УДК 621.01

К ОПИСАНИЮ ПРОЦЕССОВ ПРОХОЖДЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ МАШИННЫЕ КОНСТРУКЦИИ, МОДЕЛИРУЕМЫЕ ПОСРЕДСТВОМ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ (часть 1)

© Виталий Львович Крупенин

Учреждение Российской академии наук институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

krupenin@online.ru

Аннотация. *Дано подробное описание процесса прохождения резонансного виброударного волнового процесса через машинную конструкцию, моделируемую сильно нелинейной сплошной средой сложной структуры. Такие модели содержат несущий элемент и присоединенное оборудование — прямой продольно колеблющийся стержень, в каждой точке которого амортизированы присоединенные динамические системы, содержащие ударные пары различной природы. Показано, что использование моделей данного типа дает возможность, в частности, аналитически описать весьма нетривиальные машинные конструкции, возникающие в них динамические процессы и присущие им и ранее не описанные нелинейные эффекты.*

Ключевые слова: *сильно нелинейные сплошные среды, волноводы, модели виброударных систем и процессов, распределенные периодические функции Грина (ПФГ), нелинейные формы колебаний, плотность импульса, распределение фазы удара, зоны прохождения вибрации, зоны локализации вибрации, множественные соударения элементов машин.*

1. Рассмотрим дискретную систему регулярной структуры (рис.1), состоящую из линейной цепочки [1] с параметрами (m_0', k') и упруго присоединенных к ней осцилляторов с параметрами (m', c'). Внутри осцилляторов располагаются полости, в которых симметрично установлены тела массы m_1' (рис. 2). Линейная цепочка – суть дискретная модель одномерной упругой среды простой структуры. Присоединение осцилляторов обращает структуру среды в сложную (частный случай модели, описанной в [2]), а наличие зазоров вносит сильную нелинейность.

Обозначив координаты точечных тел, образующих цепочку, $U_k \ (k = 0, 1, \ldots, n, n+1)$ (левый конец системы закреплен, правый совершает синусоидальные колебания), запишем

$$m_0'\ddot{U}_k + k'(2U_{k-1} - U_{k+1} - U) + c'(U_k - y_k) = 0; \qquad (1)$$

$$U_0 = 0, \qquad U_{n+1} = \mu \cos \omega t, \qquad (2)$$

где μ и ω - амплитуда и частота колебаний правого конца цепочки; y_k - координаты присоединенных осцилляторов.

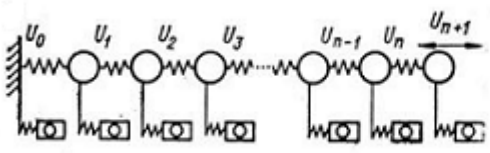


Рис. 1

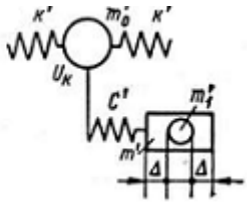


Рис. 2

Для осцилляторов имеем

$$m'\ddot{y}_k + c'(y_k - U_k) - \Phi'(y_k^0) = 0. \qquad (3)$$

Здесь Φ' - ударная сила; y_k^0 - относительная координата: $y_k^0 = y_{1k} - y_k$, где y_{1k} - абсолютная координата тела, располагающегося в полости, уравнение движения которого

$$m_1'(\ddot{y}_k + \ddot{y}_k^0) + \Phi'(y_k^0) = 0. \qquad (4)$$

Предположим, что симметричная ударная сила Φ' отвечает гипотезе Ньютона, т.е. для моментов удара φ_k' и ударных импульсов J_k' при строгой очередности соударений имеем:

$$y_k^0(\varphi_k') = \Delta; \qquad J_k' = M'(1+R)\dot{y}_k^0(\varphi_k' - 0) > 0, \qquad (5)$$

где M' - приведенная масса, $M' = m'm_1'/(m' + m_1')$; $|y_k^0| \leqslant \Delta$. Импульсы удара считаются положительными, когда удар происходит о правую границу полости.

