

УДК 621.0

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРОУДАРНЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ ПАРЫ «РОТОР – УПЛОТНИТЕЛЬНОЕ КОЛЬЦО»

© А.Н. Никифоров

Институт машиноведения им. А.А.Благодирова РАН, Москва, Россия

Аннотация. Предложены две математические модели, описывающие движение ротора и уплотнительного кольца с соударениями. Одна из них построена на гипотезе Герца, вторая – на классической гипотезе Ньютона. Модели позволяют для пары “ротор - уплотнительное кольцо” при любых ее габаритах и условиях работы определять амплитуды как стационарных, так и нестационарных колебаний ротора и кольца, а также области существования как устойчивых, так и неустойчивых виброударных режимов движения, причем одновременно устанавливая их качественный характер.

Ключевые слова: Ротор, вал, плавающее уплотнительное кольцо, удар (соударение), виброударное движение, математическая модель.

1. Введение

В новейших жидкостных ракетных двигателях (ЖРД) подача горючего и окислителя в камеру сгорания осуществляется турбонасосными агрегатами (ТНА) последнего поколения (рис.1). Их главным рабочим органом является ротор с бесконтактными уплотнениями, преобразующий кинетическую энергию струи газов в механическую работу подачи топливной смеси и вращающийся с угловой скоростью порядка несколько десятков и даже сотен тысяч оборотов в минуту. При этом номинальные обороты, как правило, превышают первую или даже вторую собственную частоту ротора.



Рис.1. Пример турбонасосного агрегата последнего поколения [1]

Конструкторы ТНА отказались от контактных герметизирующих устройств (сальники, манжеты) в пользу различных видов уплотнений с гарантированным зазором. К ним относятся щелевые и лабиринтные уплотнения [2], а также уплотнения с плавающими кольцами [3]. Уплотнения с плавающими кольцами выполнены в виде подвижных в радиальном направлении втулок (колец), которые опираются своими торцами на торец корпуса (рис.2). Преимущество последних в том, что плавающее уплотнительное кольцо в

процессе работы самоустанавливается относительно уплотнительной поверхности ротора, отслеживая все его перемещения. Все бесконтактные уплотнения характеризуется работой с

постоянной утечкой через дросселирующие зазоры между ними и ротором. Но в то же время это определяет целый ряд их преимуществ: они работают почти без износа, практически не имеют ограничений по окружной скорости, уплотняемые давления ограничиваются лишь допустимыми утечками и силовыми деформациями. В ТНА последнего поколения в качестве уплотнений роторов, как правило, применяются плавающие кольца сравнительно высокой жесткости, и установленные с радиальным зазором порядка 0.05...0.1 мм, что сводит утечки к минимуму.

Высокие эксплуатационные скорости вращения ротора объясняются стремлением к большой производительности ТНА при одновременном снижении его массы, габаритов и стоимости. Однако с увеличением частоты вращения стремительно возрастает уровень вибраций роторов, вследствие неизбежных дисбалансов. Силы инерции неуравновешенных масс пропорциональны квадрату частоты вращения и порождают вынужденные колебания роторов в виде синхронной прецессии с частотой, равной частоте вращения.

Значительная вибрация снижает надежность и долговечность любого агрегата. Например, статистика Воронежского конструкторского бюро Химавтоматики показывает, что доля отказов ТНА, вследствие интенсивных колебаний роторов, составляет примерно 70-80%. Даже кратковременные выходы вибраций за допустимые пределы часто приводят к заклиниванию подшипников, искривлению или перелому ротора, возгоранию турбонасоса из-за контактов роторов с уплотнениями [4] и другим опасным авариям ТНА.

