{2(1+\nu)} \quad (3)$$

Для обычных материалов при положительных значениях коэффициента Пуассона скорость продольной волны в стержне c_0 больше скорости сдвиговых волн c_τ . В этом случае дисперсия продольных волн является нормальной, т.е. значение фазовой скорости волны превосходит значение ее групповой скорости

$$V_\phi > V_{gp}, \quad (4)$$

где $V_\phi = \frac{\omega}{k}$, $V_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$ вычисляются с помощью соотношения (2).

Качественный вид дисперсионной кривой (2) приведен на рис.1.

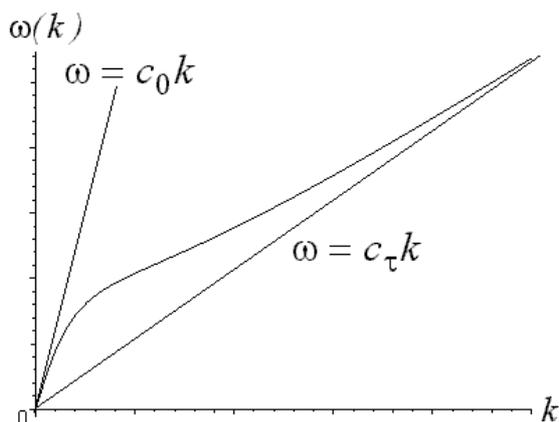


Рис. 1

Заметим, что различие между скоростями c_0 и c_τ уменьшается по мере того, как коэффициент Пуассона становится отрицательным. Еще при $-0,5 < \nu < 0$ дисперсия продольных волн остается нормальной, хотя изменение скорости с ростом частоты становится менее заметным. При $\nu = -0,5$ продольные волны в стержне не обладают дисперсией, а при $-1 < \nu < -0,5$ дисперсия становится аномальной, т.е.

$$V_\phi < V_{gp} \quad (5)$$

В последнем случае скорость сдвиговых волн в бесконечной среде c_τ превосходит стержневую скорость c_0 . Вид дисперсионной кривой приведен на рис.2.

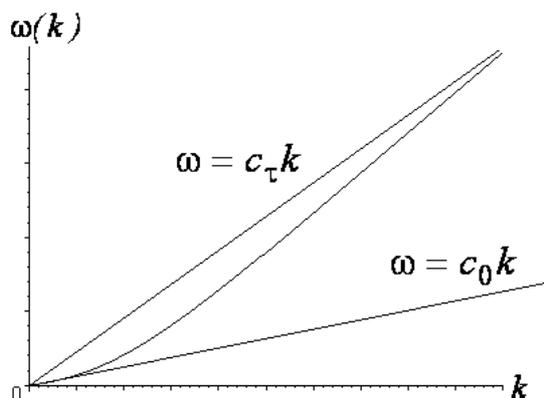


Рис. 2

Таким образом, в стержнях из материалов Auxetic отрицательный коэффициент Пуассона приводит к качественно иному (аномальному) дисперсионному поведению линейных волн.

3. НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ

Учтем в стержне геометрическую и физическую нелинейности. Уравнение нелинейных продольных волн имеет вид [3]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left(1 + \frac{6\alpha}{E} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu^2 R^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) = 0 \quad (6)$$

Здесь R - полярный радиус инерции, а коэффициент α , определяющий вклад геометрической и физической нелинейностей, равен $\alpha = \frac{E}{2} + \frac{\nu_1}{6}(1 - 6\nu) + \nu_2(1 - 2\nu) + \frac{4}{3}\nu_3$, где $\nu_{1,2,3}$ - константы упругости третьего порядка.

Введем в уравнении (6) безразмерные переменные $t' = \frac{c_0 t}{R}$, $x' = \frac{x}{R}$, $u' = \frac{\alpha u}{R}$ и в дальнейшем штрихи над безразмерными переменными опустим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(1 + \beta \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (7)$$

Безразмерный параметр β определяет стержень с «жестким» ($\beta = 1$) или «мягким» ($\beta = -1$) характером нелинейности. Для материалов с положительным коэффициентом Пуассона справедливо утверждение, что для металлических стержней или стержней, изготовленных из сплавов, нелинейность является «мягкой», а для композитных стержней возможен «жесткий» тип нелинейности.

