Маятниковые системы с колеблющимся подвесом

Мы применим теорему об усреднении на бесконечном интервале к исследованию устойчивости состояний равновесия маятниковых систем с колеблющимся подвесом. Опишем соответствующий результат (см. [6,7,35].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t,x), \qquad (A)$$

где x-n-мерный вектор, ε - малый параметр. Вектор-функция $f(t,x)$ определена при $t \in (-\infty,\infty)$ и x изменяющемся в некоторой ограниченной области n-мерного пространства. Правые части системы (A) пропорциональны малому параметру. Согласно терминологии, введенной Н.Н. Боголюбовым, такие системы называются системами в стандартной форме. К исследованию систем в стандартной форме приводят многие прикладные задачи.

Если существует среднее значение

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t,\xi)dt = f_0(\xi),$$

то системе (A) можно сопоставить усредненную систему

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon f_0(\xi). \qquad (B)$$

Пусть алгебраическая система уравнений

$$f_0(\xi) = 0$$

имеет решение $\xi = \xi_0$, которое, очевидно, будет стационарным решением системы (B). Пусть $f(t,x)$ является либо периодической функцией переменной t с периодом T, либо ее компоненты являются тригонометрическими многочленами переменной t вида

$$\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\cos\nu_k t + \beta_k\sin\nu_k t,$$

где α_k, β_k, ν_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ - произволные вещественные числа. В последнем случае будем говорить, что $f(t, x)$ зависит от t почти периодически.

Введем в рассмотрение линеаризованную на стационарном решении ξ_0 систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = X'(\xi_0).$$

Оказывается, что в случае, когда все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то система (A) при достаточно малых ε имеет единственное асимптотически устойчивое периодическое или почти периодическое решение, которое близко к стационарному решению усредненной системы. Если все собственные значения матрицы A имеют положительные вещественные части, то существующее решение системы (A) неустойчиво.

Отметим, что почти периодическое решение системы (A), вообще говоря, будет не тригонометническим многочленом, а более общей почти периодической функцией, которую с любой точностью можно аппроксимировать тригонометрическим многочленом.

Схема применения этой теоремы состоит в следующем. Уравнения движения исследуемой системы записываются в форме Лагранжа. Затем мы переходим к гамильтоновой форме записи уравнений движения. Вводится малый параметр и делается переход к быстрому времени. Получаем систему в стандартной форме (правые части системы пропорциональны малому параметру). Вопрос об устойчивости состояний равновесия решается по усредненным уравнениям первого приближения.

1. История и физические применения

Стабилизирующий эффект вибрации подвеса маятника стал известен уже в 1908 году. Стефенсон [56] показал, что можно стабилизировать верхнее состояние равновесия маятника с вертикально осциллирующим подвесом. Он исследовал случай маятника, у которого подвес получает ряд импульсов, поддерживающих его движение с постоянной скоростью вдоль линии, составляющей малый угол со стержнем маятника. Стефенсон определил "среднее"движение, которое устойчиво. Он также получил условия устойчивости верхнего состояния равновесия маятника, точка подвеса которого совершает быстрые вертикальные простые гармонические колебания. Аналогичным методом Стефенсон [57]

определил условия устойчивости двух и трех стержней, которые связаны вместе в концах, если точка подвеса совершает быстрые вертикальные колебания.

Теория уравнения Матье в этой задаче была использована в статьях Ван дер Поля [62], Стретта [58]. Ван дер Поль и Стретт [63] (см. также Айнс [43]) рассмотрели проблему устойчивости решений уравнения Матье и получили диаграмму устойчивости решений в плоскости двух параметров. Они также обсудили условия, при которых колебательное воздействие может сделать устойчивой систему, которая вначале была неустойчива. Гирш [42] рассмотрел задачу о движении маятника, точка подвеса которого совершает малые колебания высокой частоты в плоскости маятника. Эрдеий в 1934 году (см. [38]) провел полное исследование малых колебаний маятника с периодически колеблющимся подвесом. Он учел затухание и использовал теорию Флоке и теорию уравнения Хилла.

Ловенстерн [51] в 1932 году изучил эффект высокочастотных движений с малой амплитудой, наложенных на один класс динамических систем и получил впервые результаты некоторой общности. Он нашел уравнения движения для общих Лагранжевых систем, которые подвергаются быстрым колебаниям, и уравнения для малых колебаний около состояний равновесия. Ловенстерн рассмотрел только периодические возбуждения.

Анализ задачи об устойчивости верхнего состояния равновесия маятника с колеблющимся подвесом в линейном приближении был изложен в книге [44] в издании 1950 года.

Капица [16, 17] исследовал проблему движения маятника с колеблющейся точкой подвеса в нелинейной постановке. Капица изучил устойчивость обращенного маятника с помощью введенного им понятия эффективного потенциала (см. также Ландау и Лифшиц [22], с. 93–95). Он также выдвинул идею применить вибрационную стабилизацию к другим механическим объектам, которые отличаются от маятника, таким, например, как большие молекулы.

Боголюбов [6] получил строгое математическое доказательство устойчивости верхнего состояния равновесия маятника с вертикально осциллирующим подвесом. Он предположил, что амплитуда вибраций мала, а частота вибраций велика. Доказательство основывается на очень интересном преобразовании, которое позволяет получить ответ в первом приближении метода усреднения.

Богданов (Bogdanoff [33]) обобщил результаты Ловенстерна на случай малых, быстрых квазипериодических параметрических возбуждений, но его

анализ ограничивается линейными уравнениями. Богданов и Ситрон [34] продемонстрировали на эксперименте различные эффекты в поведении маятника с осциллирующим подвесом.

Хемп и Сетна в [41] рассмотрели нелинейные динамические системы с параметрическими возбуждениями. Проведен анализ влияния “быстрых" параметрических возбуждений, а также исследован эффект одновременного воздействия "медленных" и "быстрых" параметрических возбуждений. Рассмотрен случай, когда некоторые из частот "быстрых"параметрических возбуждений близки друг другу (см. также [52].

Бурд, Забрейко, Красносельский, Колесов в [10] (см. также [20]) изучили проблему бифуркации почти периодических колебаний из верхнего состояния равновесия маятника с вертикально осциллирующим подвесом. Бурд [8] исследовал проблему бифуркации почти периодических колебаний из верхнего и нижнего состояний равновесия маятника, когда закон движения подвеса является почти периодической функцией с двумя частотами, близкими друг другу.

Леви [45] нашел топологическое доказательство стабилизации верхнего состояния равновесия маятника с вертикально осциллирующим подвесом (см. также [46]). Он (см. [47, 48]) дал также очень простое физическое объяснение стабилизации верхнего состояния равновесия маятника вибрациями подвеса. Основной момент его статей - это наблюдение, что за стандартной процедурой усреднения лежат некоторые простые геометрические факты. Открытие устойчивых π-кинков в уравнении синус-Гордон под действием быстро осциллирующей силы (см. [64, 65]) основывается на той же идее.

Идея поднятия заряженных частиц в осциллирующем электрическом поле ("ловушка Пола") восходит к 1958 году. (см. [52, 53]). За эту работу Пол (Paul) получил Нобелевскую премию в 1989. Открытию ловушки Пола предшествовала идея сильной фокусировки в синхротронах. (см. [37, 50]).

Недавно (см. [55]) было представлено новое применение таких стабилизационных механизмов к производству ярких солитонов в двумерном кондесате Бозе - Эйнштейна (под “ярким"солитоном подразумевается устойчивая уединенная волна, плотность которой больше, чем плотность кондесата).

Отметим еще работы Зеньковской, Симоненко, Шлейкеля, в которых исследуется влияние высокочастотных вибрации на возникновение конвекции в жидкости (см. [13–15]).

Описанию удивительных явлений, происходящих при действии вибраций на нелинейные механические системы, посвящена книга Блехмана “Вибрационная механика"[3]. К ним автор относит изменение состояния системы под воздействием быстрых вибраций, изменение физико-механических свойств и характеристик под действием вибрации по отношению к медленным воздействиям, трансформация положений равновесия, в частности их стабилизация и дестабилизация под действием вибрации, изменение вследствие вибрации частот свободных колебаний системы, вибрационное поддержание вращения и самосинхронизация неуравновешенных роторов. Блехман предложил общий подход к описанному кругу явлений, который он назвал "вибрационной механикой".

Недавно возобновился интерес к использованию высокочастотных вибраций для управления низкочастотными свойствами структур, т.е. их равновесными состояниями, устойчивостью, эффективными натуральными частотами и амплитудами вибраций [32,36, 39, 40, 59, 60].

Отметим еще работы Юдовича [29–31], посвященные вибродинамике систем со связями и книгу Стрижак [26], посвященную методам исследования маятниковых систем.

2. Уравнение движения простого маятника с вибрирующим подвесом

Речь идет об одной из простейших колебательных систем: Материальная точка массы m, связанная невесомым твердым стержнем длины l (называемой длиной маятника) с неподвижной точкой (точкой подвеса). Очевидно, траектория движения материальной точки будет дугой окружности. Можно также говорить о физическом маятнике, представляющем собой твердое тело, которое может вращаться в определенной вертикальной плоскости вокруг своей точки подвеса.

Предполагается, что среда, в которой движется маятник, создает сопротивление, пропорциональное скорости, а точка подвеса периодически или почти периодически колеблется.

