

Гейзер как автоколебательная система

Ланда П.С., Власов Д.А.

Гейзером называют источник, выбрасывающий горячую воду и пар на поверхность Земли через определенные (в общем случае, неодинаковые) промежутки времени [1]. Эти выбросы называют извержениями. Очевидно, что с точки зрения теории колебаний гейзер представляет собой автоколебательную систему, работающую в релаксационном режиме и генерирующую последовательность коротких импульсов (извержений воды и пара). Однако какие-либо работы, где бы гейзер рассматривался как автоколебательная система, нам не известны. Схематическое изображение гейзера, незначительно отличающееся от приведенного в работе [2], представлено на рис. 1. Холодная вода из водоносного слоя 1 поступает в резервуар 2, нижняя часть которого соприкасается с магмой 3 и поэтому является горячей, представляя собой источник нагрева воды в резервуаре. Резервуар связан с поверхностью Земли каналом (трубкой) 4, объем которого обычно много меньше, чем объем резервуара.

Как следует из приведенных ниже результатов, набор энергии в данной системе после извержения происходит за счет медленного нагревания воды в резервуаре до температуры, несколько большей температуры кипения на данной глубине. При этом вода в резервуаре оказывается перегретой, вследствие чего начинается бурное кипение, напоминающее взрыв. За счет интенсивного

парообразования часть воды быстро выталкивается из трубки и резервуара (извержение), понижая давление в резервуаре и охлаждая имеющуюся там воду до температуры кипения при атмосферном давлении. Таким образом, потеря накопленной энергии происходит быстро (за короткое время извержения). Как следует из энергетического критерия хаотизации колебаний в динамических системах [3, 4], такой характер набора и потери энергии может вызывать хаотизацию возникающих автоколебаний. Однако, как показывают проведенные нами расчеты, в рассматриваемой модели этого не происходит. Однако при учете случайности процесса кипения, что всегда имеет место, извержение гейзера становится непериодическим. Это, как и в реальных гейзерах, проявляется в случайности интервалов между последовательными извержениями (см. рис. 2, взятый из [5]), в случайной длительности самого извержения и в случайной высоте подъема воды при извержении.

Весь процесс работы гейзера можно разбить на несколько стадий:

1 Наполнение резервуара после извержения и изменение температуры в нем

Принимая во внимание, что приток холодной воды в резервуар в единицу времени G_c пропорционален разности давлений в водоносном слое (P) и в резервуаре ($p_a + \rho gh$), где p_a — атмосферное давление, ρgh — избыточное давление в резервуаре при наличии водяного столба в трубке высоты h (мы будем рассматривать такие гейзеры, в которых высота трубки не настолько велика, чтобы изменение температуры воды при наполнении трубки было

значительным и оказывало заметное влияние на ее плотность), имеем

$$G_c = a(P - p_a - \rho gh), \quad (1)$$

где a — гидравлическая проницаемость водоносного слоя, ρ — плотность воды. Выражение (1) можно преобразовать к виду

$$G_c = G_{c0} \left(1 - \frac{h}{h_0}\right), \quad (2)$$

где $G_{c0} = a(P - p_a)$, $h_0 = (P - p_a)/(\rho g)$. Ниже будем полагать, что h_0 меньше высоты трубки H .

С учетом (1) уравнение для объема воды в резервуаре при пустой трубке принимает вид

$$\rho \frac{dV}{dt} = G_{c0}, \quad (V \leq V_r), \quad (3)$$

где V — объем воды в резервуаре, V_r — объем резервуара.

Предполагая, что вода в резервуаре быстро перемешивается и имеет одинаковую температуру, получаем уравнение для температуры воды в резервуаре при $V \leq V_r$:

$$\rho V \frac{dT_r}{dt} = G_h(T_h - T_r(t)) + G_{c0}(T_c - T_r(t)), \quad (4)$$

где G_h — коэффициент теплообмена между источником нагрева, имеющем температуру T_h и водой в резервуаре с температурой $T_r(t)$.