Проблема высокого уровня вибраций становится еще острее в случае «зарезонансного» ротора, который принято называть гибким, ибо при вращении с частотой выше собственной он изгибается. Поперечные (изгибные) колебания ротора, вращающегося с частотой близкой к собственной, сопровождаются значительными амплитудами. Такое резонансное состояние возникает при разгоне-останове и чрезвычайно опасно. В момент прохождения резонансной или критической скорости ротор теряет динамическую устойчивость под действием собственной остаточной неуравновешенности. Последствиями этого в лучшем случае могут быть виброударные режимы работы ротора и плавающих уплотнительных колец, в худшем – их разрушение или даже вышеупомянутые аварии ТНА. Очевидно, что риск тяжелых последствий для ТНА последнего поколения может быть сведен к нулю, посредством глубокого теоретического исследования виброударных режимов системы «ротор - уплотнительное кольцо» на основе адекватной математической модели с целью определения параметров, обеспечивающих ее динамическую устойчивость, а также выработки соответствующих рекомендаций.

Выбор модели удара для решения поставленной задачи связан с компромиссом между простотой и реалистичностью, и должен учитывать ряд важных аспектов.

В случае соударений в системе «ротор-кольцо» можно говорить лишь о местных деформациях и разрушении, поскольку скорость сближения и твердость тел системы соответствуют низкоскоростному удару, не вызывающему взаимопроникновение тел. А как известно, низкоскоростной удар приводит к контактному давлению, которое дает большие деформации только в небольшой области, примыкающей к зоне контакта.

В рассматриваемой задаче требуется исследовать динамику и поэтому важен анализ поведения системы на значительных промежутках времени, в течение которых может происходить большое число соударений. Но безударное движение описывается одними (дифференциальными) уравнениями, а удары – другими (алгебраическими), что затрудняет расчет. Различие в типе уравнений обусловлено тем, что ударные силы по сравнению с «неударными» характеризуются кратковременностью их действия и значительной величиной. Промежуток времени, в течение которого длится удар, обычно очень мал (из опыта эксплуатации ТНА ЖРД ~ 0.001 с [5]), а развивающиеся на площадках контакта

соударяющихся тел силы (т. н. ударные или мгновенные) очень велики. За время удара они изменяются в широких пределах и достигают значений, при которых средние величины

давления (напряжений) на площадках контакта имеют порядок 10^4 и даже 10^5 атм. В результате если те или иные силы определяют ускорения, с которыми движутся рассматриваемые тела, и задача определения координат и скоростей сводится к интегрированию дифференциальных уравнений, то под действием ударных сил происходит лишь изменение скоростей без заметных перемещений, и поэтому расчет новых значений скоростей сводится к чисто алгебраическим операциям. Причем ввиду малости времени удара, импульсами всех неударных сил, таких, например, как сила тяжести, а также перемещениями точек тела за время удара пренебрегают.

Действие ударных сил приводит не только к значительному изменению за время удара скоростей точек тела. Следствиями удара могут быть также остаточные деформации, звуковые колебания, нагревание тел, изменение механических свойств их материалов и др., а при скоростях соударения выше, чем критические – разрушение тел в месте удара. Порядок критических скоростей для металлов 15 м/сек (для высококачественных сталей 150 м/сек и более). Изменение скоростей точек тела за время удара определяется методами общей теории удара, где в качестве меры механического взаимодействия тел при соударении вместо самой ударной силы P_y вводится ее импульс S за время удара, так называемый ударный импульс. Основные уравнения общей теории удара вытекают из теорем об изменении количества движения и кинетического момента системы при ударе. С помощью этих теорем, зная приложенный ударный импульс и скорости в начале удара, определяют скорости в конце удара, а если тело является несвободным, то и импульсивные реакции связей.

При реальном ударе макроскопических тел происходит деформация соударяющихся тел и распространение по ним упругих волн (волн деформаций), передающих взаимодействие от сталкивающихся границ по всему телу. Таким образом, ударные силы – это отклик на деформации. Математические модели отражают этот процесс с большей или меньшей полнотой.

Если период наиболее медленных собственных колебаний соударяющихся тел или время прохождения в прямом и обратном направлениях упругих волн по сталкивающимся телам сравнимо со временем удара, то при расчётах пользуются волновой теорией удара, в основе которой лежат модели с распределенными параметрами для соударяющихся тел и волновые уравнения.