Мы сначала предположим, что точка подвеса маятника может двигаться только вдоль вертикальной оси. Уравнения движения маятника удобно записать в гамильтоновой форме. Введем следующие обозначения: m - масса маятника, l - длина маятника, c - коэффициент демпфирования, g - ускорение силы тяжести, q - угловое отклонение маятника от вертикали, функция $f(t)$ задает закон движения точки подвеса. Декартовы координаты маятника $x = l\sin q$, $y =$

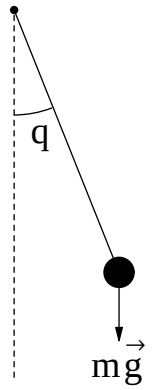


Рис. 1:

$l\cos q + f(t)$. Кинетическая энергия маятника определяется формулой

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m[l^2\dot{q}^2 + 2l\dot{q}\dot{f}\sin q + \dot{f}^2],$$

где $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{q}$, $\dot{f}$ - производные функций $x(t)$, $y(t)$, $q(t)$, $f(t)$ соответственно, потенциальная энергия

$$V(q) = -mgl\cos q,$$

диссипативная функция

$$R(\dot{q}) = cl^2\dot{q}^2.$$

Уравнение движения в форме Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad L = T - V.$$

Поэтому уравнение движения маятника выглядит следующим образом

$$\ddot{q} + \frac{2c}{m}\dot{q} + \left[\frac{g}{l} + \frac{\ddot{f}}{l}\right]\sin q = 0. \tag{1}$$

Это уравнение и преобразуем к гамильтоновой форме. Обобщенный кинетический момент равен

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m(l^2\dot{q} + l\dot{f}\sin q).$$

Обращая последнее равенство, получим

$$\dot{q} = \frac{1}{ml^2}p - \frac{\dot{f}}{l}\sin q. \tag{2}$$

Дифференцируем (2) и используем уравнение (1). Тогда приходим к равенству

$$\dot{p} = ml^2\left[-\frac{2c}{ml^2}p + \frac{2c}{ml}\dot{f}\sin q + \frac{\dot{f}}{ml^3}p\cos q - \frac{\dot{f}^2}{l^2}\sin q\cos q\right].$$

Окончательно получим искомую систему уравнений

$$\begin{array}{l} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{ml^2}p - \frac{\dot{f}}{l}\sin q, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{2c}{m}p + [2cl\sin q + \frac{p}{l}\cos q]\dot{f} - mgl\sin q - \frac{m}{2}\dot{f}^2\sin 2q. \end{array} \tag{3}$$

3. Введение малого параметра и приведение уравнений к стандартной форме

Мы будем рассматривать вынужденные перемещения $f(t)$ точки подвеса, которые задаются тремя различными законами. Во-первых, определяемые почти периодическим многочленом с помощью формулы

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cos\nu_k t + \beta_k \sin\nu_k t, \tag{4}$$

где α_k, β_k, ν_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ - вещественные числа. Будем предполагать, что амплитуды α_k, β_k достаточно малы, а частоты ν_k достаточно велики в следующем смысле. Существует такой малый положительный параметр ε, что

$$\alpha_k = \varepsilon a_k,\ \beta_k = \varepsilon b_k,\ \nu_k = \frac{\omega_k}{\varepsilon},$$

где a_k, b_k, ω_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ - величины порядка $\mathrm{O}(1)$ относителдьно ε. Тогда $f(t)$ можно записать в виде

$$f(t) = \varepsilon\sum_{k=1}^{N} a_k\cos\omega_k\frac{t}{\varepsilon} + b_k\sin\omega_k\frac{t}{\varepsilon} = \varepsilon\phi(\frac{t}{\varepsilon}).$$

Во-вторых, закон, определяемый периодической функцией

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \alpha \sin(2k-1)\nu t. \tag{5}$$

Вводим малый параметр ε, полагая $\alpha = \varepsilon a$, $\nu = \frac{\omega}{\varepsilon}$. Тогда $f(t)$ запишется в виде

$$f(t) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} a \sin(2k-1)\omega \frac{t}{\varepsilon} = \varepsilon \phi(\frac{t}{\varepsilon})$$

В-третьих, синусоидальный закон вибраций подвеса

$$f(t) = \alpha \sin \nu t. \tag{6}$$

Полагая $\alpha = \varepsilon a$, $\nu = \frac{\omega}{\varepsilon}$, получим

$$f(t) = \varepsilon a \sin \frac{\omega}{\varepsilon} t = \varepsilon \phi(\frac{t}{\varepsilon})$$

Отметим, что в случае, когда $f(t)$ определяется формулой (5), ускорение вынужденного перемещения - обобщенная периодическая функция $\ddot{f}(t)$, которой соответствует ряд Фурье

$$\ddot{f}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \sin(2k-1)t.$$

Поэтому в уравнение (1) входит обобщенная периодическая функция в качестве коэффициента. Но в систему (3) входит только функция $\dot{f}(t)$, которая является кусочно-непрерывной периодической функцией.

Отметим, что другие пути исследования параметрического резонанса в системах, содержащих обобщенные периодические функции, были предложены в работах [22] (см. также [2]) и книге [24].

Перейдем в системе (2) к быстрому времени τ по формуле $\varepsilon\tau = t$ и обозначим дифференцирование по τ точкой. Получим

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \varepsilon \left(\tfrac{1}{ml^2} p - \tfrac{1}{l} \dot{\phi}(\tau) \sin q \right), \\ \dot{p} &= \varepsilon \left[-mgl \sin q - \tfrac{2c}{m} p + \left(2cl \sin q + \tfrac{p}{l} \cos q \right) \dot{\phi}(\tau) - m\dot{\phi}^2(\tau) \cos q \sin q \right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, в описанных выше предположениях система уравнений движения маятника имеет стандартную форму.

4. Исследование устойчивости состояний равновесия

Усредненная система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \varepsilon\tfrac{1}{ml^2}\eta,\\ \dot{\eta} &= \varepsilon[-mgl\sin\xi - \tfrac{2c}{m}\eta - \tfrac{m}{2}\langle\dot{\phi}^2(\tau)\rangle\sin 2\xi],\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\langle\dot{\phi}^2(\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \dot{\phi}^2(\tau)d\tau.$$

У системы (8) три стационарных решения

$$I-(0,0),\quad II-(\pi,0),\quad III-(-\arccos\left(-\frac{gl}{\langle\dot{\phi}^2(\tau)\rangle}\right),0).$$

Последнее стационарное решение существует только при выполнении неравенства

$$gl \le \langle\dot{\phi}^2(\tau)\rangle. \tag{9}$$

Система (8) также имеет стационарные решения I и II - нижнее и верхнее состояния равновесия маятника.

Исследуем устойчивость стационарных решений системы (8). Для решения I линеаризованная система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \varepsilon\tfrac{1}{ml^2}\varphi,\\ \dot{\varphi} &= \varepsilon[-mgl\psi - \tfrac{2c}{m}\varphi - m\langle\dot{\phi}^2(\tau)\rangle\psi],\end{aligned} \tag{10}$$

а для решения II (полагаем $\sigma = \xi - \pi$)

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \varepsilon\tfrac{1}{ml^2}\delta\\ \dot{\delta} &= \varepsilon[mgl\sigma - \tfrac{2c}{m}\delta - m\langle\dot{\phi}^2(\tau)\rangle\sigma].\end{aligned} \tag{11}$$

Легко видеть, что у матрицы системы (10) след (сумма диагональных элементов) отрицательный, а определитель - положительный. Поэтому нулевое состояние равновесия усредненной системы асимптотически устойчиво. Из теоремы об усреднения на бесконечном промежутке вытекает, что при достаточно малых ε нижнее состояние равновесия маятника асимптотически устойчиво.

У матрицы системы (11) след отрицательный, а определитель положительный, если выполняется неравенство

$$gl < \langle \dot{\phi}^{r2}(\tau) \rangle.$$

Следовательно, при выполнении этого неравенства состояние равновесия $(0, \pi)$ усредненной системы асимптотически устойчиво. Из теоремы об усреднении следует, что при достаточно малых ε асимптотически устойчиво верхнее состояние равновесия маятника.

Отметим, что неравенство, определяющее устойчивость верхнего состояния равновесия, в исходном времени t имеет вид

$$gl < \langle \dot{f}^2 \rangle.$$

Для почти периодического закона движения точки подвеса (4) получаем

$$\langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (a_k^2 + b_k^2)\omega_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)\nu_k^2.$$

Для периодической функции (5) имеем

$$\langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a^2\omega^2 \frac{1}{(2k-1)^2} = a^2\omega^2 \frac{\pi^2}{16},$$

а для функции (6) получаем

$$\langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle = \frac{a^2\omega^2}{2}.$$

Поэтому верхнее состояние равновесия маятника асимптотически устойчиво при выполнении неравенства

$$\sum_{k=1}^{N} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)\nu_k^2 > 2gl \tag{12}$$

для функции (4), при выполнении неравенства

$$a^2\omega^2 \frac{\pi^2}{8} > 2gl \tag{13}$$

для функции (5) и при выполнении неравенства

$$a^2\omega^2 > 2gl \tag{14}$$

для функции (6).

Сравнение неравенств (13) и (14) показывает, что область устойчивости верхнего состояния равновесия маятника при законе вибрации точки подвеса, определяемом формулой (5) шире, чем при синусоидальном законе вибрации точки подвеса. Неравенство (14) в исходных переменных имеет вид

$$\alpha^2\nu^2 > 2gl. \tag{15}$$

Именно неравенство (15) как условие стабилизации верхнего состояния равновесия маятника было получено различными методами (см. Стефенсон [56], Эрдеий [38], Капица [16, 17], Боголюбов [6]. При отсутствии вибраций точки подвеса, как известно, нижнее состояние равновесия маятника устойчиво, а верхнее состояние равновесия неустойчиво. Предыдущий анализ привел нас к следующему результату: если точка подвеса вибрирует по синусоидальному закону и частота вибраций точки подвеса маятника достаточна велика, а амплитуда вибраций достаточно мала, то верхнее состояние равновесия маятника может стать устойчивым. Этот результат многократно проверен экспериментально.