Решение уравнений (3), (4) с начальными условиями $V(0) = V_0$, $T_r(0) = T_0$ имеет вид

$$V(t) = V_0 + \frac{G_{c0}}{\rho} t, \quad T_r(t) = T_r^{(st)} - (T_r^{(st)} - T_0) \left(1 + \frac{G_{c0}}{\rho V_0} t\right)^{-(1+G_h/G_{c0})}, \quad (5)$$

где

$$T_r^{(st)} = \frac{G_h T_h + G_{c0} T_c}{G_h + G_{c0}}. \quad (6)$$

Из (5) следует, что время заполнения резервуара равно

$$\tau_1 = \frac{\rho(V_r - V_0)}{G_{c0}}, \quad (7)$$

а температура воды в резервуаре в момент его заполнения равна

$$T_r(\tau_1) \equiv T_1 = T_r^{(st)} - (T_r^{(st)} - T_0) \left(\frac{V_r}{V_0} \right)^{-(1+G_h/G_{c0})}. \quad (8)$$

При $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $V_r = 10 \text{ м}^3$, $G_h = 5 \text{ кг/с}$, $G_{c0} = 12 \text{ кг/с}$, $T_c = 300^\circ \text{К}$, $T_h = 460^\circ \text{К}$ температура воды в резервуаре по мере его наполнения понижается.

Понижение температуры связано с большим притоком холодной воды.

2 Наполнение трубки и изменение температуры воды в резервуаре до закипания

После того, как резервуар заполнен, начинает наполняться трубка. Изменение высоты водяного столба в трубке описывается уравнением

$$\rho S \frac{dh}{dt_1} = G_{c0} \left(1 - \frac{h(t_1)}{h_0} \right) \quad (9)$$

с нулевым начальным условием, где $t_1 = t - \tau_1$, S — сечение трубки.

Решение уравнения (9) имеет вид

$$h(t_1) = h_0 \left[1 - \exp \left(- \frac{G_{c0}}{\rho S h_0} t_1 \right) \right]. \quad (10)$$

Отсюда следует, что предельная высота воды в трубке равна h_0 , причем это значение высоты достигается асимптотически. Рассматриваемый процесс продолжается до момента времени $t_1 = \tau_2$, определяемого из условия равенства температуры воды в резервуаре $T_r(\tau_2)$ температуре кипения при давлении в резервуаре $p_r(\tau_2) = p_a + \rho g h(\tau_2)$. Зависимость температуры кипения T_b

от t_1 может быть определена из формулы Клапейрона–Клаузиуса следующим образом:

$$T_b = T_{ba} \left(1 - \frac{R T_{ba}}{\lambda \mu} \ln \frac{p_a + \rho g h(t_1)}{p_a} \right)^{-1}, \quad (11)$$

где T_{ba} — температура кипения при атмосферном давлении.

Так как при наполнении трубки имеется поток тепла из резервуара, температура воды в резервуаре, вообще говоря, зависит от распределения температуры воды в трубке. Последнюю нельзя считать постоянной по высоте и поэтому следует решать уравнение теплопроводности, принимая во внимание движение жидкости в трубке со скоростью

$$v(t_1) = \frac{dh}{dt_1} = \frac{G_{c0}}{\rho S} \left(1 - \frac{h(t_1)}{h_0} \right). \quad (12)$$

С учетом этого движения уравнение теплопроводности принимает вид

$$\rho c \left(\frac{\partial T(x, t_1)}{\partial t_1} + v(t_1) \frac{\partial T(x, t_1)}{\partial x} \right) = \kappa \frac{\partial^2 T(x, t_1)}{\partial x^2}, \quad (13)$$

где κ — коэффициент теплопроводности, x изменяется от нуля до $h(t_1)$.

Уравнение (13) должно быть решено со следующими начальными и граничными условиями:

$$T(x, 0) = T_r(\tau_1), \quad T(0, t_1) = T_r(t_1), \quad \left. \frac{\partial T(x, t_1)}{\partial x} \right|_{x=h(t_1)} = 0. \quad (14)$$

Первое условие вытекает из того факта, что при $t_1 \rightarrow 0$ интервал изменения x стягивается в точку $x = 0$. Последнее условие написано в предположении, что температура пара над поверхностью воды в трубке равна температуре верхних слоев воды.