Уравнения (1), (3), (4) и соотношения (2), (5) описывают дискретную модель сильно нелинейной одномерной вибропроводящей среды сложной структуры, «состоящей» из несущей и присоединенной частей. Поскольку в процессе передачи вибрации участвует большое число тел, перейдем к ее континуальному аналогу. При этом присутствие ударных пар будет учитываться плотностью силы удара, т.е. будет считаться, что удар распределен по всем сечениям континуального аналога линейной цепочки – стержня [5,6].

Пусть a^0 - расстояние между соседними частицами цепочки в равновесном состоянии. Тогда при малых a^0, заменяя индекс k на текущую переменную x и действуя аналогично, запишем:

$$\rho U_{tt} - EU_{xx} + c(U - y) = 0; \qquad (6)$$

$$my_{tt} + c(y - U) - \Phi(y^0) = 0; \qquad (7)$$

$$m_1(y_{tt} + y_{tt}^0) + \Phi(y^0) = 0. \qquad (8)$$

где ρ и E - линейная плотность и модуль Юнга несущей части среды, кг/ м^2 и Н/ м^2; $U,\ y,\ y^0$ - перемещения структурных элементов среды с координатой x, $U = U(x,\ t)$, $y = y(x,\ t)$, $y^0 = y^0(x,\ t)$ [$U(x,\ t)$ описывает смещение в несущей части среды, $y(x,\ t)$ и $y^0(x,\ t)$ - в присоединенном оборудовании] ; $\Phi(y^0)$ - плотность силы удара; индексация по независимым переменным обозначает частное дифференцирование; m и m_1 - линейные плотности присоединенной части, кг/ м; c - распределенная статическая жесткость подвеса, кг/ с^2 м: $c/\rho = c'/m_0 = \Omega^2\,[1/c^2]$. Здесь Ω - парциальная частота свободных колебаний присоединенного осциллятора.

Приведенные соотношения отражают сложность структуры рассматриваемой сплошной среды. Генерация широкого спектра осуществляется за счет распределенной силы удара.

Граничные условия принимают вид

$$U(0,\ t); \qquad U(l,\ t) = \mu\cos\omega t, \qquad (9)$$

где l - длина вибровода, $l = (n+1)a^0$. Для многих случаев вместо (9) встречаются условия:

$$U_x(0,\ t) = 0; \qquad EU_x(l,\ t) = \mu\cos\omega t. \qquad (10)$$

Соотношения (5) переходят в следующие:

$$y^0[x,\ \varphi(x)] = \Delta; \qquad J(x) = M(1+R)\,y_t^0[x,\ \varphi(x)-0] > 0, \quad (11)$$

где $\varphi(x)$ - распределение моментов удара (фазы); $J(x)$ - плотность ударного импульса, кг/с; M - погонная приведенная масса, $M = mm_1/(m+m_1)$, кг/м.

Таким образом, в качестве вибровода теперь рассматривается среда, состоящая из стержня, по которому распространяются продольные волны (рис. 3,а), и в каждой его точке помещена упруго с ним связанная ударная пара (рис. 3,б). Следует заметить, что при такой постановке может оказаться необходимым задаться распределениями $\Delta(x)$ и $R(x)$, а также рассмотреть неравномерные распределения масс. Такие задачи формулируются и рассматриваются аналогично.

Для записи определяющих соотношений для присоединенной части среды существуют также другие модели ударных пар (рис. 4), в которых присоединенной части среды соответствуют либо несимметричные ударные пары (рис. 4,а), либо симметричные (рис. 4,б) (в последнем случае при $c_1' \to 0$ получаем модель рис. 2).

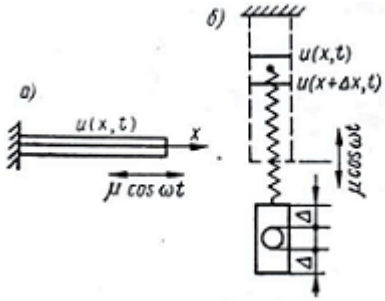


Рис.3



Рис.4

В континуальном приближении граничные условия (9), (10), а также условия удара (11) сохраняют ту же форму (с учетом симметрии и несимметрии задачи). Относительная координата $y^0 = y - y_1$, где y_1 - координата второго присоединенного тела. В этом случае

$$\rho U_{tt} - EU_{xx} + c(U-y) + c_1(U-y_1) = 0; \qquad (12)$$

$$my_{tt} + c(y-U) + \Phi(y^0) = 0; \qquad (13)$$

$$m_1 y_{1tt} + c(y_1 - U) - \Phi(y^0) = 0. \qquad (14)$$

Разница между системами рис. 4,а и 4,б в свойствах симметрии возможных режимов, определяемых видом силовой функции $\Phi(y^0)$.