Если же время прохождения этих волн через тела много меньше времени удара, то влиянием упругих колебаний можно пренебречь и считать характер контактных взаимодействий при ударе таким же, как в статическом состоянии. На таких допущениях базируется статическая теория удара, из которой исходили Герц, Рэлей, Динник и другие авторы [6,7,8]. Ее основой являются дискретные модели удара, частично описывающие деформации. В этих моделях предполагается, что движение тел в течение удара описывается дифференциальными уравнениями движения твердого тела (уравнениями типа «сила - ускорение» $P_y = m\ddot{x}$), которые сравнительно легко решаются известными методами. Силы P_y , действующие за время контакта, учитывают вязкоупругие свойства реальных тел и моделируются набором пружин-демпферов.

В классической теории удара пренебрегают деформациями тел, т. е. считается, что энергия на деформации не теряется, а взаимодействие распространяется по всему телу мгновенно. Она основана на ньютоновском восстановлении относительной скорости и кулоновском контактном трении, в которой определяются только интегральные характеристики ударных сил – их импульсы, т. е. составляются разностные уравнения, связывающие доударные и послеударные параметры (уравнения типа «ударный импульс - изменение количества движения» $S = m\Delta v$).

2. Виброударная модель системы «ротор - уплотнительное кольцо» по Герцу

Принимая во внимание конструктивные и динамические особенности, уравнения движения исследуемой механической системы (рис.2) следует записывать, учитывая массу и момент инерции ротора m и J , крутящий момент M_0 , дисбаланс ротора $a=O_1G$, приведенную жесткость вала и опор $k = k_{\text{оп}}k_{\text{в}}/(k_{\text{оп}} + k_{\text{в}})$, а также гидро(газо)динамические и ударные силы в виде составляющих P_n и P_τ , инициируемые радиально-подвижным уплотнительным кольцом m_k , которое прижато перепадом давления $\Delta p=p_1-p_2$ к поверхности корпуса ТНА Π_k .

Вследствие малой (в сравнении с длиной ротора) протяженности уплотнительного кольца по оси z , движение ротора в кольце можно считать плоским. При этом пусть x, y - координаты оси ротора O_1 , x_k, y_k - координаты оси кольца O_2 , x_G, y_G - координаты линии, проходящей через центр масс ротора G , θ - полярный угол линии центров (угол между относительным смещением $e=O_1O_2$ и осью x).