Напомним, что этот результат был установлен Стеффенсоном еще в 1908 году, и его строгое обоснование с помощью метода усреднения было получено Н.Н. Боголюбовым. Здесь мы рассмотрели более общие законы движения точки подвеса и получили аналогичные результаты.

Для стационарного решения III усредненной системы, которое существует при выполнении неравенства (9), линеаризованная система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot\varphi &= \varepsilon\tfrac{1}{ml^2}\psi,\\ \dot\psi &= \varepsilon[(-mgl\cos\xi_0 - m\langle\dot\phi^2(\tau)\rangle\cos 2\xi_0)\varphi - \tfrac{2c}{m}\psi],\end{aligned}$$

где

$$\cos\xi_0 = -\frac{gl}{\langle\phi'^2(\tau)\rangle}.$$

Легко видеть, что нулевое решение этой системы при выполнении неравенства (9) неустойчиво. Из теоремы об усркднении следует, что стационарному решению III усредненной системы при достаточно малых ε соответствует

неустойчивое почти периодическое или периодическое решение (в зависимости от выбора закона вибрации точки подвеса) системы (7).

Сделаем еще некоторые замечания к рассмотренной задаче. Усредненную систему (8) можно записать в виде одного дифференциального уравнения второго порядка. Это уравнение в исходном времени t имеет вид (для синусоидального закона вибраций точки подвеса)

$$\ddot{\xi} + \frac{2c}{m}\dot{\xi} + \left[\frac{g}{l} + \frac{\alpha^2\nu^2}{2l^2}\cos\xi\right]\sin\xi = 0. \tag{16}$$

Как отметили Боголюбов и Митропольский [7] уравнение (6) определяет колебательную систему, которая подобна маятнику с неподвижной точкой подвеса, но восстанавливающая сила пропорциональна не $\sin\xi$, а $[\frac{g}{l} + \frac{\alpha^2\nu^2}{2l^2}\cos\xi]\sin\xi$. Частота малых колебаний без учета затухания будет равна $\frac{g}{l} + \frac{\alpha^2\nu^2}{2l^2}$.

5. Устойчивость верхнего состояния равновесия стержня с распределенной массой

Рассмотрим теперь маятник, масса которого распределена вдоль всего стержня. Обозначим длину стержня через L, а плотность через $\rho(y)$, $0 \le y \le L$. Произведение массы m на расстояние до центра тяжести стержня равно

$$ml = \int_0^L \rho y dy,$$

а момент инерции -

$$J = \int_0^L \rho y^2 dy.$$

Кинетическая энергия маятника с точностью до членов, не содержащих q, $\dot{q}$ определяется формулой

$$T = \frac{\dot{q}^2}{2}\int_0^L \rho y^2 dy + \dot{q}\dot{f}\sin q \int_0^L \rho y dy,$$

а потенциальная энергия равна

$$V = -g\cos q \int\limits_0^L \rho y dy.$$

С учетом диссипации получаем уравнение маятника в форме Лагранжа

$$\ddot{q} + c\dot{q} + \gamma[g + \ddot{f}]\sin q = 0.$$

где

$$\gamma = \frac{\int\limits_0^L \rho y dy}{\int\limits_0^L \rho y^2 dy}.$$

Это уравнение отличается от уравнения (1) тем, что оба слагаемых в последнем члене уравнения умножены на множитель γ. Поэтому, если функция $f(t)$ определяет закон вынужденного перемещение точки подвеса, то условие устойчивости верхнего состояния равновесия стержня принимает вид неравенства

$$g\gamma < \langle \dot{f}^2 \rangle.$$

Будем предполагать, что взят сплошной однородный стержень длины L. Линейная плотность равна $\rho = mL^{-1}$. В этом случае

$$\gamma = \frac{\int\limits_0^L \rho y dy}{\int\limits_0^L \rho y^2 dy} = \frac{3}{2}.$$

Условие устойчивости верхнего состояния равновесия стержня принимает вид

$$\frac{2}{3} gl < \langle \dot{f}^2 \rangle.$$

Из этого неравенства следует, что однородный стержень длины L легче удержать около верхнего положения равновесия, чем маятник длины L с массой расположенной на конце маятника.

6. Плоские вибрации точки подвеса

Рассмотрим теперь маятник с колеблющимся подвесом при более общих предположениях о движении точки подвеса. Пусть точка подвеса совершает колебания одновременно в горизонтальном и вертикальном направлениях по закону

$$x = s(t),\ y = r(t).$$

Рассмотрим случай, когда она совершает синусоидальные гармонические колебания с амплитудой α и частотой ν вдоль прямой, составляющей угол θ с осью y. Тогда

$$s(t) = \alpha \sin \nu t \sin \theta,$$
$$r(t) = \alpha \sin \nu t \cos \theta.$$

Декартовы координаты маятника $x = l \sin q + s(t)$, $y = -l \cos q + r(t)$. Кинетическая знергия определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}[l^2\dot{q}^2 + 2l\dot{q}(\dot{s}\cos q + \dot{r}\sin q) + \dot{s}^2 + \dot{r}^2],$$

потенциальная энергия имеет вид $V(q) = -mgl \sin q$, а диссипативная функция - $R(\dot{q}) = cl^2\dot{q}^2$; уравнение движения в форме Лагранжа

$$\ddot{q} + \frac{2c}{m}\dot{q} + \left[\frac{g}{l} + \frac{\ddot{r}}{l}\right] \sin q + \frac{\ddot{s}}{l} \cos q = 0.$$

Переходим, как в п.3, к системе в гамильтоновой форме

$$\begin{array}{l} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{ml^2}p - \frac{\dot{s}}{l}\cos q - \frac{\dot{r}}{l}\sin q \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{2c}{m}p + (2cl\cos q - \frac{p}{l}\sin q)\dot{s} + (2cl\sin q + \frac{p}{l}\cos q)\dot{r} + \\ +\frac{m}{2}(\dot{s}^2 - \dot{r}^2)\sin 2q - m\dot{s}\dot{r}\cos 2q - mgl\sin q. \end{array} \qquad (17)$$

Предполагаем, что существует такой малый положительный параметр ε, для которого $\alpha = \varepsilon a$, $\nu = \frac{\omega}{\varepsilon}$. Тогда

$$s(t) = \varepsilon a \sin \frac{\omega}{\varepsilon} t \sin \theta, \quad r(t) = \varepsilon a sin \frac{\omega}{\varepsilon} t \cos \theta.$$

Переходя к быстрому времени $\varepsilon\tau = t$ и обозначая дифференцирование по τ точкой, получим

$$\begin{array}{l} \dot{q} = \varepsilon\left[\frac{1}{ml^2}p - \frac{\dot{s}(\tau)}{l}\cos q - \frac{\dot{r}(\tau)}{l}\sin q\right], \\ \dot{p} = \varepsilon\left[-\frac{2c}{m}p + \dot{s}(\tau)(2cl\cos q - \frac{p}{l}\sin q) + \dot{r}(\tau)(2cl\sin q + \frac{p}{l}\cos q) + \right. \\ \left. \frac{m}{2}(\dot{s}^2(\tau) - \dot{r}^2(\tau))\sin 2q - m\dot{s}(\tau)\dot{r}(\tau)\cos 2q - mgl\sin q\right]. \end{array} \qquad (18)$$

Усредненная система имеет вид

$$\begin{array}{l}\dot\xi = \varepsilon\frac{1}{ml^2}\eta,\\ \dot\eta = \varepsilon\left[-\frac{2c}{m}\eta - mgl\sin\xi + \frac{m}{2}(\langle\dot s^2(\tau)\rangle - \langle\dot r^2(\tau)\rangle)\sin 2\xi - \right.\\ \left. -m\langle(\dot s(\tau)\dot r(\tau)\rangle\cos 2\xi\right].\end{array} \tag{19}$$

Очевидно,

$$\langle\dot s^2(\tau)\rangle = \frac{a^2\omega^2}{2}\sin^2\theta = \frac{\alpha^2\nu^2}{2}\sin^2\theta, \quad \langle\dot r^2(\tau)\rangle = \frac{\alpha^2\nu^2}{2}\cos^2\theta,$$

$$\langle\dot s(\tau)\dot r(\tau)\rangle = \frac{\alpha^2\nu^2}{4}\sin 2\theta.$$

Система (19) может иметь много стационарных решений. Например, она имеет стационарное решение $(\frac{\pi}{2}, 0)$, если

$$\frac{\alpha^2\nu^2}{4}\sin 2\theta = gl. \tag{20}$$

Линеаризованная на этом состоянии равновесия система имеет вид

$$\begin{array}{l}\dot\xi = \varepsilon\frac{1}{ml^2}\eta,\\ \dot\eta = \varepsilon(m\xi\cos 2\theta - \frac{2c}{m}\eta).\end{array}$$

Следовательно, состояние равновесия $(\frac{\pi}{2}, 0)$ асимптотически устойчиво при выполнении неравенства

$$\cos 2\theta < 0. \tag{21}$$

Из теоремы об усреднении следует, что при достаточно малых ε и выполнении условий (20), (21) система (18) имеет асимптотически устойчивое периодическое решение, которое находится в малой окрестности точки $(\frac{\pi}{2}, 0)$, т.е. маятник будет совершать устойчивые периодические колебания в окрестности горизонтального положения маятника.

Если закон движения точки подвеса определяется формулами

$$\begin{array}{l}s(t) = g(t)\sin\theta,\\ r(t) = g(t)\cos\theta,\end{array}$$

где

$$g(t) = \varepsilon a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\frac{\omega}{\varepsilon}t}{(2k+1)^2},$$

то усредненное уранение имеет стационарное решение $(\frac{\pi}{2}, 0)$ при выполнении равенства

$$a^2\omega^2\pi^2 \sin 2\theta = 32gl.$$

Это решение асимптотически устойчиво, если выполняется неравенство (21).