Сказанное позволяет обобщить задачу и рассмотреть сложные модели ударных пар (рис.4,в), образованных системами с произвольными операторами динамических податливостей $L_1(p)$ и $L_2(p)$. При усложнении их структуры, однако, задача становится трудноанализируемой.

Аналогично можно построить определяющие модели и для трехмерной несущей среды [6], а также рассмотреть другие частные случаи: несущая среда-балка, мембрана, пластина.

2. Для того чтобы воспользоваться частотно-временными методами найдем распределенные периодические функции Грина для решения вспомогательной линейной задачи вида:

$$\left.\begin{aligned} &\rho U_{tt} - EU_{xx} + c(U - y) = 0; \\ &my_{tt} + c(y - U) = P(x, t); \\ &U(0, t) = 0, \quad U(l, t) = \mu \cos \omega t, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

где $P(x, t)$ - внешняя T - периодическая сила, $T = 2\pi\omega^{-1}$. (Когда это не будет приводить к недоразумениям, слово «сила» мы будем отождествлять со словами «распределение силы»).

Пусть имеют место разложения:

$$P(x, t) = P_k(x)\, e_k(t);$$
$$U(x, t) = U_k(x)\, e_k(t);$$
$$y(x, t) = y_k(x)\, e_k(t),$$

причем, как и ранее, по повторяющимся индексам здесь ведется суммирование от $-\infty$ до ∞.

Для искомых T-периодических режимов запишем:

$$U(x, t) = U_1(x, t) + U_2(x, t); \qquad y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t), \quad (16)$$

где U_2 и y_2 - движения под действием силы $P(x, t)$; U_1 и y_1- движения, вызванные периодическим граничным условием; выражения для них хорошо известны:

$$U_1 = \mu \frac{\sin \omega_0 x}{\sin \omega_0 l} \cos \omega t; \qquad y_1 = \frac{c}{c - m\omega^2} U_1. \qquad (17)$$

При этом квадрат величины

$$\omega_0^2 = \frac{\omega^2}{E}\left[\rho + \frac{cm}{c - \omega^2 m}\right] \qquad (18)$$

будет вещественным числом при $\rho > \frac{cm}{\omega^2 m - c} = \frac{c}{\omega^2 - \Omega^2}$.

В дальнейшем наибольший интерес представляет случай

$$\omega \gg \Omega, \qquad (19)$$

так как присоединенное оборудование на практике зачастую оказывается низкочастотным. Будем поэтому считать, что $\operatorname{Im} \omega_0 = 0$. Комплексность частоты приводит к важным эффектам, описанным в [2]. В этом случае виброударные процессы нерезонансны и малоинтенсивны [3-5].

Для определения U_2 и y_2 положим $\mu = 0$. Подставив ряды Фурье для P_1, U_2 и y_2 в (15), после преобразований найдем:

$$y_{k2}(x) = \frac{P_k(x)}{c - mk^2\omega^2} + \frac{cU_{k2}(x)}{c - mk^2\omega^2}; \qquad (20)$$

$$U''_{k2}(x) + k^2\omega_{0k}^2 U_{k2} = -\frac{cP_k(x)}{E(c - mk^2\omega^2)}; \qquad \omega_{0k}^2 = \frac{\omega^2}{E}\left[\rho + \frac{cm}{c - \omega^2 mk^2}\right], \qquad (21)$$

причем, так как $\mu = 0$, $U_{k2}(0) = U_{k2}(l) = 0$. Решение данного уравнения можно найти в справочнике [7].

