УДК 517.516.6

Почти периодические функции

В.Ш. Бурд

Аннотация. Краткое введение в теорию почти периодических функций.

Ключевые слова: периодические функции, почти периодические функции, среднее значение, ряды Фурье.

Описываются основные свойства почти периодических функций (кратко пп функций). Подробное изложение теории почти периодических функций можно найти в книгах Дмидовича [1] и Левитана [2].

Функции из этого класса определены при всех $t \in (-\infty, \infty)$ (мы используем обозначение $t \in \mathcal{R}$).

Тригонометрическим многочленом будем называть выражение

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t, \tag{1}$$

где a_k, b_k, ω_k - вещественные числа. Выражение (1) удобно записывать в комплексной форме

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k t},$$

где λ_k - вещественные числа.

Существуют тригонометрические многочлены, отличные от периодической функции. Действительно, возьмем многочлен $f(t) = e^{it} + e^{i\pi t}$. Предположим, что $f(t)$ - периодическая функция с некоторым периодом ω. Тождество $f(t+\omega) = f(t)$ имеет вид

$$(e^{i\omega} - 1)e^{it} + (e^{i\pi\omega} - 1)e^{i\pi t} \equiv 0.$$

Так как функции e^{it} и $e^{i\pi t}$ линейно независимы (из тождества

$$c_1 e^{it} + c_2 e^{i\pi t} \equiv 0$$

следует, что $c = 1 = c_2 = 0$), то

$$e^{i\omega} - 1 = 0,\ e^{i\pi\omega} - 1 = 0.$$

Следовательно, $\omega = 2k\pi$ и $\pi\omega = 2h\pi$, где k и h - целые числа. Одновременное выполнение этих равенств невозможно.

Отметим некоторые свойства тригонометрических многочленов. Каждый тригонометрический многочлен является непрерывной и ограниченной функцией при $t \in \mathcal{R}$. Ограниченность следует из неравенства

$$|T_n(t)| = |\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda t}| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Тригонометический многочлен - равномерно непрерывная функция. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при $|t_1 - t_2| < \delta$ выполняется неравенство

$$|T_n(t_1) - T_n(t_2)| < \varepsilon,$$

где бы ни были расположены точки t_1 и t_2 на интервале $(-\infty, \infty)$. Очевидно, этим свойством обладают функции $\sin \omega_k t$ и $\cos \omega_k t$. Поэтому этим свойством обладает и тригонометрический многочлен.

Далее, сумма и произведение тригонометрических многочленов будет тригонтметрическим многочленом.

Теперь введем определение почти периодической функции.

Определение 1. Функцию $f(t)$, определенную при $t \in \mathcal{R}$, будем называть почти периодической, если она является пределом в смысле равномерной сходимости на всей вещественной оси последовательности $T_n(t)$ тригонометрических многочленов вида (1), т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что при $n > N$

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |f(t) - T_n(t)| < \varepsilon.$$

Из определения 1 следует, что почти периодическую функцию можно с любой точностью аппроксимировать тригонометрическим многочленом.

Очевидно, любая непрерывная периодическая функция будет почти периодической в смысле определения 1.

Перейдем к описанию свойств почти периодических функций. Они наследуют многие свойства тригонометрических многочленов.

1) *Каждая пп функция непрерывна и ограничена при* $t \in \mathcal{R}$.

2) *Каждая пп функция* $f(t)$ *равномерно непрерывна.*

3) *Если* $f(t)$ *- пп функция и* c *- постоянная, то* $cf(t), f(t + c), f(ct)$ *- пп функции.*

4) *Если* $f(t)$ *и* $g(t)$ *- пп функции, то* $f(t) \pm g(t)$ *и* $f(t) \cdot g(t)$ *- пп функции.*

Из свойства 4) непосредственно следует

5) *Если* $P(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ - *многочлен от переменных* $z_1, z_2, \ldots, z_k$ *и* $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t)$ - *пп функции, то* $F(t) = P(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ - *пп функция.*

6) *Предел равномерно сходящейся последовательности пп функций есть пп функция.*

Из свойства 6) следует

7) *Пусть функция* $\Phi(z)$ *непрерывна на ограниченном интервале* $[a, b]$ *вещественной оси. Пусть значения пп функции* $f(t)$ *принадлежат интервалу* $[a, b]$. *Тогда* $F(t) = \Phi($$f(t)$ - *пп функция.*

8) *Пусть* $f(t), g(t)$ - *пп функции и* $\inf_{-\infty<t<\infty} |g(t)| > 0$, *тогда* $f(t)/g(t)$ - *пп функция.*

Свойство 8) является следствием 7). В силу условий 8) значения функции $1/g(t)$ принадлежат некоторому интервалу $[m, M]$, где $m > 0$, $M < \infty$. На этом интервале функция $\Phi(z) = 1/z$ непрерывна.

Рассмотрим функцию $f(t, x)$, зависящую от параметра x изменяющегося в ограниченном интервале M.