Какие-либо закономерности, аналогичные этим, для материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона пока не установлены. В дальнейшем рассмотрим оба характера нелинейного поведения.

Безразмерный параметр c , входящий в уравнение (7), равен отношению скоростей $c = \frac{c_\tau}{c_0}$ и, как следует из выражения (3), при положительных значениях коэффициента Пуассона всегда $c < 1$. При отрицательном коэффициенте Пуассона возможны различные случаи, когда стержневая скорость c_0 превосходит скорость сдвиговых волн c_τ ($c < 1$ при $-0,5 < \nu < 0$) или наоборот, c_τ превосходит c_0 ($c > 1$ при $-1 < \nu < -0,5$). Вырожденный случай, когда обе скорости совпадают, дает $c = 1$ при $\nu = -0,5$.

На распространение продольных волн, описываемых уравнением (7), будут влиять два фактора: дисперсия и нелинейность. Нелинейность приводит к зарождению в волне новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия же, наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волны. Совместное действие этих факторов может привести к формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы [4].

Решения уравнения (7) ищем в классе стационарных волн деформации $U(\xi) = \frac{\partial u}{\partial \xi}$, где $\xi = x - Vt$ - «бегущая» координата, $V = const$ - скорость стационарной волны. Уравнение (7) сведется к дифференциальному уравнению в обыкновенных производных:

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + m_1 U + m_2 U^2 = 0, \quad (8)$$

$$\text{где } m_1 = \frac{V^2 - 1}{c^2 - V^2}, \quad m_2 = \frac{\beta}{2(V^2 - c^2)}.$$

В зависимости от соотношения скорости нелинейной волны V , единицы и параметра c (что в размерных переменных соответствует скоростям c_0 и c_τ) поведение решений этого уравнения будет качественно различным.

При этом физически реализуемыми являются лишь те случаи, когда в волне деформации отсутствует постоянная составляющая. Будем рассматривать только эти случаи.

3.1. «Мягкая» нелинейность

Рассмотрим стержень с «мягкой» нелинейностью, характерной для металлов и сплавов. Если коэффициент Пуассона материала стержня положительный или отрицательный из диапазона значений $\nu \in (-0,5; 0)$ (т.е. $c < 1$), то в стержне распространяется периодическая волна со скоростями $c < V < 1$. (В размерных переменных скорости нелинейных волн $c_r < V < c_0$.)

Аналитически такая волна описывается решением уравнения (8):

$$U(\xi) = \frac{A}{3s^2} \left(1 + s^2 - \sqrt{1 - s^2 + s^4} \right) - A \operatorname{sn}^2(k\xi, s), \quad (9)$$

где A – амплитуда волны, k – волновое число, sn – эллиптический синус (эллиптическая функция Якоби), s – модуль эллиптической функции, определяющий степень искажения формы волны $U(\xi)$ по сравнению с синусоидальной.

Качественный вид периодической волны (9) при разных значениях s представлен на рис.3.

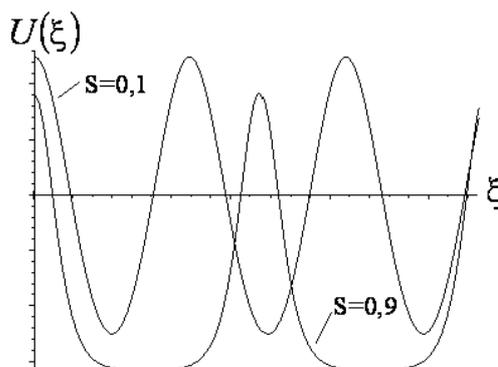


Рис. 3

Амплитуда волны (A) связана с ее скоростью (V) и модулем s соотношением

$$A = 3(V^2 - 1) \frac{s^2}{\sqrt{1 - s^2 + s^4}}. \quad (10)$$

Эти зависимости приведены на рис.4.