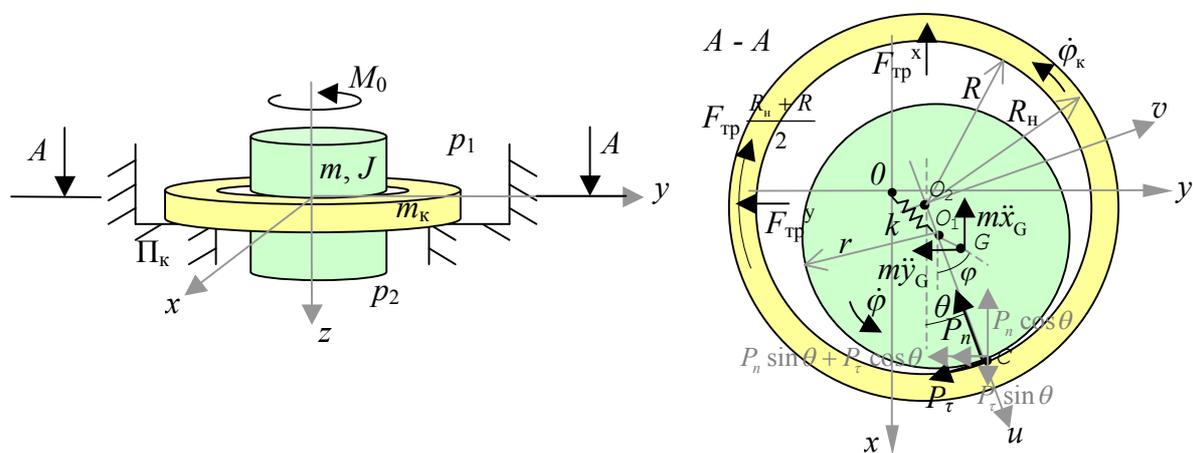


Рис.2. Виброударная модель ротора с уплотнительным кольцом

Рассматривая рисунок модели, можно заметить, что на точку O_1 , не имеющей массы, но обладающей моментом инерции J , в направлении x действует сила $P_\tau \sin \theta$, а ей противодействуют сила $P_n \cos \theta$, сила инерции $m\ddot{x}_G$ и сила упругости kx ; против направления y действуют силы $P_n \sin \theta$ и $P_\tau \cos \theta$, сила инерции $m\ddot{y}_G$ и сила упругости ky . Кроме того, на ротор действуют крутящий момент M_0 и момент силы инерции от центра масс ротора $m\ddot{x}_G \cdot a \sin \varphi$, которым противодействуют момент $m\ddot{y}_G \cdot a \cos \varphi$ и момент силы $P_\tau r$. Таким образом, уравнения движения ротора:

$$\begin{cases} 0 = -m\ddot{x}_G - kx - P_n \cos \theta + P_\tau \sin \theta \\ 0 = -m\ddot{y}_G - ky - P_n \sin \theta - P_\tau \cos \theta \\ J\ddot{\varphi} = M_0 + ma(\ddot{x}_G \sin \varphi - \ddot{y}_G \cos \varphi) - P_\tau r \end{cases} \quad (1)$$

где φ - угловое перемещение центра масс ротора или просто угол вращения ротора.

Координаты x, y связаны с координатами x_G, y_G соотношениями $x_G = x + a \cos \varphi$ и $y_G = y + a \sin \varphi$, следовательно:

$$\ddot{x}_G = \ddot{x} - a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - a\ddot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\ddot{y}_G = \ddot{y} - a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + a\ddot{\varphi} \cos \varphi$$

Подставляя эти выражения в (1), легко преобразовать полученные уравнения движения к однородной и общепринятой для теории колебаний форме:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = ma(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) - P_n \cos \theta + P_r \sin \theta \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = ma(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) - P_n \sin \theta - P_r \cos \theta \\ (J + ma^2)\ddot{\varphi} + ma(\ddot{y} \cos \varphi - \ddot{x} \sin \varphi) = M_0 - P_r r \end{cases} \quad (2)$$

Здесь также учтено неизбежное трение, препятствующее реальному движению ротора, в виде линейной вязкой силы с коэффициентом пропорциональности b .

В турбонасосных агрегатах крутящий момент M_0 зависит от давления газов перед турбиной и угловой скорости $\dot{\varphi}$. Эта зависимость обычно задается в виде совместной характеристики турбины (крутящий момент M_1) и насоса (момент сопротивления, связанный с рабочей нагрузкой M_2) [9]:

$$M_0 = M_1 - M_2 = M_n (2 - \dot{\varphi} / \omega_n) - M_n (\dot{\varphi} / \omega_n)^2, \quad (3)$$

где M_n, ω_n – номинальные значения крутящего момента и угловой скорости.

Определения внешних сил в системе уравнений (2) имеют вид:

$$P_n = \begin{cases} k_n e, & \text{при } e < \delta \\ k_n e + P_y, & \text{при } e > \delta \end{cases} \quad (4)$$

$$P_r = \begin{cases} (\dot{\theta} - 0.5\dot{\varphi})d_n e, & \text{при } e < \delta \\ (\dot{\theta} - 0.5\dot{\varphi})d_n e + fP_y, & \text{при } e > \delta \end{cases}$$

где $\delta = R - r$ – величина радиального зазора, $k_n e$ – гидродинамическая нормальная сила, $(\dot{\theta} - 0.5\dot{\varphi})d_n e$ – гидродинамическая тангенциальная сила, P_y – ударная сила между ротором и кольцом, f – коэффициент трения скольжения.