В уравнении (13) удобно перейти к новым переменным $z = x/h(t_1)$, $t'_1 = t_1$. С учетом того, что

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{h(t'_1)} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \frac{\partial T}{\partial t_1} = \frac{\partial T}{\partial t'_1} - \frac{v(t'_1)z}{h(t'_1)} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2(t'_1)} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

уравнения (13) и условия (14) принимают вид

$$\rho ch(t_1) \left(h(t_1) \frac{\partial T(z, t_1)}{\partial t_1} + v(t_1)(1-z) \frac{\partial T(z, t_1)}{\partial z} \right) = \kappa \frac{\partial^2 T(z, t_1)}{\partial z^2}, \quad (15)$$

$$T(z, 0) = T_r(\tau_1), \quad T(0, t_1) = T_r(t_1), \quad \left. \frac{\partial T(z, t_1)}{\partial z} \right|_{z=1} = 0. \quad (16)$$

Здесь штрих у t_1 опущен.

Изменение температуры воды в резервуаре $T_r(t_1)$ с учетом потока тепла, идущего на нагревание водяного столба высоты $h(t_1)$ в трубке, можно описать следующим уравнением:

$$\rho \left[V_r \frac{dT_r}{dt_1} + S \int_0^{h(t_1)} \left(\frac{\partial T(x, t_1)}{\partial t_1} + v(t_1) \frac{\partial T(x, t_1)}{\partial x} \right) dx \right] = G_h(T_h - T_r(t_1)) + G_{c0} \left(1 - \frac{h(t_1)}{h_0} \right) (T_c - T_r(t_1)). \quad (17)$$

с начальным условием $T_r(0) = T_1$. Принимая во внимание уравнение (13) и последнее из условий (14), отсюда получаем

$$\rho \left[V_r \frac{dT_r}{dt_1} + S \left(v(t) T_r(t) - \frac{\kappa}{\rho c} \left. \frac{\partial T(x, t_1)}{\partial x} \right|_{x=0} \right) \right] = G_h(T_h - T_r(t_1)) + G_{c0} \left(1 - \frac{h(t_1)}{h_0} \right) (T_c - T_r(t_1)). \quad (18)$$

Для рассматриваемой модели гейзера оценки решения уравнения теплопроводности (13) с условиями (14) показывают, что членом $\partial T(x, t_1)/\partial x|_{x=0}$ в уравнении (18) всегда можно пренебречь, т.е. поток тепла определяется только перетеканием части воды из резервуара в трубку. При этом для температуры воды в резервуаре мы получаем замкнутое уравнение

$$\rho V_r \frac{dT_r}{dt_1} = G_h(T_h - T_r(t_1)) + G_{c0} \left(1 - \frac{h(t_1)}{h_0} \right) (T_c - 2T_r(t_1)), \quad (19)$$

где $h(t_1)$ определяется выражением (10). Как уже отмечалось, это уравнение следует решать с начальным условием $T_r(0) = T_r(\tau_1) = T_1$. Расчеты показывают, что на рассматриваемой стадии температура воды в резервуаре вначале продолжает уменьшаться, а затем увеличивается, достигая значения температуры кипения $T_b \approx 393.5^\circ K$ на глубине приблизительно равной h_0 . Момент времени, когда это происходит, мы обозначаем τ_2 .

Напомним, что уравнения (19) и (15) справедливы только при $t_1 \leq \tau_2$. Дальше начинается кипение воды в резервуаре, что приводит к извержению гейзера. Таким образом, на этом вторая стадия заканчивается и начинается третья стадия.