Определение 2. Функцию $f(t, x)$ назовем почти периодической по t равномерно относительно $x \in M$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число N, что при $n > N$

$$\sup_{-\infty<t<\infty} |f(t, x) - \sum_{l=1}^{n} c_l(x) e^{i\lambda_l t}| < \varepsilon,$$

причем функции $c_l(x)$ непрерывны на M.

Можно показать, что функция $f(t, x)$ почти периодична по t равномерно относительно x, если она почти периодична по t при каждом фиксированном x и непрерывна по $x \in M$ равномерно относительно $t \in \mathcal{R}$. Если $f(t, x)$ почти периодична по t равномерно относительно x и $x(t)$ - пп функция, то $f(t, x(t)$ - пп функция.

Непрерывную функцию $f(t)$ назовем нормальной функцией, если семейство функций $\{f(t + h)\}(-\infty < h < \infty)$ обладает следующим свойством: из любой бесконечной последовательности функций

$$f(t + h_1),\ f(t + h_2), \ldots$$

можно выбрать равномерно сходящуюся при всех t подпоследовательность.

Оказывается, что пп функция является нормальной функцией и нормальная функция является пп функцией.

9) *Пусть $f(t)$ - пп функция и ее производная $f'(t)$ равномерно непрерывна на всей вещественной оси. Тогда $f'(t)$ - пп функция.*

Покажем это. Рассмотрим функции

$$\varphi_k(t) = k[f(t + \frac{1}{k}) - f(t)], \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Применяя теорему о среднеи значении, получим

$$\varphi_k(t) = f'(t + \frac{\theta_k}{k}), \quad 0 < \theta_k < 1.$$

При $k \to \infty$ последовательность пп функций $\varphi_k(t)$ равномерно сходится при $t \in \mathcal{R}$ к функции $f'(t)$. Следовательно, $f'(t)$ - пп функция.

Вопрос об интегрируемости пп функции рассмотрим позднее.

Следующее свойство пп функции для нас особенно важно.

10) *Для пп функции $f(t)$ существует предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)dt = \langle f(t) \rangle$$

равномерно по a. Число $\langle f(t) \rangle$ не зависит от выбора a и называется средним значение пп функции $f(t)$.

Приведем доказательство свойства 10).

Пусть сначала $f(t) = T_n(t)$ - тригонометрический многочлен:

$$T_n(t) = c_0 + \sum_{l=1}^{n} c_l e^{i\lambda_l t},$$

где λ_l - ненулевые вещественные числа. Тогда

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} T_n(t)dt = c_0 + \sum_{l=1}^{n} c_l \frac{e^{i\lambda_l(a+T)} - e^{i\lambda_l a}}{i\lambda_l T}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\left| \frac{1}{T} \int_a^{a+T} T_n(t)dt - c_0 \right| \le \frac{2}{T} \sum_{l=1}^{n} \left| \frac{c_l}{\lambda_l} \right|,$$

из которого следует

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_a^{a+T}T_n(t)dt=c_0.$$

Для произвольной пп функции $f(t)$ возьмем такой тригонометрический многочлен $T_n(t)$, что

$$|f(t)-T_n(t)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad t\in\mathcal{R},$$

где $\varepsilon>0$. Так как для $T_n(t)$ существует среднее значение, то можно указать такое число $T(\varepsilon)$, что при $T_1,\,T_2\geq T(\varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{T_1}\int\limits_a^{a+T_1}T_n(t)dt-\frac{1}{T_2}\int\limits_a^{a+T_2}T_n(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда

$$\left|\frac{1}{T_1}\int\limits_a^{a+T_1}f(t)dt-\frac{1}{T_2}\int\limits_a^{a+T_2}f(t)dt\right|\leq\frac{1}{T_1}\int\limits_a^{a+T_1}|f(t)-T_n(t)|dt+$$

$$+\left|\frac{1}{T_1}\int\limits_a^{a+T_1}T_n(t)dt-\frac{1}{T_2}\int\limits_a^{a+T_2}T_n(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{T_2}\int\limits_a^{a+T_2}|f(t)-T_n(t)|dt<\varepsilon$$

при $T_1,\,T_2\geq T(\varepsilon)$. Последнее неравенство показывает, что равномерно по a существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_a^{a+T}f(t)dt=\langle f(t)\rangle.$$

Покажем, что этот предел не зависит от a:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_a^{a+T}f(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^{T}f(t)dt.$$

Так как $|f(t)|\leq M<\infty$, то при $a>0,T>0$ имеем

$$\frac{1}{T}\left|\int\limits_a^{a+T}f(t)dt-\int\limits_0^{T}f(t)dt\right|=\frac{1}{T}\left|\int\limits_T^{a+T}f(t)dt-\int\limits_0^{a}f(t)dt\right|\leq\frac{2aM}{T}.$$

Отсюда вытекает требуемое равенство.