Рассмотрим функцию

$$G_k(x,\ z)=\begin{cases}\dfrac{\sin k\omega_{0k}(z-l)\sin k\omega_{0k}x}{k\omega_{0k}\sin k\omega_{0k}l}, & 0\leqslant x\leqslant z;\\ \dfrac{\sin k\omega_{0k}z\sin k\omega_{0k}(x-l)}{k\omega_{0k}\sin k\omega_{0k}l}, & z\leqslant x\leqslant l.\end{cases} \qquad (22)$$

Решение уравнения (21) записывается так [1,7] :

$$U_k(x)=-\frac{c}{E(c-k^2\omega^2m)}\int_0^l G_k(x,\ z)\,P_k(z)\,dz.$$

Из (20) находим, что

$$y_{k2}(x)=\frac{P_k(x)}{c-mk^2\omega^2}-\frac{c^2}{E(c-k^2\omega^2m)}\int_0^l G_k(x,\ z)\,P_k(z)\,dz.$$

Следовательно, возвращаясь к исходному разложению в ряд Фурье, можно записать

$$U_2(x,\ t)=-\frac{c}{ET}\int_0^l\int_0^T\frac{G_k(x,\ z)}{c-mk^2\omega^2}e_k(t-s)\,P(t,\ s)\,dz\,ds, \qquad (23)$$

где при $f(x,\ t)=T^{-1}f_k(x)\,e_k(t)$

$$f_k(x)=\int_0^T f(x,\ s)\,e_k(-s)\,ds.$$

Аналогично находим

$$y_2(x,\ t)=\int_0^T\frac{e_k(t-s)}{T(c-mk^2\omega^2)}P(x,\ s)\,ds-$$

$$-\int_0^l\int_0^T\frac{c^2}{ET}\frac{G_k(x,\ z)}{(c-k^2\omega^2m)^2}e_k(t-s)\,P(z,\ s)\,dz\,ds. \qquad (24)$$

Функция

$$V(x,\ z,\ t)=-\frac{c}{ET}\frac{G_k(x,\ t)\,e_k(t)}{c-mk^2\omega^2}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{c}{ET}\dfrac{\sin k\omega_{0k}(z-l)\sin k\omega_{0k}x}{(c-mk^2\omega^2)\,k\omega_{0k}\sin\omega_{0k}l}e_k(t), & 0\leqslant x\leqslant z;\\ -\dfrac{c}{ET}\dfrac{\sin k\omega_{0k}z\sin k\omega_{0k}(x-l)}{(c-mk^2\omega^2)\,k\omega_{0k}\sin\omega_{0k}l}e_k(t), & z\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

и является распределенной периодической функцией Грина (ПФГ) [3,4], с помощью которой искомое решение записывается в виде, аналогичном [3,5]:

$$U_2(x,\ t)=\int_0^l\int_0^T V(x,\ z,\ t-s)\,P(x,\ s)\,dz\,ds. \qquad (25)$$

Из формулы (24) видно, что распределенная ПФГ для решения $y_2(x,\ t)$ состоит как бы из двух частей:

$$y_2(x,\ t) = \int_0^T \chi_1(t-s)\,P(x,\ s)\,ds - \int_0^t \int_0^T Y(x,\ z,\ t-s)\,P(z,\ s)\,dz\,ds, \qquad (26)$$

где $\chi_1(t-s)$ - ПФГ, соответствующая оператору динамической податливости $(mp^2+c)^{-1}$ («сосредоточенная часть»), а $Y(x,\ z,\ t-s)$ - «распределенная часть». При помощи (24) и (22) находим:

$$Y(x,z,t) = \begin{cases} -\dfrac{c^2}{ET}\,\dfrac{\sin k\omega_{0k}(z-l)\sin k\omega_{0k}x}{k\omega_{0k}(c-k^2\omega^2m)^2\sin k\omega_{0k}l}\,e_k(t), & 0 \leqslant x \leqslant z; \\ -\dfrac{c^2}{ET}\,\dfrac{\sin k\omega_{0k}z\sin k\omega_{0k}(x-l)}{k\omega_{0k}(c-k^2\omega^2m)^2\sin k\omega_{0k}l}\,e_k(t), & z \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \qquad (27)$$

Первый член в правой части (26) описывает реакцию системы на силу, действующую на нее непосредственно, второй член – реакцию на ту же силу со стороны несущей части среды («эхо»).