3 Начало извержения

Как было отмечено, когда $T_r(t)$ достигает значения температуры кипения при соответствующем давлении, вода в резервуаре начинает кипеть и испаряться. Образующиеся пузырьки пара выталкивают воду, понижая уровень воды в трубке, и, как следствие, давление в резервуаре падает, так что падает и температура кипения. При этом вода становится все более перегретой. В результате кипение становится очень бурным, напоминающим взрыв. Однако постепенно, благодаря сильному испарению, температура воды в резервуаре начинает уменьшаться и, когда она достигает значения, близкого к температуре кипения при атмосферном давлении $T_{ба}$, извержение прекращается.

В описанном процессе весьма существенную роль играет скорость испарения перегретой воды, главным образом, ее зависимость от температуры и давления в резервуаре. Насколько нам известно, до сих пор не существует

строгой теории этого явления, совпадающей с экспериментальными данными. По-видимому, это связано с тем, что на скорость кипения влияют многие факторы, которые невозможно учесть при теоретическом рассмотрении. В большинстве работ, посвященных кипению и испарению, данный вопрос вообще не рассматривается (см., например, [6] и приведенные там ссылки). Там же, где он рассматривается (см., например, [7–9]), приводятся формулы, содержащие произвольные параметры и существенно отличающиеся друг от друга.

Только для идеально чистых жидкостей была создана достаточно строгая теория так называемых гетерофазных флуктуаций, приводящих к рождению зародышей другой фазы ([10–14]). Однако в своей книге [12] автор выразил достаточно критическое отношение к результатам этой теории, поскольку в реальных условиях они дают практически нулевую скорость кипения. Он написал: «...теория конденсации пересыщенного пара и в особенности вскипания перегретой жидкости остается пустой схемой, имеющей весьма ограниченное значение для понимания действительных явлений, если не принимать во внимание факторов, облегчающих эти процессы и практически всегда имеющих в наличии». Учет этих факторов в работах Френкеля и последующих (см., например, [15]) практически отсутствует. Е.И. Несис показал, что влияние гетерофазных флуктуаций на процесс кипения начинает сказываться только при очень больших перегревах, когда $T - T_b > (T_{cr} - T_b)/2$, где T_b — температура кипения при давлении насыщенного пара, равного давлению в жидкости p_1 , T_{cr} — критическая температура. Заметим, что для воды $T_{cr} \approx 647^\circ\text{K}$.

Поэтому мы используем формулу для скорости испарения при так называемом пузырьковом кипении [8]:

$$\frac{dm_v}{dt} = BD(T) \frac{\mu p_0(T)}{RT} \quad (20)$$

где $m_v(t)$ — масса воды, испаряющейся из единицы объема, T — температура воды, $D(T)$ — коэффициент диффузии водяного пара, пропорциональный $T^{3/2}$, μ — молекулярный вес жидкости, p_0 — давление насыщенного пара, соответствующее температуре кипения T , R — универсальная газовая постоянная, B — коэффициент, зависящий от условий кипения. Так как коэффициент B определяется многими факторами (наличием примесей, количеством пузырьков и др.), которые могут случайным образом изменяться во времени, то процесс кипения, как правило носит случайный характер.

Формула Клапейрона–Клаузиуса определяет связь между $p_0(T)$ и давлением воды в резервуаре $p_r = p_a + \rho gh(T)$:

$$\frac{p_0(T)}{p_r} = \exp\left(\frac{\lambda\mu\Delta T}{RTT_b}\right), \quad (21)$$

где T_b — температура кипения при давлении насыщенного пара p_r , $\Delta T = T - T_b$ — степень перегрева жидкости, λ — удельная теплота парообразования.

Подставляя (21) в (20) и учитывая зависимость $D(T)$, формулу (20) для скорости испарения воды из резервуара можно переписать в виде

$$\frac{dm_v}{dt_2} = C(t_2)V \frac{p_r}{p_a} \sqrt{T_r} \exp\left(\frac{\lambda\mu(T_r - T_b)}{RT_r T_b}\right), \quad (22)$$

где V — объем воды в резервуаре, $t_2 = t - \tau_1 - \tau_2$, $C(t_2)$ — случайная функция времени.