Пусть $f(t)$ - периодическая функция с периодом ω. Представим вещественное число T в виде $T = n\omega + \alpha_n$, где n - целое, а α_n удовлетворяет неравенству

$$0 \le \alpha_n \le \omega.$$

Когда $T \to \infty$, то $n \to \infty$. Вычислим среднее значение функции f(t):

$$\langle f(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\omega+\alpha_n}\int_0^{n\omega+\alpha_n} f(t)dt =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\omega+\alpha_n}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\int_{i\omega}^{(i+1)\omega} f(t)dt + \int_{n\omega}^{n\omega+\alpha_n} f(t)dt\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\omega+\alpha_n}\left\{n\int_0^{\omega} f(t)dt + \int_0^{\alpha_n} f(t)dt\right\} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(t)dt.$$

Таким образом, для периодических функций введенное среднее значение совпадает с обычным средним значением периодической функции.

Среднее значение обладает следующими свойствами:

а) $\langle cf(t)\rangle = c\langle f(t)\rangle$ (c=const),

б) $\langle (f(t)+g(t))\rangle = \langle f(t)\rangle + \langle g(t)\rangle$,

в) Если последовательность пп функций $f_1(t), \ldots, f_n(t), \ldots$ сходится равномерно при $t \in \mathcal{R}$ к пп функции $f(t)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n(t)\rangle = \langle f(t)\rangle.$$

Существование среднего значения позволяет построить для пп функции ряд Фурье. Пусть f(t) - пп функция. Так как при любом действительном λ функция $e^{i\lambda t}$ - периодическая, то произведение $f(t)e^{i\lambda t}$ - пп функция. Поэтому существует среднее значение

$$a(\lambda) = \langle f(t)e^{i\lambda t}\rangle.$$

Фундаментальное значение имеет тот факт, что функция $a(\lambda)$ может отличаться от нуля самое большее только для счетного множества значений λ. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ называются показателями Фурье, а числа $a(\lambda_1), \ldots, a(\lambda_n), \ldots$ - коэффициентами Фурье функции f(t).

Итак, каждой пп функции $f(t)$ сопоставляется ряд Фурье:

$$f(t) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n t}.$$

Над рядами Фурье можно производить формальные операции. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ - пп функции и

$$f(t) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n t} = \sum_\lambda a(\lambda)e^{i\lambda t},$$

$$g(t) \sim \sum_n b_n e^{i\mu_n t} = \sum_\lambda b(\lambda) e^{i\lambda t}.$$

Тогда:

1') $kf(t) \sim \sum_n k a_n e^{i\lambda_n t} \quad (k - const)$,
2') $e^{i\lambda t} f(t) \sim \sum_n a_n e^{i(\lambda_n + \lambda)t}$,
3') $f(t+\alpha) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda\alpha} e^{i\lambda_n t} \quad (\alpha \in \mathcal{R})$,
4') $\bar{f}(t) \sim \sum_n \bar{a}_n e^{-i\lambda_n t}$,
5') $f(t) + g(t) \sim \sum_\lambda (a(\lambda) + b(\lambda)) e^{i\lambda t}$,
6') $f(t) \cdot g(t) \sim \sum_n c_n e^{i\nu_n t}$, где

$$c_n = \sum_{\lambda_p + \mu_q = \nu_n} a_p b_q.$$

Если производная пп функции $f(t)$ является пп функцией, то ее ряд Фурье получается из ряда Фурье $f(t)$ почленным дифференцированием. Если неопределенный интеграл пп функции $f(t)$ является пп функцией, то

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt \sim c + \sum_n \frac{a_n}{i\lambda_n} e^{i\lambda_n t} \quad (\lambda_n \neq 0).$$

Остановимся подробнее на интегрировании пп функций. Если $f(t)$ - периодическая функция с ненулевым средним значением, то для нее справедливо равенство

$$\int_0^t f(t)dt = \langle f \rangle t + g(t),$$

где $g(t)$ - периодическая функция. Для пп функций последнее равенство, вообще говоря, не имеет места. Существуют пп функции с нулевым средним значением, интеграл от которых неограничен и, следовательно, не является пп функцией. Примером такой функции является функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{i\frac{1}{k^2}t}.$$

Мы будем называть пп функцию $f(t)$ правильной, если справедливо равенство

$$\int_0^t f(t)dt = \langle f \rangle t + g(t),$$

где $g(t)$ - пп функция. Функция $f(t)$ будет правильной, если она является тригонометрическим многочленом. Если показатели Фурье пп функции отделены от нуля $\lambda_n \geq \delta > 0$, то такая функция также будет правильной.

Если существует конечное множество чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ такое, что каждый показатель Фурье пп функции является линейной комбинацией этих чисел

$$\lambda_n = n_1\omega_1 + \cdots + n_m\omega_m,$$

где $n_1, \ldots, n_m$ - целые числа, то эта пп функция называется квазипериодической. Квазипериодические функции можно получать из периодических функций многих переменных. Например, пусть $F(x, y)$ - функция периодическая по каждой из переменных с периодом 2π. Тогда $F(\omega_1 t, \omega_2 t)$ - квазипериодическая функция, если числа ω_1, ω_2 несоизмеримы.

Литература

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости.- М.: Наука.- 1967.- 472 с.
2. Левитан Б.М. Почти-периодические функции.- М: Гостехиздат.- 1953.- 396 с.