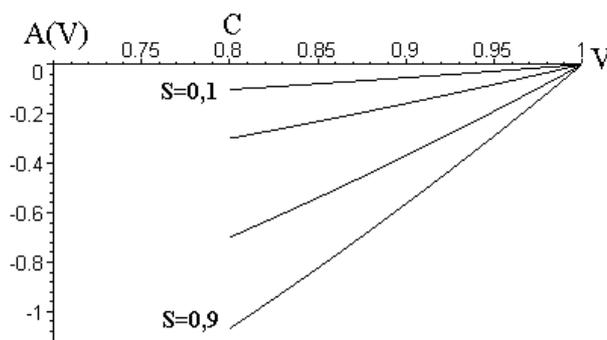


Рис. 4

В свою очередь скорость волны (V) с волновым числом (k) и модулем s связана соотношением:

$$V = \sqrt{\frac{1 + 4c^2 \sqrt{1 - s^2 + s^4} k^2}{1 + 4\sqrt{1 - s^2 + s^4} k^2}}, \quad (11)$$

которое можно назвать нелинейным законом дисперсии [5,6]. Эти зависимости приведены на рис.5. Очевидно, что при $s \rightarrow 0$ получаем дисперсионную кривую для линейных волн.

В диапазоне скоростей $V < c$ и $V > 1$, где нет линейных волн, в нелинейном случае существуют уединенные солитоноподобные волны.

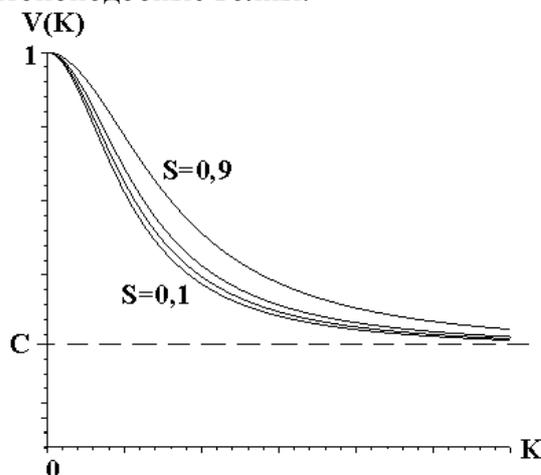


Рис. 5

Волна, распространяющаяся со скоростью $V < c$, описывается следующим решением уравнения (8):

$$U(\xi) = \frac{A^*}{ch^2\left(\frac{x-Vt}{\Delta}\right)}, \quad (12)$$

где A^* - амплитуда; Δ - ширина солитона, ch - гиперболический косинус. Волна (12) имеет колоколообразную форму (рис.6).

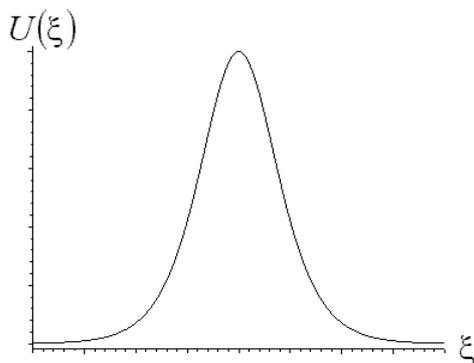


Рис. 6

Амплитуда (A^*), ширина волны (Δ) связаны с ее скоростью V соотношениями:

$$A^* = 3(1-V^2), \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{c^2 - V^2}{1-V^2}}, \quad (13)$$

приведенными на рис.7 и рис.8. На этих рисунках им соответствует область $V < c$. Из рисунков видно, что поведение «дозвуковой» уединенной волны не является классическим для солитонов: волна большей амплитуды имеет большую ширину и распространяется с меньшей скоростью. Из-за ограниченности скорости волн из данной области амплитуда и ширина солитона численно также ограничены: $A \in (3(1-c^2), 3)$, $\Delta \in (0, 2c)$.