7. Маятник с исчезающей во времени амплитудой колебаний точки подвеса

Напомним еще раз основной результат, относящийся к устойчивости верхнего состояния равновесия маятника с вибрирующим подвесом. Пусть точка подвеса математического маятника может свободно двигаться вдоль вертикальной оси и закон движения точки подвеса определяется формулой

$$f(t) = a \sin \omega t.$$

Если амплитуда колебаний точки подвеса a достаточно мала, а частота ω достаточно велика, то верхнее состояние равновесия маятника будет устойчивым, если выполняется неравенство

$$a^2\omega^2 > 2gl, \tag{22}$$

где l - длина маятника, g - ускорение свободного падения.

В этом пункте будет рассмотрен (см. [9, 11, 12]) вопрос об устойчивости верхнего состояния равновесия маятника в случае, когда закон движения точки подвеса задается формулой

$$f(t) = \frac{a}{t^{\alpha-1}} \sin \omega t^{\alpha}, \tag{23}$$

где a, ω, α - постоянные и $\alpha > 1$, т.е. амплитуда движения точки подвеса стремится к нулю при $t \to \infty$.

Как мы видели уравнение движения маятника с движущимся вдоль вертикальной оси подвесом имеет вид

$$\ddot{q} + \frac{2c}{m}\dot{q} + \left(\frac{g}{l} + \frac{1}{l}\ddot{f}\right) \sin q = 0, \tag{24}$$

где m - масса маятника, c - коэффициент демпфирования, $q(t)$ - угловое отклонение маятника от вертикали, $f(t)$ - закон движения подвеса. Нам снова

удобно записать уравнение движения в гамильтоновой форме. Соотвествующая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \tfrac{1}{ml^2}p - \tfrac{1}{l}\dot{f}\sin q, \\ \dot{p} &= -\tfrac{2c}{m}p + [2cl\sin q + \tfrac{p}{l}\cos q]\dot{f} - mgl\sin q - \tfrac{m}{2}\dot{f}^2\sin 2q. \end{aligned} \tag{25}$$

Система (25) имеет два стационарных решения $(0,0)$ и $(\pi,0)$ - нижнее и верхнее состояния равновесия маятника соответственно.

Исследуем устойчивость верхнего состояния равновесия маятника. Линеаризуя систему (25) на состоянии равновесия $(\pi,0)$, получаем линейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tfrac{1}{ml^2}x_2 + \tfrac{1}{l}\dot{f}x_1, \\ \dot{x}_2 &= -\tfrac{2c}{m}x_2 + [-2clx_1 + \tfrac{1}{l}x_2]\dot{f} + mglx_1 - \tfrac{m}{2}\dot{f}^2x_1. \end{aligned} \tag{26}$$

Изучим поведение решений этой системы при $t \to \infty$. Введем новое время τ по формуле

$$\tau = t^\alpha$$

и учтем, что во времени τ

$$\frac{df}{dt} = \alpha a\omega\cos\omega\tau + \frac{(1-\alpha)a}{\tau}\sin\omega\tau.$$

В результате получим систему $(z = (x_1, x_2))$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{1-\beta}}A_1(\tau)z + \frac{1}{\tau^{2-\beta}}F(\tau)z, \tag{27}$$

где $\beta = \frac{1}{\alpha} < 1$,

$$A_1(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{a\omega}{l}\cos\omega\tau & \frac{\beta}{ml^2} \\ -2a\omega cl\cos\omega\tau + mgl\beta - \frac{ma^2\cos^2\omega\tau}{\beta} & -\frac{2c\beta}{m} + \frac{a\omega\cos\omega\tau}{l} \end{pmatrix},$$

а вид матрицы $F(\tau)$ для дальнейшего несущественен. Следует только отметить, что элементы матрицы $F(\tau)$ являются ограниченными функциями при $0 < \tau_0 \le \tau < \infty$.

Предположим сначала, что $\alpha > 2$. Тогда $1-\beta > \frac{1}{2}$. В системе (27) выполним замену переменных

$$z = y + \frac{1}{\tau^{1-\beta}}Y_1(\tau)y, \tag{28}$$

где матрица $Y_1(\tau)$ определяется как матрица, элементы которой - периодические функции с нулевым средним значением, из уравнения

$$\frac{dY_1}{d\tau} = A_1(\tau) - B_1, \tag{29}$$

а постоянная матрица B_1 также подлежит определению. Очевидно, матрица B_1 должна быть составлена из средних значений элементов матрицы $A_1(\tau)$, т.е. B_1 имеет вид

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta}{ml^2} \\ mgl\beta - \frac{ma^2\omega^2}{2\beta} & -\frac{2c\beta}{m} \end{pmatrix}.$$

После замены (28) система (27) переходит при достаточно больших τ в систему

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{1-\beta}} B_1 y + \frac{1}{\tau^{2-2\beta}} G(\tau) y, \tag{30}$$

где элементы матрицы $G(\tau)$ - ограниченные при $0 < \tau_0 \le \tau < \infty$ функции. В исходном времени t система (30) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = \alpha B_1 y + \frac{\alpha}{t^{\alpha-1}} G(t) y. \tag{31}$$

В силу известной теоремы Левинсона [16, 43] линейно независимые решения системы (31) при $t \to \infty$ представимы в виде

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}(p_1 + o(1)), \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}(p_2 + o(1)), \tag{32}$$

где λ_1 и λ_2 - собственные значения матрицы αB_1, а p_1, p_2 - собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям. Легко видеть, что при выполнении неравенства

$$2gl < \alpha^2 a^2 \omega^2 \tag{33}$$

собственные значения матрицы αB_1 имеют отрицательные вещественные части. Поэтому, если выполнено неравенство (33), то нулевое решение системы (31) в силу формул (32) асимптотически устойчиво, а, следовательно, нулевое решение системы (27) асимптотически устойчиво. Отсюда следует, что при выполнении неравенства (33) нулевое решение системы (26) асимптотически устойчиво. В силу теоремы об устойчивости по первому приближению верхнее состояние равновесия маятника при $\alpha > 2$ и выполнении неравенства (33) асимптотически устойчиво.

Если $\frac{3}{2} < \alpha \leq 2$, то $\frac{1}{3} < 1 - \beta \leq \frac{1}{2}$. В этом случае. чтобы привести систему к форме, к которой применима теорема Левинсона, нужно вместо замены (28) сделать замену

$$z = y + \frac{1}{\tau^{1-\beta}} Y_1(\tau) y + \frac{1}{\tau^{2-2\beta}} Y_2(\tau) y, \tag{34}$$

где матрица $Y_1(\tau)$ определяется тем же уравнением (29), а матрица $Y_2(\tau)$ и постоянная матрица B_2 определяются из уравнения

$$\frac{dY_2}{d\tau} = A_1(\tau) Y_1(\tau) - B_2,$$

причем элементы матрицы $Y_2(\tau)$ - периодические функции с нулевым средним значением. Замена (32) переводит систему (27) в систему

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{1-\beta}} B_1 y + \frac{1}{\tau^{2-2\beta}} B_2 y + \frac{1}{\tau^{3-3\beta}} L(\tau) y, \tag{35}$$

где элементы матрицы $L(\tau)$ ограниченные при $\tau_0 \leq \tau < \infty$ функции. Простой подсчет показывает, что $B_2 = 0$ и поэтому для линейно независимых решений системы (35) во времени t справедливы асимптотические формулы (32). Следовательно, при $\frac{3}{2} < \alpha \leq 2$ и выполнении неравенства (33) нулевое решение системы (26) асимптотически устойчиво. При $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$ асимптотические формулы (32) могут измениться, но главный член асимптотики будет иметь тот же вид, что и в (32). Показатель α влияет на скорость сходимости решений к состоянию равновесия.

Таким образом, при движении точки подвеса математического маятника вдоль вертикальной оси по закону (23) и при выполнении неравенства (33) верхнее состояние равновесия маятника будет асимптотически устойчивым.

8. Многочастотные колебания подвеса маятника

В этом пункте предполагается, что закон движения подвеса маятника - это тригонометрический многочлен, и некоторые частоты этого многочлена близки друг к другу. Хемп и Сетна [41] рассмотрели случай двух частот.

Удобно уравнения движения маятника записать в гамильтоновой форме. Мы получим систему (п. 3)

$$\begin{aligned} \tfrac{dq}{dt} &= \tfrac{2}{ml^2} p - \tfrac{\dot{f}}{l} \sin q, \\ \tfrac{dp}{dt} &= -\tfrac{2c}{m} p + \left[2cl \sin q + \tfrac{p}{l} \cos q \right] \dot{f} - mgl \sin q - \tfrac{m}{2} \dot{f}^2 \sin 2q. \end{aligned} \tag{36}$$

Вынужденное движение подвеса определяется формулой

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cos v_k t + \beta_k \sin \nu_k t.$$

где α_k, β_k, $\nu_k (k = 1, 2, \ldots, N)$ - вещественные числа. Будем предполагать, что амплитуды α_k, β_k являются достаточно малыми, а частоты ν_k являются достаточно большими в следующем смысле. Существует малый параметр ε такой, что

$$\alpha_k = \varepsilon a_k, \quad \beta_k = \varepsilon b_k, \quad \nu_k = \frac{\omega_k}{\varepsilon},$$

где a_k, b_k, ω_k, $(k = 1, \ldots, N)$ имеют порядок $\mathrm{O}(1)$ по отношению к ε. Тогда $f(t)$ может быть записана в виде

$$f(t) = \varepsilon \sum_{k=1}^{N} a_k \cos \omega_k \frac{t}{\varepsilon} + b_k \sin \omega_k \frac{t}{\varepsilon} = \varepsilon \zeta(\frac{t}{\varepsilon}).$$

Мы будем говорить, что закон движения подвеса одночастотный, если все разности $\omega_k - \omega_j$, $j \neq k$ имеют порядок $\mathrm{O}(1)$ по отношению к ε. Если же некоторые из этих разностей имеют порядок $O(\varepsilon)$ по отношению к ε, то мы будем говорить, что закон движения подвеса многочастотный.