Итак, искомое представление для T - периодического решения вспомогательной задачи (15) найдено. При рассмотрении симметричных T - периодических режимов $U(x,\ t+T/2) = -U(x,\ t);\ y(x,\ t+T/2) = -y(x,\ t)$ во всех приведенных здесь соотношениях надо заменить T на $1/2T$ и в рядах Фурье оставить лишь нечетные гармоники.

3. Перепишем уравнение (7), (8) в операторной форме:

$$y = \frac{cU}{mp^2+c} + \frac{\Phi(y^0)}{mp^2+c}; \qquad y = -y^0 - \frac{\Phi(y^0)}{m_1p^2} \qquad (28)$$

и исключим y, тогда

$$y^0 = -\frac{cU}{mp^2+c} - \left[\frac{1}{mp^2+c} + \frac{1}{m_1p^2}\right]\Phi(y^0). \qquad (29)$$

Пусть операторам $1/(mp^2+c),\ 1/(m_1p^2),\ 1/(mp^2+c)+1/(m_1p^2)$ соответствуют симметричные ПФГ $\chi_1,\ \chi_2,\ \chi = \chi_1 + \chi_2$[1]. Тогда для симметричных режимов из (29) найдем:

$$y^0(x,\ t) = -c\int_0^{T/2} \chi_1(t-s)\,U(x,\ s)\,ds - \int_0^{T/2} \chi(t-s)\,\Phi[y^0(x,\ s)]\,ds. \qquad (30)$$

Далее, используя (28), запишем

$$y(x,\ t) = -y^0(x,\ t) - \int_0^{T/2} \chi_1(t-s)\,\Phi[y^0(x,\ s)]\,ds. \qquad (31)$$

С другой стороны из (16) и (25) следует, что

$$U(x,\ t) = U_1(x,\ t) + \int_0^t \int_0^{T/2} V(x,\ z,\ t-s)\,\Phi[y^0(z,\ s)]\,dz\,ds. \quad (32)$$

Подставив это выражение в (30), получим

$$y^0(x,\ t) = -c\int_0^{T/2} \chi_1(t-s)\,U_1(x,\ s)\,ds -$$

$$-c\int_0^t \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} \chi_1(t-s)\,V(x,\ z,\ s-\tau)\,\Phi[y^0(z,\ \tau)]\,dz\,ds\,d\tau -$$

$$-\int_0^{T/2} \chi(t-s)\,\Phi[y^0(x,\ s)]\,ds. \quad (33)$$

Интегральные уравнения (31)-(33) и описывают симметричные T - периодические режимы в рассматриваемой системе. В соответствии с (17) запишем решение нашей задачи при безударном режиме:

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,\ t) &= \mu\,\frac{\sin\omega_0 x}{\sin\omega_0 l}\cos\omega t; \\ -c\int_0^{T/2} \chi_1(t-s)\,U_1(x,\ s)\,ds &= -\frac{c\mu}{c-m\omega^2}\,\frac{\sin\omega_0 x}{\sin\omega_0 l}\cos\omega t \equiv f(x,\ t). \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Далее из уравнения (33) находим представление для режима $y^0(x,\ t)$, зависящего от двух неизвестных функций $J(x)$ и $\varphi(x)$, для чего представляем нелинейность Φ в виде обобщенной функции, описывающей удары и зависящей от распределения фазы $\varphi(x)$ и плотности импульса $J(x)$. Затем при помощи условий удара (11) определяем функции $J(x)$ и $\varphi(x)$, для чего придется решить систему двух интегральных уравнений существенно более простых, чем (31)-(33). После полного определения вида функции $y^0(x,\ t)$ при помощи квадратур находим поля перемещений $U(x,\ t)$, $y(x,\ t)$. Реализация этой программы связана с существенными трудностями. Поэтому в дальнейшем будут использованы некоторые приближенные представления.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект № 10-08-00500а).

Литература

1. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
2. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976, 328 с.
3. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука, 1985. – 384 с.
4. Babitsky V.I.,. Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.-Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
5. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний// Крупенин В.Л., Веприк А.М. и др. Л.: Машиностроение, 1987. 76 с.
6. Крупенин В. Л. Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с

распределенным ударным элементом// ДАН, 1995, Т. 343, №6, с. 759-763.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

Поступила: 20.04.11.