Предполагая, что в единицу времени из трубки извергается количество воды, вытесняемой образующимся паром, для изменения уровня воды в трубке,

до тех пор, пока она не становится пустой, и температуры воды в резервуаре можно записать следующие уравнения:

$$\rho S \frac{dh}{dt_2} = G_{c0} \left(1 - \frac{h(t_2)}{h_0} \right) - \frac{\rho}{\rho_v} \frac{dm_v}{dt_2}, \quad (23)$$

$$\rho V_r \frac{dT_r}{dt_2} = G_h(T_h - T_r(t_2)) + G_{c0} \left(1 - \frac{h(t_2)}{h_0} \right) (T_c - 2T_r(t_2)) - \frac{\lambda}{c} \frac{dm_v}{dt_2},$$

где

$$\rho_v = \rho \exp \left(- \frac{\lambda \mu}{RT_r} \right), \quad (24)$$

— плотность пара при температуре T_r ,

$$\frac{dm_v}{dt_2} = C(t_2) V_r \left(1 + \frac{\rho g h(t_2)}{p_a} \right) \sqrt{T_r} \exp \left(\frac{\lambda \mu (T_r - T_b)}{RT_r T_b} \right). \quad (25)$$

При $C(t) = const = 0.000001$ изменение уровня воды в трубке и температуры воды в резервуаре при кипении продемонстрированы на рис. 3 а. Мы видим, что при выбранных значениях параметров трубка становится пустой за довольно короткое время $\tau_3 \approx 11$ сек, а вода в резервуаре остывает незначительно (до температуры 390.92°K).

Когда h обращается в нуль, характер рассматриваемого процесса зависит от температуры воды в резервуаре. Если в момент времени, когда h становится равным нулю, T_r больше T_{ba} , то вода в резервуаре будет продолжать бурно кипеть и испаряться. Образующийся пар поднимается в трубку и выходит наружу. Поэтому количество воды в резервуаре уменьшается. Именно этот случай имеет место при выбранных выше значениях параметров.

Уравнения, описывающие уменьшение объема воды и изменение ее температуры в резервуаре при $T_r > T_{ba}$ имеют вид

$$\rho \frac{dV}{dt_3} = G_{c0} - \frac{\rho}{\rho_v} \frac{dm_v}{dt_3}, \quad \rho V \frac{dT_r}{dt_3} = G_h(T_h - T_r) + G_{c0}(T_c - T_r) - \frac{\lambda}{c} \frac{dm_v}{dt_3}, \quad (26)$$

где $t_3 = t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3$,

$$\frac{dm_v}{dt_3} = C(t_3)V(t_3)\sqrt{T_r} \exp\left(\frac{\lambda\mu(T_r - T_{ba})}{RT_r T_{ba}}\right). \quad (27)$$

Когда $T_r(t_3)$ в некоторый момент времени $t_3 = \tau_4$ становится равным T_{ba} , кипение прекращается и испарение становится очень слабым. После этого весь процесс начинается сначала. Таким образом, общая длительность одного цикла извержения гейзера равна $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$.

Зависимости $V(t_3)$ и $T_r(t_3)$ показаны на рис. 3 *b*. Мы видим, что время остывания воды в резервуаре при пустой трубке ($\tau_4 \approx 160$ сек) существенно больше времени опорожнения самой трубки.

Повторяя описанный цикл несколько раз с начальными условиями, равными значениям соответствующих переменных в конце предыдущего цикла, можно проследить за процессом установления и найти установившийся режим работы гейзера. Результаты, полученные для трех циклов при $V(0) = 4\text{м}^3$, $T_r(0) = 373^\circ\text{К}$ показывают, что уже со второго цикла процесс является установившимся и периодическим. Это соответствует известному факту, что время установления колебаний в релаксационных генераторах является очень малым.

Из полученных результатов следует, что в отсутствие случайных возмущений извержения рассматриваемой модели гейзера представляют собой строго периодический процесс с периодом приблизительно равным 36 минутам. При этом время самого извержения примерно равняется трем минутам. Случайность возникает только в том случае, если принять во внимание, что некоторые параметры, например C , являются случайными функциями времени.