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда закон движения подвеса маятника является многочастотным.

В одночастотном случае (см. п.4) метод усреднения дает возможность получить хорошо известные результаты об устойчивости состояний равновесия $q = 0$ и $q = \pi$ системы (36) при достаточно малых ε. Нижнее состояние равновесия $q = 0$ всегда устойчиво, верхнее состояние равновесия $q = \pi$ будет устойчивым, если

$$M(\dot{\zeta}^2(\tau)) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\zeta}^2(\tau) d\tau > gl.$$

Это следует из анализа усредненных уравнений и соответствующих теорем об усреднении.

Усредненные уравнения имеют форму

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \varepsilon \tfrac{1}{ml^2} p, \\ \dot{p} &= \varepsilon \left[-mgl \sin q - \tfrac{2c}{m} p - \tfrac{m}{2} M(\dot{\zeta}^2(\tau)) \sin 2q \right]. \end{aligned}$$

В многочастотном случае усредненные уравнения будут в общем уравнениями с почти периодическими коэффициентами.

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда две частоты ω_1 и ω_2 связаны соотношением

$$\omega_2 - \omega_1 = \varepsilon\Delta, \quad \Delta > 0,\ \Delta = O(1). \tag{37}$$

Пусть для простоты

$$f(t) = \varepsilon\left[a_1 \cos\omega_1\frac{t}{\varepsilon} + a_2\cos\omega_2\frac{t}{\varepsilon}\right] = \varepsilon\zeta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Из (37) получим

$$\varepsilon\zeta(\frac{t}{\varepsilon}) = \varepsilon\left[a_1\cos\omega_1\frac{t}{\varepsilon} + a_2\cos\left(\omega_1+\varepsilon\Delta\right)\frac{t}{\varepsilon}\right]. \tag{38}$$

Введем быстрое время τ с помощью формулы $t = \varepsilon\tau$ и обозначим штрихом дифференцирование по отношению к τ. Тогда из системы (36) мы получим следующую систему в стандартной форме

$$\begin{array}{l} q' = \varepsilon\left(\frac{1}{ml^2}p - \frac{1}{l}\zeta'(\tau)\sin q\right) \\ p' = \varepsilon\left[-mgl\sin q - \frac{2c}{m}p + \left(\frac{p}{l}\cos q + 2cl\sin q\right)\zeta'(\tau) - \right. \\ \left. -m\zeta'^2(\tau)\cos q\sin q\right]. \end{array} \tag{39}$$

Учитывая выражение (38), мы получим в правой части системы (39) члены, содержащие быстрое время τ и медленное время $\varepsilon\tau$. Усредним систему (39) по быстрому времени τ. Получим усредненную систему

$$\begin{array}{l} q' = \varepsilon\frac{1}{ml^2}p, \\ p' = \varepsilon\left[-mgl\sin q - \frac{2c}{m}p - \frac{m}{4}p(\tau)\sin 2q\right], \end{array} \tag{40}$$

где $p(\tau) = \omega_1^2(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\Delta\tau)$. Усредненная система (40) может быть записана в виде уравнения второго порядка по отношению к переменной q. Это уравнение во времени t имеет форму

$$\ddot{q} + \frac{2c}{m}\dot{q} + \frac{g}{l}\sin q + \frac{p(t)}{4l^2}\sin 2q = 0, \tag{41}$$

где $p(t) = \nu_1^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\cos\Delta t)$. Из теорем 2.1.6 и 2.1.7 в [35] следует, что вопрос об устойчивости нижнего состояния равновесия маятника при

достаточно малых ε сводится к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения

$$\ddot{q} + \frac{2c}{m}\dot{q} + \frac{1}{2l^2}\left(2gl + p(t)\right) q = 0. \tag{42}$$

Для верхнего состояния равновесия маятника получим уравнение

$$\ddot{q} + \frac{2c}{m}\dot{q} + \frac{1}{2l^2}\left(-2gl + p(t)\right) q = 0. \tag{43}$$

Из анализа уравнения (43) следует, что движение подвеса маятника по закону, определяемому формулой (38), может привести к дестабитизации верхнего состояния равновесия маятника, которое было бы устойчиво, если бы частоты не были близки. Богданов и Ситрон [34] показали экспериметрально, что такие дестабилизационные эффекты быстрых параметрических возбуждений, у которых частоты близки друг к другу, имеют место.

Отметим также, что анализ уравнения (42) показывает, что близость двух частот может дестабилизировать нижнее состояние равновесия маятника.

Следовательно, колебания подвеса маятника под действием двух периодических сил с близкими частотами могут привести к новым эффектам в поведении маятника.

Пусть теперь вместо соотношения (37) удовлетворяется соотношение

$$\omega_2 - 2\omega_1 = \varepsilon\Delta. \tag{44}$$

Соотношение (44) не оказывает влияния на уравнения первого приближения. Следовательно, оно может оказать влияние на устойчивость состояний равновесия маятника, если проблема устойчивости не решается в первом приближении.

Пусть закон движения подвеса во времени τ определяется формулой

$$\zeta(\tau) = a_1 \cos\omega_1\tau + a_2 \cos\omega_2\tau + a_3 \cos\omega_3\tau$$

и

$$\omega_1 - \omega_2 = \varepsilon\Delta_1, \quad \omega_1 - \omega_3 = \varepsilon\Delta_2.$$

Тогда вопрос об устойчивости нмжнего и верхнего состояний равновесия маятника при достаточно малых ε сводится к иследованию устойчивости нулевого решения для уравнений (42) и (43) соответственно. Но теперь $p(t)$ будет почти периодической функцией.

Предположим теперь, что

$$\omega_1 - \omega_2 = \varepsilon^2 \Delta \quad (\Delta = const,\ \Delta > 0) \tag{45}$$

и

$$f(t) = \varepsilon \left[a_1 \cos \omega_1 \frac{t}{\varepsilon} + a_2 \cos(\omega_1 + \varepsilon^2 \Delta) \frac{t}{\varepsilon} \right] = \varepsilon \zeta \left(\frac{t}{\varepsilon} \right). \tag{46}$$

Снова перейдем к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$ в системе (36). Мы получим систему в стандартной форме, которая во времени $\tau_1 = \varepsilon^2 \tau$ будет сингулярно возмущенной системой. Усредняя систему (36) по быстрому времени τ. Получим усредненную сингулярно возмущенную систему во времени τ_1:

$$\begin{array}{l} \varepsilon q' = \frac{1}{ml^2} p, \\ \varepsilon p' = \left[-mgl \sin q - \frac{2c}{m} p - \frac{m}{4} b(\tau_1) \sin 2q \right], \end{array} \tag{47}$$

где

$$b(\tau_1) = \frac{1}{2} \omega_1^2 (a_1^2 + a_2^2) + a_1 a_2 \omega_1^2 \cos \Delta \tau_1.$$

Вырожденная система (мы полагаем $\varepsilon = 0$ в (47))

$$\begin{array}{l} \frac{1}{ml^2} p = 0, \\ -mgl \sin q - \frac{2c}{m} p - \frac{m}{4} b(\tau_1) \sin 2q = 0 \end{array}$$

имеет четыре решения:

$$\begin{array}{l} 1)\, q_1 \equiv 0,\ p_1 \equiv 0, \quad 2)\, q_2 \equiv \pi,\ p_2 \equiv 0, \\ 3,4)\, q_{3,4} = \pm \arccos \left(\frac{-gl}{b(\tau_1)} \right),\ p_{3,4} \equiv 0. \end{array}$$

Два последних решения существуют, если только удовлетворяется неравенство

$$\inf_{-\infty < \tau_1 < \infty} b(\tau_1) > gl. \tag{48}$$

Легко вычислить, что

$$\begin{array}{l} \inf_{-\infty<\tau_1<\infty} b(\tau_1) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}\omega_2^2 (a_1 - a_2)^2, & a_1 a_2 > 0, \\ \frac{1}{2}\omega_2^2 (a_1 + a_2)^2, & a_1 a_2 < 0, \end{array} \right. \\ \sup_{-\infty<\tau_1<\infty} b(\tau_1) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}\omega_2^2 (a_1 + a_2)^2, & a_1 a_2 > 0, \\ \frac{1}{2}\omega_2^2 (a_1 - a_2)^2, & a_1 a_2 < 0, \end{array} \right. \end{array}$$

Линеаризуем усредненную систему на состояниях равновесия 1), 2) вырожденной системы. Получим системы

$$\begin{aligned} \varepsilon q_1' &= \tfrac{1}{ml^2} p_1, \\ \varepsilon p_1' &= \left[-mgl q_1 - \tfrac{2c}{m} p_1 - \tfrac{m}{2} b(\tau_1) q_1 \right], \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon q_2' &= \tfrac{1}{ml^2} p_2, \\ \varepsilon p_2' &= \left[-mgl q_2 - \tfrac{2c}{m} p_2 + \tfrac{m}{2} b(\tau_1) q_2 \right] \end{aligned}$$

соответственно. Из анализа этих систем и теоремы 2.8.1 в [35] следует, что при достаточно малых ε нижнее состояние равновесия маятника асимптотически устойчиво. Верхнее состояния равновесия асимптотически устойчиво, если

$$\inf_{-\infty<\tau_1<\infty} b(\tau_1) > gl$$

и неустойчиво, если

$$\sup_{-\infty<\tau_1<\infty} b(\tau_1) < gl.$$

Этот результат получен Ухаловым (см. [27]).

9. Система маятник-шайба с вибрирующим основанием (маятник Челомея)

Под **маятником Челомея** (см. [29]) понимается система, состоящая из стержня, который может поворачиваться вокруг определенной оси ("оси подвеса"), и твердого тела ("шайбы"), которая может перемещаться вдоль стержня.