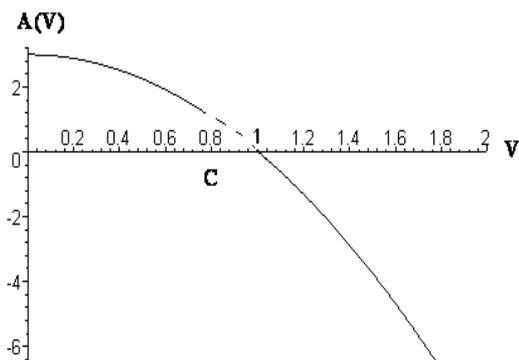


Рис. 7

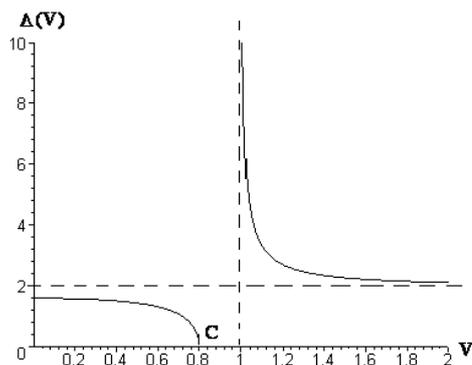


Рис. 8

Волна, распространяющаяся со скоростью $V > 1$, также описывается формулой (12), но ее параметры связаны между собой иными соотношениями, а именно:

$$A^* = 3(1 - V^2), \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{V^2 - c^2}{V^2 - 1}} \quad (14)$$

Зависимости (14) приведены на рис.7 и рис.8 при $V > 1$. В отличие от «дозвуковой» ($V < c$) уединенной волны, «сверхзвуковые» ($V > 1$) солитоны имеют отрицательную полярность и их амплитуда может неограниченно возрастать. Волны большей амплитуды распространяются с большей скоростью, а ширина их с ростом скорости убывает, асимптотически приближаясь к числу 2 ($\Delta \in (2, \infty)$).

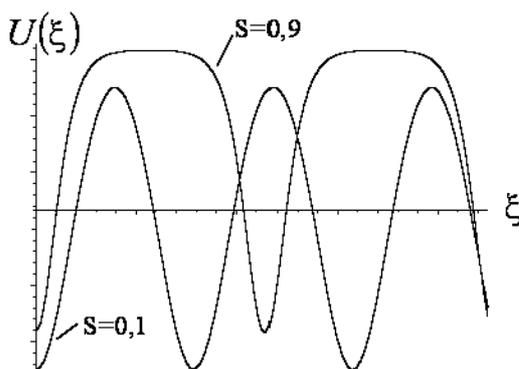


Рис. 9

Как уже отмечалось выше, если коэффициент Пуассона изменяется в пределах $\nu \in (-1; -0,5)$, то это приводит к тому, что стержневая скорость c_0 становится меньше скорости волн сдвига c_r и безразмерный параметр c будет больше единицы. В этом случае нелинейная периодическая волна распространяется со скоростями $1 < V < c$ и описывается выражением:

$$U(\xi) = \frac{A}{3s^2} \left(\sqrt{1 - s^2 + s^4} - 1 - s^2 \right) + A s n^2(k\xi, s), \quad (15)$$

где

$$A = 3(1 - V^2) \frac{s^2}{\sqrt{1 - s^2 + s^4}}. \quad (16)$$

Форма периодической волны при различных значениях s приведена на рис.9, зависимость (16) – на рис.10, от масштабированная на $3(1 - V^2)$.

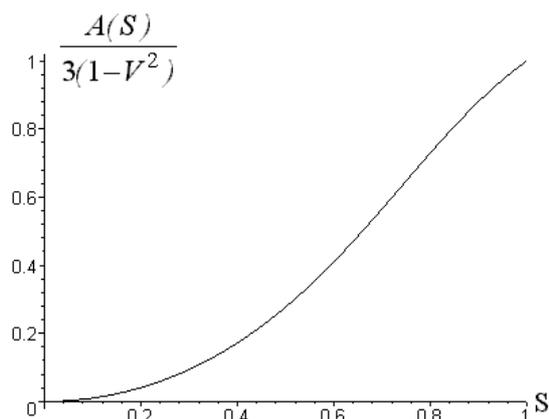


Рис. 10

Волна (15) удовлетворяет нелинейному закону дисперсии (11). Вид дисперсионных соотношений для этой волны показан на рис.11. Очевидно, что при малых значениях коэффициента нелинейных искажений ($s \rightarrow 0$) существует линейное вырождение, соответствующее случаю, когда дисперсия линейных волн является аномальной.