При $C(t) = 0.000001 + \xi(t)$, где $\xi(t)$ — шум с постоянной спектральной

плотностью в ширине полосы 1000 Гц и дисперсией равной $1.6 \cdot 10^{-9}$, последовательность извержений рассматриваемой модели гейзера представляет собой случайный процесс, но достаточно близкий к регулярному. Зависимости промежутков времени между двумя последовательными извержениями и времен самого извержения от номера извержения показаны на рис. 4 *a* и *b*, наряду со средними значениями этих величин. Из представленных рисунков видно, что при выбранном значении интенсивности шума разброс указанных величин лежит в пределах 10%.

4 Простейшая модель гейзера

Помимо теоретического исследования процессов гейзера, нами была сконструирована простейшая действующая модель гейзера. Модель состоит из трех основных элементов, необходимых для реализации процесса извержения гейзера: резервуара, наполняемого водой, канала (стеклянной трубки) и источника тепла. В качестве резервуара использовалась химическая колба из теплостойкого стекла, а в качестве источника тепла использовалась обыкновенная электроплитка. На верхнем конце трубки был установлен широкий водосборник, куда попадала вода после извержения и откуда она стекала в колбу. Такая модель ярко демонстрирует последовательность извержений гейзера. Наблюдения показывают, что эта последовательность является случайной (см. рис. 4 *c*, где показана зависимость промежутков времени между последовательными извержениями от номера извержения). Представленная зависимость весьма схожа с теоретической, только разброс несколько больше.

Список литературы

- [1] J.S. Rinchart, Geysers and Geothermal Energy. Springer-Verlag, New York, (1980).
- [2] А.Г.Мержанов, А.С. Штейнберг, Г.С. Штейнберг, К теории гейзерного процесса. ДАН СССР, т. 194, № 2, 318–321, (1970).
- [3] Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда, Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, (1987).
- [4] П.С. Ланда, Нелинейные колебания и волны. М.: Наука-Физматлит, 1997, гл. 13.
- [5] M.J. Nicholl, S.W. Wheatcraft, S.W. Tyler, Is Old Faithful a strange attractor? J. Geophys. Res., vol. 99, No. B3, pp. 4495–4503, (1994).
- [6] Van P. Carey, Liquid–Vapor Phase-Change Phenomena. Taylor & Francis (1992).
- [7] Вопросы физики кипения (сборник статей). М.: Мир, 1964.
- [8] Б.М. Яворский, А.А. Пинский, Основы физики. М.: Наука, т. 1, (1969).
- [9] И.И. Марков, А.А. Хащенко, О.В. Вечер, О скорости испарения жидкости с её свободной поверхности и с поверхности нагрева. МО РФ, Северо-Кавказский государственный технический университет, Северо-Кавказское отделение академии технологических РФ. Сборник научных трудов, вып. 6, Ставрополь сс. 48–55, (2002).

- [10] M. Volmer, A. Weber, Keimbildung in übersättigten Gebilden. Z. Phys. Chem., vol.119, pp. 277–301, (1926).
- [11] R. Becker, W. Döring, Kinetische Behandlung der Keimbildung in übersättigten Dämpfen. Annalen der Physik, B. 24, 719–752, (1935).
- [12] Я.И. Френкель, Кинетическая теория жидкостей. М.: Наука, (1975).
- [13] Я.Б. Зельдович, ЖЭТФ, т.12, с. 525, (1942).
- [14] Ю. Каган, ЖФХ, т. 34(1), с. 92, (1960).
- [15] Е.И. Несис, Кипение жидкостей. М.: Наука, (1973).