В.Н. Челомеем [29] было экспериментально обнаружено, что вследствие вертикальной вибрации оси подвеса устойчивым при определенных условиях оказывается верхнее положение стержня. При этом шайба занимает на стержне некоторое фиксированное положение. Статья Челомея привлекла внимание. И появилось несколько статей, в которых исследовалась эта система. Меняйлов и Мовчан [23] изучили поведение маятника Челомея с помощью метода усреднения. Они предполагали, что ось подвеса совершает как горизонтальные, так и вертикальные вибрации. Блехман и Малахова [4] при тех же предположениях рассмотрели поведение шайбы на абсолютно жестком стержне, а также на упругом стержне, вибрирующим заданным образом в режиме стоячей волны. Рагульскис и Нагянавичюс [27] также изучали поведение

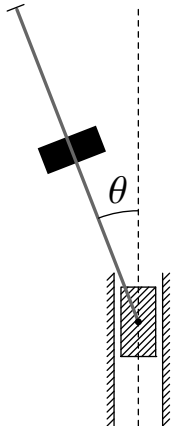


Рис. 2: Маятник Челомея.

шайбы на вибрирующем упругом стержне. Киргетов [18] получил условия устойчивости шайбы в верхнем положении стержня другим аналитическим методом. Во всех перечисленных работах было показано, что стабилизация верхнего состояния равновесия маятника достигается за счет горизонтальной составляющей вибраций точки подвеса. В работе Томсена и Черняка [61] предпринята новая попытка объяснить эксперименты Челомея. Они показали, что небольшой дефект нарушения симметрии, такой как небольшое отклонение от точного вертикального возбуждения, может обеспечить механизм для появления стационарных вибраций гибкого стержня. В работе Асташева В.К, Бабицкого В.И., Веприка А.М. и В.Л. Крупенина [1] рассмотрено поведение шайбы на струне и упругом стержне при возбуждении их колебаний заданной распределенной нагрузкой. Показано, что подвижную шайбу можно использовать в качестве гасителя колебаний. Это утверждение было также проверено экспериментально.

Для исследования маятника Челомея мы применим тот же метод, который использовался при изучении простого маятника.

Рассмотрим физический маятник в виде шарнирно закрепленного за один конец неоднородного стержня массы M, совершающего движения в вертикальной плоскости вокруг точки подвеса. Пусть на стержень надета шайба массы m, внутренний диаметр которой равен толщине стержня и которая свободно перемещаться вдоль него. Точка подвеса маятника совершает периодические колебания с высокой частотой, имеющие вертикальную и горизонтальную составляющие. Уравнения движения описываемой системы

имеет вид (см. [23]).

$$\begin{aligned}&(I_0+I_1+mx^2)\ddot{\varphi}+2mx\dot{x}\dot{\varphi}+k_1\dot{\varphi}-(ML+mx)(g+\ddot{f}_1(t))\sin\varphi+\\&(ML+mx)\ddot{f}_2(t)\cos\varphi=0,\\&\ddot{x}-x\dot{\varphi}^2+k_2\dot{x}+(g+\ddot{f}_1(t))\cos\varphi+\ddot{f}_2(t)\sin\varphi=0.\end{aligned}\tag{49}$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по отношению ко времени t, I_0 - момент инерции стержня без шайбы относительно оси вращения, I_1+mx^2 - момент инерции шайбы, I_1 - собственный момент инерции шайбы, x - текущая координата шайбы, отсчитываемая вдоль стержня, φ - текущий угол поворота стержня при колебаниях, отсчитываемый от вертикали, L - расстояние от центра массы стержня до точки подвеса, g - ускорение свободного падения, $k_1\dot{\varphi}$ - момент трения, создаваемый движением всей системы, $k_1\dot{x}$ - сила трения шайбы о стержень, $f_1(t)$ - вертикальная составляющая колебаний точки подвеса, $f_2(t)$ - горизонтальная составляющая колебаний точки подвеса, Пока не будем уточнять вид функций $f_1(t)$, $f_2(t)$. Положим $p(x)=I_0+I_1+mx^2$, $r(x)=ML+mx$ и перейдем от системы (49) к системе четырех уравнений первого порядка. Сделаем замену

$$\begin{aligned}&\dot{\varphi}=\tfrac{\psi}{p(x)}+\tfrac{r(x)}{p(x)}[\dot{f}_1(t)\sin\varphi-\dot{f}_2(t)\cos\varphi],\\&\dot{x}=\xi-\dot{f}_1(t)\cos\varphi-\dot{f}_2\sin\varphi.\end{aligned}\tag{50}$$

Замена (50) вводит две новые переменные ψ и ξ и является по существу заменой, которая дает возможность записать систему (49) в гамильтоновой форме. В силу первой из формул (50)

$$\frac{d}{dt}(p(x)\dot{\varphi})=p(x)\ddot{\varphi}+2mx\dot{x}\dot{\varphi}=\frac{d}{dt}(\psi+r(x)\dot{f}_1(t)\sin\varphi-r(x)\dot{f}_2(t)\cos\varphi).$$

Подставляя последнее выражение в первое уравнение системы (49) и учитывая вторую формулу замены (50), получим

$$\begin{aligned}&\dot{\psi}=-\tfrac{k_1\psi}{p(x)}-\left[\left(m\xi+\tfrac{k_1r(x)}{p(x)}\right)\sin\varphi+\tfrac{r(x)\psi}{p(x)}\cos\varphi\right]\dot{f}_1(t)-\left[\left(-m\xi+\tfrac{k_1r(x)}{p(x)}\right)\cos\varphi+\right.\\&\left.\tfrac{r(x)\psi}{p(x)}\sin\varphi\right]\dot{f}_2(t)+\left(m-\tfrac{r^2(x)}{p(x)}\right)\left[\dot{f}_1^2(t)\sin\varphi\cos\varphi-\dot{f}_2^2(t)\sin\varphi\cos\varphi-\right.\\&\left.\dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)\cos2\varphi\right]+r(x)g\sin\varphi.\end{aligned}$$

Подставляя вторую формулу замены (50) во второе уравнение системы (49), получим

$$\dot\xi = -k_2\xi - \left[\frac{\psi}{p(x)}\left(1-\frac{2xr(x)}{p(x)}\right)\sin\varphi - k_2\cos\varphi\right]\dot f_1(t) - \left[-\frac{\psi}{p(x)}\left(1-\frac{2xr(x)}{p(x)}\right)\cos\varphi - k_2\sin\varphi\right]\dot f_2(t) - \frac{r(x)}{p(x)}\left(1-\frac{xr(x)}{p(x)}\right)[\dot f_1^2(t)\sin^2\varphi + f_2^2(t)\cos^2\varphi - \dot f_1(t)\dot f_2(t)\sin 2\varphi] - g\cos\varphi + x\frac{\psi^2}{p^2(x)}.$$

Следовательно, получаем систему четырех уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot\varphi = \frac{\psi}{p(x)} + \frac{r(x)}{p(x)}[\dot f_1(t)\sin\varphi - \dot f_2(t)\cos\varphi],\\
&\dot\psi = -\frac{k_1\psi}{p(x)} - \left[\left(m\xi + \frac{k_1 r(x)}{p(x)}\right)\sin\varphi + \frac{r(x)\psi}{p(x)}\cos\varphi\right]\dot f_1(t) - \left[\left(-m\xi + \frac{k_1 r(x)}{p(x)}\right)\cos\varphi + \frac{r(x)\psi}{p(x)}\sin\varphi\right]\dot f_2(t) + \left(m - \frac{r^2(x)}{p(x)}\right)\left[\dot f_1^2(t)\sin\varphi\cos\varphi - \dot f_2^2(t)\sin\varphi\cos\varphi - \dot f_1(t)\dot f_2(t)\cos 2\varphi\right] + r(x)g\sin\varphi.\\
&\dot x = \xi - \dot f_1(t)\cos\varphi - \dot f_2\sin\varphi\\
&\dot\xi = -k_2\xi - \left[\frac{\psi}{p(x)}\left(1-\frac{2xr(x)}{p(x)}\right)\sin\varphi - k_2\cos\varphi\right]\dot f_1(t) - \left[-\frac{\psi}{p(x)}\left(1-\frac{2xr(x)}{p(x)}\right)\cos\dot\varphi - k_2\sin\varphi\right]\dot f_2(t) - \frac{r(x)}{p(x)}\left(1-\frac{xr(x)}{p(x)}\right)[\dot f_1^2(t)\sin^2\varphi + f_2^2(t)\cos^2\varphi - \dot f_1(t)\dot f_2(t)\sin 2\varphi] - g\cos\varphi + x\frac{\psi^2}{p^2(x)}.
\end{aligned} \tag{51}$$

Будем предполагать, что функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ определяются формулами

$$f_1(t) = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k\cos\nu_k t + \beta_k\sin\nu_k t, \quad f_2(t) = \sum_{k=1}^{N}\gamma_k\cos\nu_k t + \delta_k\sin\nu_k t,$$

где α_k, β_k, γ_k, δ_k, $\nu_k\,(k=1,\dots,N)$ - вещественные постоянные. Далее, будем предполагать, что амплитуды α_k, β_k, γ_k, δ_k достаточно малы, а частоты ν_k достатосно велики в следующем смысле. Существует такой малый положительный параметр ε, что

$$\alpha_k = \varepsilon a_k,\ \beta_k = \varepsilon b_k,\ \gamma_k = \varepsilon c_k,\ \delta_k = \varepsilon d_k,\ \nu_k = \frac{\omega_k}{\varepsilon},$$