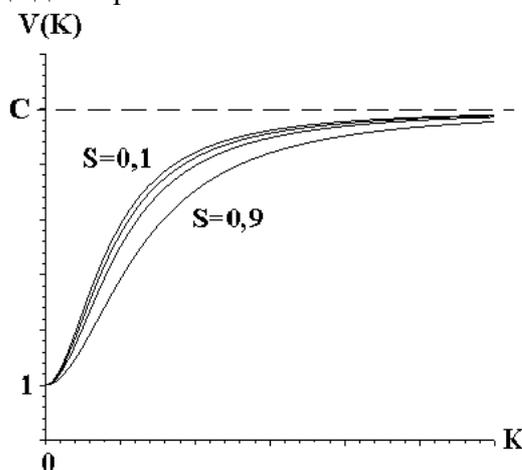


Рис. 11

При $v \in (-1; -0,5)$ в стержне возможно существование «дозвуковых» ($V < 1$) и «сверхзвуковых» ($V > c$) уединенных волн. При этом «дозвуковые» солитоны описываются выражениями (12),(13), что и в «дозвуковом» случае при $v \in (-0,5; 0)$, однако свойства их отличаются. Так, амплитуда данных волн уменьшается с ростом скорости и может быть сколь угодно малой при $V \rightarrow 1$. Ширина солитона, наоборот, с уменьшением амплитуда неограниченно возрастает. Зависимости амплитуды и ширины от скорости волны приведены на рис. 12 и рис.13 соответственно.

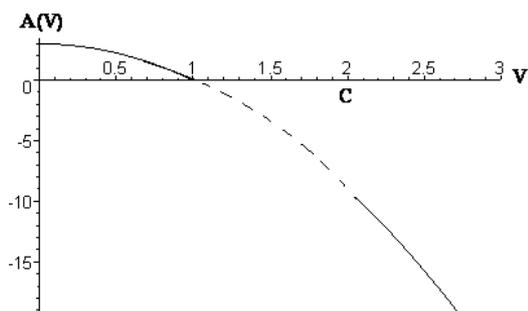


Рис. 12

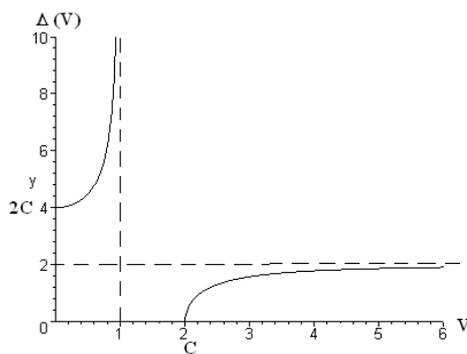


Рис. 13

«Сверхзвуковые» уединенные волны, как и в случае $v \in (-0,5; 0)$, описываются выражениями (12),(14). Они имеют отрицательную полярность, их амплитуда начинается со значения $3(1-c^2)$ и неограниченно возрастает с ростом скорости. Ширина такой волны растет с ростом амплитуды, причем численно не превышает 2, асимптотически приближаясь к этому значению. Зависимости амплитуды и ширины от скорости волны приведены также на рис. 12 и рис.13 соответственно.

Когда коэффициент Пуассона материала $\nu = -0,5$, скорости стержневая c_0 и сдвиговая c_s совпадают, при этом область существования линейных, а следовательно, и нелинейных периодических волн исчезает. В этом случае остаются только уединенные волны, причем в «дозвуковой» области при $V < 1$ они описываются выражениями (12),(13), а в «сверхзвуковой» области при $V > 1$ – выражениями (12),(14). Ширина солитона не меняется при изменении амплитуды или скорости и равна 2. Амплитуда «дозвуковых» солитонов уменьшается с ростом скорости до нуля, а у «сверхзвуковых» солитонов амплитуда неограниченно возрастает от нуля при увеличении скорости. Зависимость амплитуды от скорости приведены на рис.14.