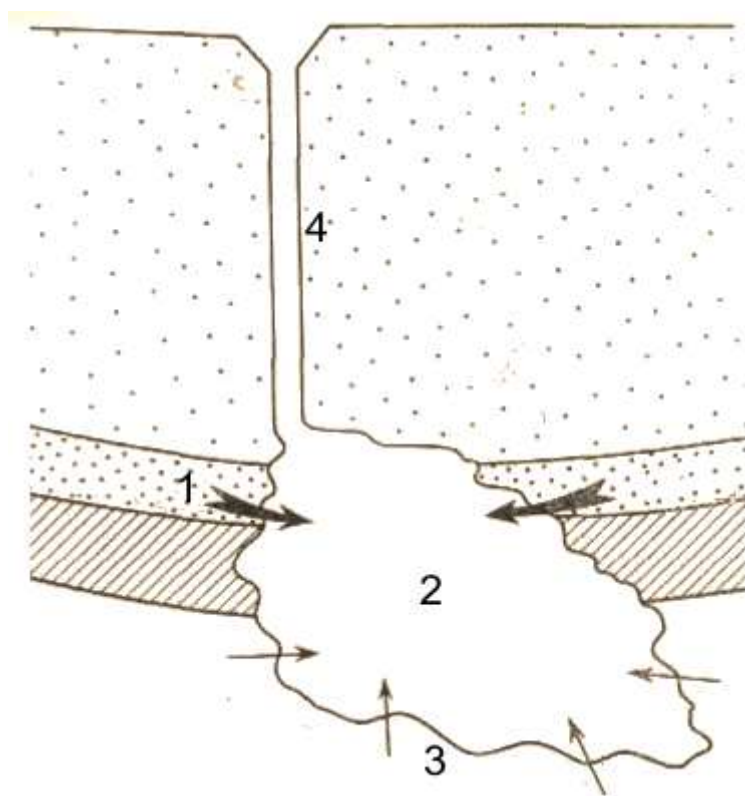


Рис. 1: Схематическое изображение гейзера: 1 — водоносный слой, 2 — резервуар, 3 — магма, соприкасающаяся с резервуаром, 4 — канал, связывающий резервуар с поверхностью Земли.

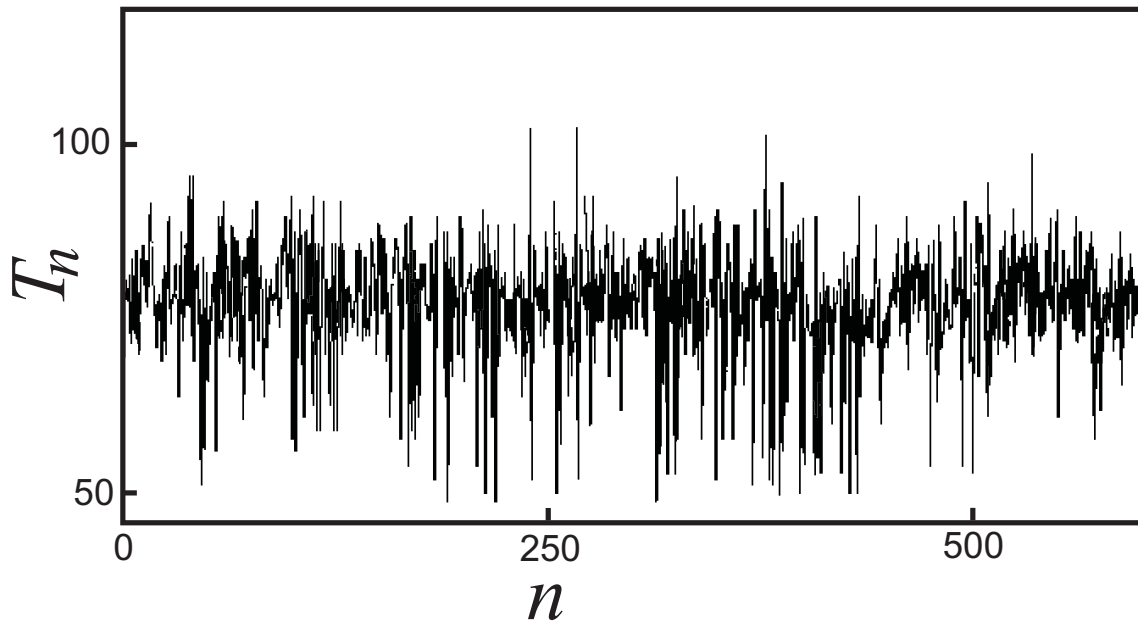


Рис. 2: Зависимость интервала между соседними извержениями от номера извержения для гейзера Old Faithful, измеренная в течение декабря 1987 г. [5].