где a_k, b_k, c_k, d_k, $\omega_k\,(k=1,\dots,N)$ - величины порядка $O(1)$ относительно ε. Тогда функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= \varepsilon\textstyle\sum_{k=1}^{N} a_k\cos\omega_k\frac{t}{\varepsilon} + b_k\sin\omega\frac{t}{\varepsilon} = \varepsilon g_1(\frac{t}{\varepsilon}),\\
f_2(t) &= \varepsilon\textstyle\sum_{k=1}^{N} d_k\cos\omega_k\frac{t}{\varepsilon} + d_k\sin\omega\frac{t}{\varepsilon} = \varepsilon g_2(\frac{t}{\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Перейдем в системе (51) к быстрому времени τ по формуле $\varepsilon\tau = t$ и обозначим дифференцирование по τ штрихом. Получим систему

$$\begin{aligned}
&\varphi' = \varepsilon\left[\tfrac{\psi}{p(x)} + \tfrac{r(x)}{p(x)}\left(g_1'(\tau)\sin\varphi - g_2'(\tau)\cos\varphi\right)\right],\\
&\psi' = \varepsilon\left\{-\tfrac{k_1\psi}{p(x)} - \left[\left(m\xi + \tfrac{k_1 r(x)}{p(x)}\right)\sin\varphi + \tfrac{r(x)\psi}{p(x)}\cos\varphi\right] g_1'(\tau) -\right.\\
&- \left[\left(-m\xi + \tfrac{k_1 r(x)}{p(x)}\right)\cos\varphi + \tfrac{r(x)\psi}{p(x)}\sin\varphi\right] g_2'(\tau) + \left(m - \tfrac{r^2(x)}{p(x)}\right)\left[g_1'^2(\tau)\sin\varphi\cos\varphi -\right.\\
&\left.\left.-g_2'^2(\tau)\sin\varphi\cos\varphi - -g_1'(\tau)g_2'(\tau)\cos 2\varphi\right] + r(x)g\sin\varphi\right\},\\
&x' = \varepsilon[\xi - g_1'(\tau)\cos\varphi - g_2'(\tau)\sin\varphi],\\
&\xi' = \varepsilon\left\{-k_2\xi - \left[\tfrac{\psi}{p(x)}\left(1 - \tfrac{2xr(x)}{p(x)}\right)\sin\varphi - k_2\cos\varphi\right] g_1'(\tau) -\right.\\
&- \left[-\tfrac{\psi}{p(x)}\left(1 - \tfrac{2xr(x)}{p(x)}\right)\cos\varphi - k_2\sin\varphi\right] g_2'(\tau) -\\
&-\tfrac{r(x)}{p(x)}\left(1 - \tfrac{xr(x)}{p(x)}\right)\left[g_1'^2(\tau)\sin^2\varphi + g_2'^2(\tau)\cos^2\varphi - g_1'(\tau)g_2'(\tau)\sin 2\varphi\right] -\\
&\left.-g\cos\varphi + x\tfrac{\psi^2}{p^2(x)}\right\}.
\end{aligned} \tag{52}$$

Система (52) имеет стандартную форму. Усредним ее и сохраним те же обозначения для переменных. Получим систему

$$\begin{aligned}
&\varphi' = \varepsilon\tfrac{\psi}{p(x)},\\
&\psi' = \varepsilon\left\{-\tfrac{k_1\psi}{p(x)} + P(x,\varphi)\right\},\\
&x' = \varepsilon\xi,\\
&\xi' = \varepsilon\left\{-k_2\xi - Q(x,\varphi)\right\},
\end{aligned} \tag{53}$$

где

$$\begin{aligned}
&P(x,\varphi) = \left(m - \tfrac{r^2(x)}{p(x)}\right)\left[\left(\langle g_1'^2(\tau)\rangle - \langle g_2'^2(\tau)\rangle\right)\sin\varphi\cos\varphi - \langle g_1'(\tau)g_2'(\tau)\rangle\cos 2\varphi\right]\\
&+r(x)g\sin\varphi,\\
&Q(x,\varphi) = \tfrac{r(x)}{p(x)}\left(1 - \tfrac{xr(x)}{p(x)}\right)\left[\langle g_1'^2(\tau)\rangle\sin^2\varphi + \langle g_2'^2(\tau)\rangle\cos^2\varphi - \langle g_1'(\tau)g_2'(\tau)\rangle\sin 2\varphi\right]\\
&+g\cos\varphi,
\end{aligned}$$

а $\langle g(\tau)\rangle$ - среднее значение функции $g(\tau)$. Отметим, что усредненную систему (53) можно записать в виде системы двух уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}
&p(x)\varphi'' + 2mxx'\varphi' + \varepsilon k_1\varphi' - \varepsilon^2 P(x,\varphi) = 0,\\
&x'' - x\varphi'^2 + \varepsilon k_2 x' + \varepsilon^2 Q(x,\varphi) = 0.
\end{aligned} \tag{54}$$

Состояния равновесия усредненной системы (54) определяются из системы уравнений

$$P(x,\,\varphi)=0,\quad Q(x,\,\varphi)=0. \tag{55}$$

Система (55) имеет много решений. Исследуем, когда существует и устойчиво решение $\varphi=0$, т.е. устойчиво верхнее состояние равновесия маятника. Из первого уравнения системы (55) следует, что для существования решения $\varphi=0$ необходимо выполнение равенства

$$\langle g_1'(\tau)g_2'(\tau)\rangle=0.$$

Из второго уравнения системы (55) следует, что для существования решения $\varphi=0$ необходимо

$$\langle g_2'^2(\tau)\rangle\neq 0.$$

Последнее неравенство означает, что усредненная система имеет состояние равновесия $\varphi=0$, если отлична от нуля горизонтальная составляющая вибраций подвеса маятника.

Найдем теперь такое состояние равновесия $x=x_0$ усредненной системы, что $x=x_0$, $\varphi=0$ устойчивое равновесие системы (55). Отметим, что

$$P_\varphi(x_0,0)=Q_x(x_0,0)=0.$$

Характеристическое уравнение линеаризованной на состоянии равновесия $(x_0,0)$ системы (55) имеет вид

$$\left(\lambda^2+\frac{k_1}{p(x)}\lambda-\frac{P_\varphi(x_0,0)}{p(x)}\right)\left(\lambda^2+k_2\lambda-Q_x(x_0,0)\right)=0.$$

Поэтому условия устойчивости состояния равновесия $(x_0,0)$ имеют вид

$$P_\varphi(x_0,0)<0,\quad Q_x(x_0,0)<0.$$

Выпишем уравнение для отыскания состояния равновесия $x=x_0$ при $\varphi=0$. Это уравнения

$$-\frac{r(x)}{p(x)}\left(1-\frac{xr(x)}{p(x)}\right)\langle g_2'^2(\tau)\rangle=g. \tag{56}$$

Уравнение (56) можно записать следующим образом

$$\frac{(ML+mx)(MLx-I)}{(I+mx^2)^2)}\langle g_2'^2(\tau)\rangle=g, \tag{57}$$

где $I = I_0 + I_1$. Наконец, если положить

$$\zeta = \frac{MLx}{I}, \quad \mu = \frac{mI}{M^2L^2}, \quad \sigma = \frac{ML\langle g_2'^2(\tau)\rangle}{gI},$$

то уравнение (57) можно записать в виде

$$\Phi(\zeta) = \frac{(1+\mu\zeta)(\zeta-1)}{(1+\mu\zeta^2)^2} = \frac{1}{\sigma}. \tag{58}$$

В зависимости от величины σ(следовательно, величины $\langle g_2'^2(\tau)\rangle$) уравнение (58) может иметь одно решение, два решения или вовсе не иметь решений. Заметим еще, что из (58) следует, что должно выполняться неравенство

$$\zeta > 1. \tag{59}$$

Точка экстремума $\zeta = \zeta^*$ функции $\Phi(\zeta)$ при фиксированномо μ определяется из уравнения

$$\mu^2\zeta^2(3-2\zeta) - \mu(3\zeta^2 - 6\zeta + 1) + 1 = 0, \tag{60}$$

причем, следует учесть (59). Уравнение (60) относительно μ не имеет решений, если $\zeta < 3/2$, и имеет единственное положительное относительно μ решение, если $\zeta > 3/2$. Если выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sigma} < \zeta^*,$$

то уравнение (58) имеет два решения ζ_1, ζ_2. При этом

$$\Phi'(\zeta_1) > 0, \quad \Phi'(\zeta_2) < 0.$$

Учитывая, что

$$Q(\zeta, 0) = \Phi(\zeta) - \frac{1}{\sigma},$$

получаем

$$Q_\zeta(\zeta_1) > 0, \quad Q_\zeta(\zeta_2) < 0.$$

Отсюда следует, что состояние равновесия $(x_{01}, 0)$, где $x_{01} = \frac{I\zeta_1}{ML}$ неустойчиво. Состояние равновесия $(x_{02}, 0))$, где $x_{02} = \frac{I\zeta_2}{ML}$, устойчиво если выполняется неравенство

$$P_\varphi(x_{02}, 0) = -\frac{M^2L^2 + 2MLx_{02} - mI}{I + mx_{02}^2}(\langle g_1'^2(\tau)\rangle - \langle g_2'^2(\tau)\rangle) + (ML + mx_{02})g < 0.$$

Для выполнения последнего неравенства необходимо, чтобы при колебании подвеса амплитуда колебаний вертикальной составляющей превышала амплитуду колебаний горизонтальной составляющей.

Таким образом, при существенных дополнительных условиях (следует еще заметить, что для стержня конечной длины L должно быть выполнено неравенство $0 \leq x \leq L$ можно добиться стабилизации вертикального положения стержня с шайбой.

Литература

1. Асташев В.К., Бабицкий В.И., Веприк А.М., Крупенин В.Л. Гашение вынужденных колебаний струн и стержней подвижной шайбой// Доклады АН СССР.- 1989.- Т. 304, № 1.

2. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. - М.: Наука, 1985. - 320 с.

3. Блехман И.И. Вибрационная механика. - М.: Физматлит, 1994.- 400 с.

4. Блехман И.И., Малахова О.З. О квазиравновесных положениях маятника Челомея// Доклады АН СССР.- 1986.- Т. 287, N 2.- С. 290–294.

5. Боголюбов Н.Н. О некоторых статистических методах в математической физике. - Киев: Изд-во АН УССР, 1945.- 140 с.

6. Боголюбов Н.Н. Теория возмущений в нелинейной механике// Сборник трудов ин-та строительной механики АН УССР, 1950.- Т. 14, N 2.- С. 9–34.

7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1974.- 504 с.

8. Бурд В.Ш. Малые почти периодические колебания в системах с быстрыми и медленными параметрическими возбуждениями// Труды IX Межд. конф. по нелинейным колебаниям. Т.I. Аналитические методы теории колебаний.- Киев: Наукова думка, 1984.- С. 96–98.

9. Бурд В.Ш. К задаче об устойчивости верхнего состояния равновесия маятника с вертикально вибрирующим подвесом. Математическое моделирование систем: методы, приложения и средства. Сборник научных трудов.- Воронеж: ВГУ, 1999. - с. 64–67.

10. Бурд В.Ш., Забрейко П.П., Колесов Ю.С., Красносельский М.А. Принцип усреднения и бифуркация почти периодических решений// Доклады АН СССР.- 1969.- т.187.- N6. - С.1219–1221.

11. Ганина В.В. Об устойчивости верхнего положения равновесия маятника// Матем. моделирование.- 1998.- Т. 10, n. 2.- С. 110.

12. Ганина В.В., Колесов Ю.С. Условия устойчивости верхнего положения равновесия маятника при одном способе исчезающей по времени вибрации точки подвеса// Дифференц. уравнения.- 2000.- Т. 36, N. 2.- С. 152–167.

13. Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибраций высокой частоты на возникновение конвекции// Известия АН СССР, Механика жидкости и газа.- 1966.- N. 5.- С. 51–55.

14. Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости// Прикл. матем. мех.- 2002.- Т. 66, вып. 4.- С. 573–583.

15. Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции в горизонтальном слое жидкости// Доклады РАН.- 2002.- Т. 382, N. 5.- С. 632–636.

16. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом// Успехи физ. наук.- 1951.- Т. 44, N 1, 7–20.

17. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса// ЖЭТФ.- 1951.- Т. 21, N 5.- С. 588–597.

18. Киргетов А.В. К вопросу об устойчивости квазиравновесных движений маятника В.Н. Челомея// Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1986. - N 6.- С. 57–62.

19. Коддингтон Е.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.- М.: ИЛ.- 1958.- 476 с.

20. Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С. Нелинейные почти периодические колебания. М: Наука, 1970.- 352 с.

21. Крупенин В.Л. Возбуждение параметрических колебаний ударами// Машиноведение.- 1979.- N 1.- С. 27–35.

22. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая механика.- М. Наука, 1988.- 216.

23. Меняйлов А.И., Мовчан А.В. О стабилизации системы маятник- кольцо в условиях вибрации основания// Известия АН СССР. Механика твердого тела.- 1984.- N 6.- С. 35–40.

24. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой.- Ташкент: Фан, 1973.- 272 с.

25. Рагульскис К.М., Нагинявичус В.В. Трубообразный виброклапан, управляемый колебаниями трубы как упругого тела.- 1986.- Деп. в Лит

НИИНТИ, n 1644, Вильнюс.

26. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа "маятник".- Алма-Ата: Изд. "Наука"КазССР, 1981.- 253 с.

27. Ухалов А.Ю. Исследование задачи о существовании и устойчивости почти периодических колебаний в нелинейных системах с малым параметром, Диссертация на соискание уч. степени кандидата физ-мат. наук.- Ярославль, 1997.- 80 с.

28. Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций// Доклады АН СССР.- 1956.- Т. 110, N. 3.- С. 345–347.

29. Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями// Доклады АН СССР.- 1983.- Т. 270, N 1.- С. 62–67.

30. Юдович В.И. Вибродинамика систем со связями// Доклады РАН.- 1997.- Т. 354, N. 5.- С. 622–624.

31. Юдович В.И. Динамика материальной частицы на вибрирующей гладкой поверхности// Прикл. матем. мех.- 1998.- Т. 62, вып. 6.- С. 968–976.

32. Bishop S.R., Sudor D.J. Inverted dynamics of a tilted parametric pendulum// European Journal of Mechanics A/Solids.- 1999.- V. 18.- P. 517–526.

33. Bogdanoff J.L. Influence on the behavior of a linear dynamical system of some imposed rapid motion of small amplitude// J. acoust. Soc. Am.- 1962.- V. 34.- P. 1055–1062.

34. Bogdanoff J.L., Citron S.J. Experiments with an inverted pendulum subject to random parametric exitation// J. acoust. Soc. Am.- 1965.- V. 38.- P. 447–452.

35. Burd V. Method of Averaging for Differential Equations on an Infinite Interval. Theory and Applications, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, London, New Tork, 2007.

36. Champneus A.R., Frazer W.B. The Indian rope trick for a parametrically excited flexible rod linearized analysis// Proc. R. Soc. Lond.- 2000.- A 456,- P. 553–570.

37. Cristofilos N. US Patents,n. 2,531,028 and n. 2, 567,904.- 1950 and 1951.

38. Erdélyi A. Über die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt// Z. angew. Math. Mech.- 1934.- B. 14, heft 4.- p. 235–247.

39. Fidlin A. On asymptotic properties of systems with strong and very strong high-frequency excitation// J. Sound Vibr.- 2000.- V. 235.- P. 219–233.

40. Fidlin A., Thomsen J.J. Predicting vibration-induced diplacement for a resonant friction slider// Eur. J. Mech. A.- 2001.- V. 20.- P. 155–166.

41. Hemp G.W., Sethna P.R. On dynamical systems with high frequency para-

metric excitation// International Journal of Non-Linear Mechanics.- 1968.- v.3, N. 3.- P. 351–365.

42. Hirsch P. Das Pendel mit Oszillierendem Aufhängepunkt// Z. angew. Math. Mech.- 1930.- B. 10.- P. 41–52.

43. Ince E.L. Mathieu functions of stable type// Phyl. Mag.- 1928.- V. 6.- P. 547–558.

44. Jeffreys H. and Swirles B. Methods of mathematical physics. Third edition. Cambridge University Press, 1956.- 714 c.

45. Levi Mark. Stability of the inverted pendulum - a topological explanation// SIAM Review.- 1988.- V. 30, N. 4.- P. 639–644.

46. Levi Mark, Weckesser W. Stabilization of the inverted linearized pendulum by high frequency vibrations// SIAM Review.- 1995.- V. 37, N 2.- p. 219–223.

47. Levi Mark. Geometry of Kapitsa's potentials// Nonlinearity.- 1998.- V. 11.- P. 1365–1368.

48. Levi Mark. Geometry and physics of averaging with applications// Physica D. 1999.- v. 132.- P. 150–164.

49. Levinson N. The asymptotic nature of solution of linear differential equations// Duke Math. J.- 1948.- V.15. P.111–126.

50. Livingston M.S., Snyder H.S., Courant E.D., Blewett J.R.// Phys. Rev.- 1952.- 91.

51. Lowenstern E.R. The stabilizing effect of imposed oscillations of high frequency on a dynamical system// London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.- 1932.- V. 13.- P. 458–486.

52. Mitchel R. Stability of the inverted pendulum subjected to almost periodic and stochastic base motion - application of the method averaging
International Journal of Non-Linear Mechanics.- 1972.- V. 7, N. 1.- P. 101–123.

53. Osberghaus O., Paul W., Fischer E. Forschungsberichte des Wirschafts-und Verkersministerius Nordheim-Westfalen. West-deucher Verlag, Koln und Opladen 415, 1958.

54. Paul W. Electromagnetic traps for charged and neural particles// Revs. Mod. Phys.- 1990.- V.62.- P. 531–540.

55. Saito H., Ueda M. Dynamically stabilized bright solitons in a two-dimensinal Bose - Einstein condensate// arXiv:cond-mat/0209053 v.2 12 nov 2002.

56. Stephenson A. On a new type of dynamical stability. Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society.- 1908.- V. 52.- N. 8.- P. 1–10.

57. Stephenson A. On induced stability// Philosophical Magazine.- 1909.- 17. P.

765–766.

58. Strutt M.J.O. Stabiliseering en labiliseering door trillingen// Physica.- 1927.- B. 7.- P. 265–271.

59. Tcherniak D. The influence of fast excitation on a continuous system// J. sound and vibration.- 1999.- V. 227(2).- P. 343–360.

60. Thomsen J.J., Tcherniak D. Slow effects of harmonic excitation for elastic structures// Nonlinear Dynamics.- 1998.- V. 17.- P. 227–246.

61. Thomsen J.J., Tcherniak D. Chelomei's pendulum explained// Proc. R. Soc. Lond. A.- 2001.- v. 457. P. 1889–1913.

62. Van der Pol B. Stabiliseering door kleine trillingen// Physica. B. 5.- 1925.- P. 157–162.

63. Van der Pol B., Strutt, M.J.O. On the stability of solutions of Mathieu's equation// Philosophical Magazine.- 1928.- V. 5.- P. 18–38.

64. Zharnitsky V., Mitkov I., Levi M. Parametrically forsed sine-Gordon equation and domain wall dynamics in ferromagnets.- 1998.- Physical Review B.- V. 57, N 9.- P. 56–58.

65. Zharnitsky V., Mitkov I. π-Kinks in the parametrically driven sine-Gordon equation and applications.- 1998.- Physica D.- V. 123.- P. 301–307.