Здесь используется модель «короткого кольцевого дросселя» [10], что допустимо исходя из реальных размеров уплотнительных колец ТНА. Соответственно гидродинамические коэффициенты жесткости и демпфирования уплотнительного кольца:

$$k_n = \frac{\pi L R \eta}{2\delta(1+\eta)^2} \Delta p, \quad d_n = \frac{\pi \mu_c k_z L^3 R}{12\delta^3}, \quad (5)$$

где $\eta = 75\delta/L$, L – длина уплотнительной поверхности кольца, μ_c – вязкость среды, $k_z = 0.005Re$ – коэффициент турбулентности, зависящий от числа Рейнольдса.

Важно отметить также, что в ТНА перепад давления на уплотнениях рабочих колес зависит от напора ступени, который в свою очередь пропорционален квадрату частоты вращения ротора $\Delta p = \Delta p_n \omega^2 / \omega_n^2$, где Δp_n – перепад давления, соответствующий номинальной частоте вращения ω_n . В связи с этим, гидродинамические жесткости уплотнительных колец изменяются по зависимостям вида $k_n = k_n^n \omega^2 / \omega_n^2$, где k_n^n – значение при ω_n . Коэффициент гидродинамического демпфирования уплотнительных колец пропорционален числу Рейнольдса $Re = 2\rho\delta w / \mu_c$, где ρ – плотность жидкости, $w = \sqrt{2\Delta p_n \eta / \rho}$ – скорость течения жидкости в дросселирующем зазоре. Отсюда, гидродинамическое демпфирование пропорционально частоте вращения $d_n = d_n^n \omega / \omega_n$.

Для определения силы удара воспользуемся известной формулой Герца:

$$P_y = Ke_{\max}^{3/2} = K^{2/5} \left(\frac{5}{4} MV^2 \right)^{3/5}, \quad (6)$$

где $K = \frac{4}{3\eta} \sqrt{\frac{Rr}{R-r}}$ – коэффициент, зависящий от материалов соударяющихся тел $\eta = \frac{1-\mu_p^2}{E_p} + \frac{1-\mu_k^2}{E_k}$ и кривизны их поверхностей в точке контакта, μ_p , E_p , μ_k и E_k – коэффициенты Пуассона и модули упругости для материалов ротора и кольца, e_{\max} – максимальное сближение их центров, $M = \frac{mm_k}{m+m_k}$ – приведенная масса, $V=e\dot{e}$ – скорость сближения центров ротора и кольца до соударения.

Уравнения движения кольца как твердого тела также можно записать, исходя из принципа Д'Аламбера и учитывая, что на него действуют такие же внешние силы P_n и P_τ , но другого знака. Тогда (рис.2) на точку O_2 с массой m_k и моментом инерции J_k в направлении x действует сила $P_n \cos \theta$, а ей противодействуют сила $P_\tau \sin \theta$ и сила трения кольца о корпус $F_{\text{тр}}^x$; в направлении y действуют силы $P_n \sin \theta$ и $P_\tau \cos \theta$, а им противодействует сила трения кольца о корпус $F_{\text{тр}}^y$. Кроме того, вокруг оси кольца действует крутящий момент $P_\tau R$, а ему противодействует момент силы трения кольца о корпус $F_{\text{тр}}(R_n+R)/2$. Таким образом, искомые уравнения движения уплотнительного кольца:

$$\begin{cases} m_k \ddot{x}_k = P_n \cos \theta - P_\tau \sin \theta - F_{\text{тр}}^x \\ m_k \ddot{y}_k = P_n \sin \theta + P_\tau \cos \theta - F_{\text{тр}}^y, \\ J_k \ddot{\phi}_k = P_\tau R - F_{\text{тр}} (R_n + R)/2 \end{cases} \quad (7)$$

где $F_{\text{тр}}^x = F_{\text{тр}} \frac{\dot{x}_k}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}}$, $F_{\text{тр}}^y = F_{\text{тр}} \frac{\dot{y}_k}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}}$, $F_{\text{тр}} = fN$, $N = F_{\text{пр}} + \Delta p S_{\text{тр}} + m_k g$, $S_{\text{тр}} = \pi(R_{\text{нп}}^2 - R^2)$ – поверхность трения кольца о корпус, g – ускорение силы веса, $F_{\text{пр}}$ – усилие осевой пружины (широко применяется в ТНА последнего поколения).