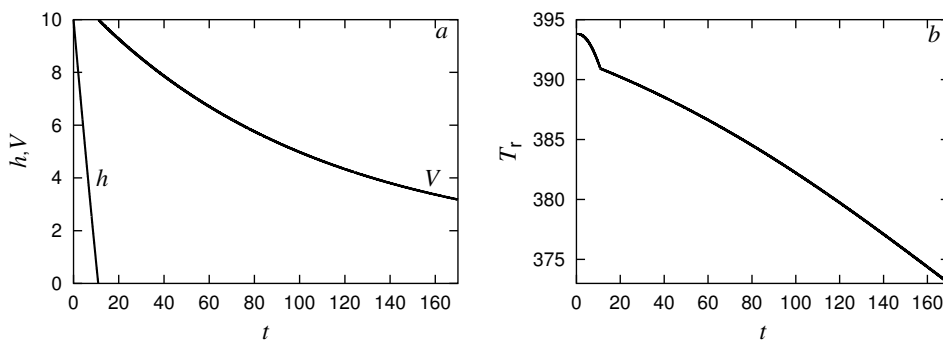


Рис. 3: Изменение уровня воды в трубке и объема воды в резервуаре (a) при кипении для $C(t) = const = 0.000001$; (b) — изменение температуры воды в резервуаре в процессе извержения.

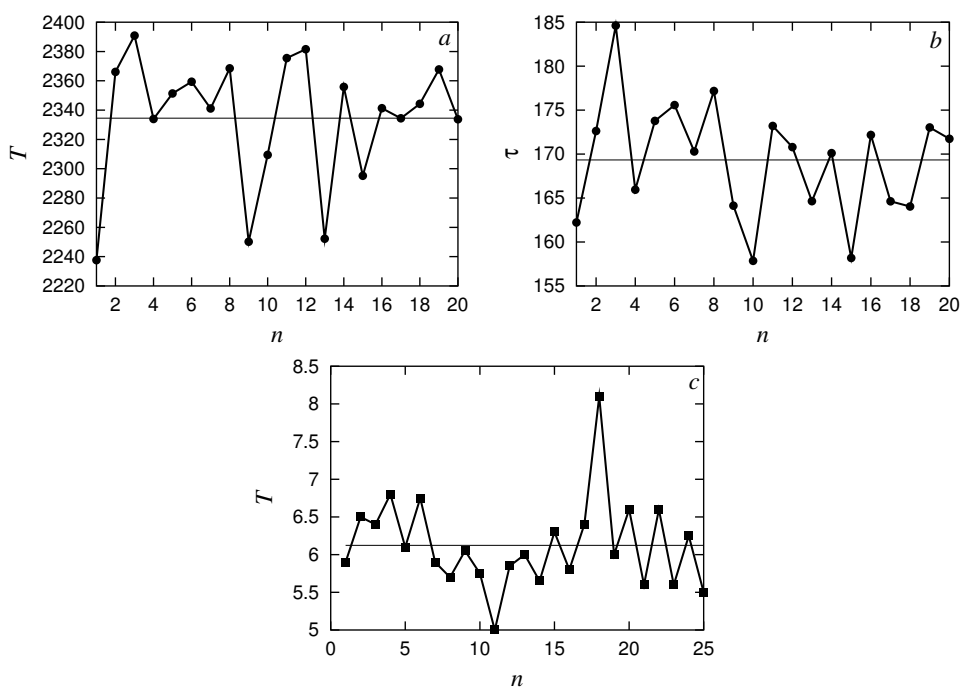


Рис. 4: Зависимости промежутков времени между двумя последовательными извержениями (a — теория, c — модельный эксперимент) и времен самого извержения (b — теория) от номера извержения.