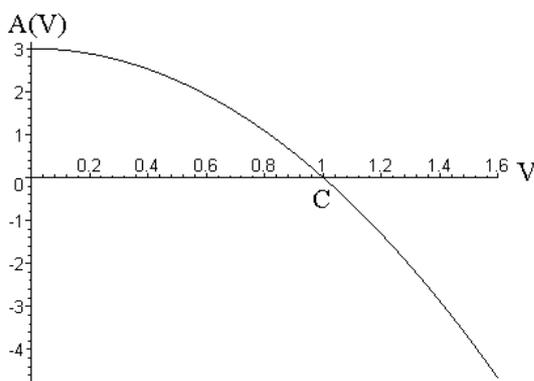


Рис. 14

3.2. «Жесткая» нелинейность

Рассмотрим стержень с «жесткой» нелинейностью. Формально это приведет к изменению знака перед нелинейным слагаемым в уравнении (8), что в свою очередь, приведет к изменению характера распространяющихся волн. Области существования периодических и уединенных волн сохраняются такими же, что и в стержне с «мягкой» нелинейностью, но изменяется полярность этих волн.

Если коэффициент Пуассона положительный или отрицательный из диапазона значений $\nu \in (-0,5; 0)$ (т.е. $c < 1$), то в стержне с «жесткой» нелинейностью распространяются периодические волны со скоростями $c < V < 1$. Они описываются выражениями (15), а их параметры – скорость, амплитуда и коэффициент нелинейных искажений связаны соотношением (10). В «дозвуковом» диапазоне ($0 < V < c$) уединенные волны описываются выражением (12), а их параметры – соотношениями (14). «Сверхзвуковые» ($V > 1$) уединенные волны описываются выражениями (12),(13). Как говорилось выше, волны в стержне с «жесткой» нелинейностью отличаются полярностью, поэтому графики зависимости амплитуды от скорости противоположны представленным на рис. 7. Они приведены на рис.15. Зависимость ширины от скорости солитона приведена на рис.8.

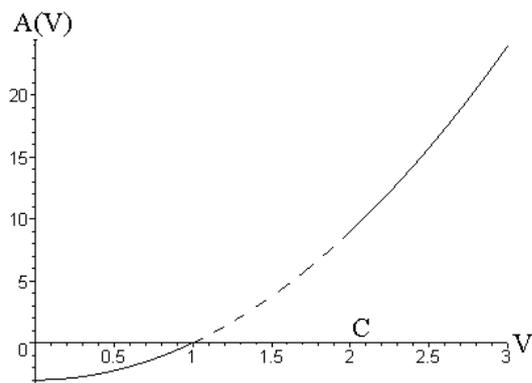


Рис. 15

При $v \in (-1; -0,5)$ периодические волны распространяются со скоростями $1 < V < c$ и описываются выражениями (15), а их параметры связаны соотношением (10). Как и в предыдущем случае, «дозвуковые» солитоны при $0 < V < 1$ имеют вид (12), а их параметры связаны соотношениями (14). «Сверхзвуковые» волны при $V > c$ определяются выражениями (12), (13). Графики зависимости амплитуды солитона от скорости представлены на рис.16

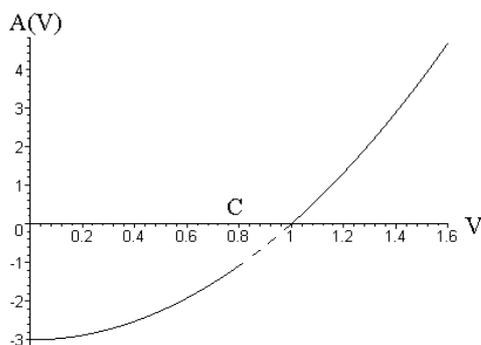


Рис. 16

При $v = -0,5$ область существования периодических волн исчезает, а уединенные волны «дозвуковые» и «сверхзвуковые» сохраняются и имеют такие же связи между параметрами.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант № 09-08-00827).

ЛИТЕРАТУРА

1. Конек Д.А., Войцеховски К.В., Плескачевский Ю.М., Шилько С.В. Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (обзор) // Механика композиционных материалов и конструкций. 2004. Т.10, № 1. С.35-69.
2. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ. 1973. 272 с.
3. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит. 2002. 208 с.
4. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. 2002. Т.48, № 6. С.725-740.

5. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Нелинейные изгибные стационарные волны в балке Тимошенко // Нелинейный мир. 2008. Т.6, № 5-6. С.348-358.
6. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейноупругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008, № 3. С.30-36.

Поступила: 02.08.11.