Гидродинамические и ударные силы связывают ротор и кольцо в единую систему. Чтобы уравнения (2) и (7) образовывали замкнутую систему, необходимо выразить относительное смещение e и полярный угол θ через координаты центра ротора x , y и координаты центра кольца x_k , y_k .

Обращаясь к рис.2, можно найти $x-x_k=e\cos\theta$ и $y-y_k=e\sin\theta$, откуда:

$$e = \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}, \quad \cos \theta = \frac{x-x_k}{e}, \quad \sin \theta = \frac{y-y_k}{e} \quad (8)$$

Используя соответствующие производные соотношения $\dot{x}-\dot{x}_k = \dot{e} \cos \theta - e \dot{\theta} \sin \theta$ и $\dot{y}-\dot{y}_k = \dot{e} \sin \theta + e \dot{\theta} \cos \theta$, из первого из них получается:

$$\dot{e} = \frac{\dot{x}-\dot{x}_k + e \dot{\theta} \sin \theta}{\cos \theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{e} \cos \theta - (\dot{x}-\dot{x}_k)}{e \sin \theta}.$$

Далее подставляя вначале выражение для \dot{e} , а затем для $\dot{\theta}$ во второе из них, а также учитывая (8), можно прийти к искомым зависимостям:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \frac{(x-x_k)(\dot{x}-\dot{x}_k) + (y-y_k)(\dot{y}-\dot{y}_k)}{e} \\ \dot{\theta} &= \frac{(y-y_k)(x-x_k) - (\dot{x}-\dot{x}_k)(y-y_k)}{e^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Полученная совокупность уравнений (2) и (7) совместно с условиями (4) и зависимостями (3), (5), (6), (8), (9) является математической моделью и описывает динамику системы «ротор - уплотнительное кольцо» с учетом соударений.

3. Виброударная модель системы «ротор - уплотнительное кольцо» по Ньютону

В классической механике движение твердых тел в промежутках между соударениями описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, а в момент их соударений – разностными уравнениями, вытекающими из теорем о сохранении количества движения (импульса) и момента количества движения, а также из гипотез Ньютона о восстановлении относительной скорости и Кулона о контактном трении [11].

Применительно для рассматриваемой системы дифференциальные уравнения безударного движения (без силы P_y) могут быть записаны так:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = ma(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) - k_h(x - x_k) - d_h(\dot{x} - \dot{x}_k) - 0.5\dot{\varphi}d_h(y - y_k) \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = ma(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) - k_h(y - y_k) - d_h(\dot{y} - \dot{y}_k) + 0.5\dot{\varphi}d_h(x - x_k) \\ (J + ma^2)\ddot{\varphi} + ma(\ddot{y} \cos \varphi - \ddot{x} \sin \varphi) = M_0 - (\dot{\theta} - 0.5\dot{\varphi})d_h e r \end{cases}, \quad (10)$$

$$\begin{cases} m_k \ddot{x}_k = k_h(x - x_k) + d_h(\dot{x} - \dot{x}_k) + 0.5\dot{\varphi}d_h(y - y_k) - F_{\text{тр}}^x \\ m_k \ddot{y}_k = k_h(y - y_k) + d_h(\dot{y} - \dot{y}_k) - 0.5\dot{\varphi}d_h(x - x_k) - F_{\text{тр}}^y \\ J_k \ddot{\varphi}_k = (\dot{\theta} - 0.5\dot{\varphi})d_h e R - F_{\text{тр}}(R_n + R)/2 \end{cases}$$

где сохранены прежние обозначения и произведены подстановки $x - x_k = e \cos \theta$, $y - y_k = e \sin \theta$, $\dot{x} - \dot{x}_k = -e\dot{\theta} \sin \theta$ и $\dot{y} - \dot{y}_k = e\dot{\theta} \cos \theta$ в (2) и (7).

Движение ротора и кольца с соударениями (импульсивное их движение) возникает при выборе зазора между ними, т. е. в случае выполнения условия:

$$e = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} > \delta. \quad (11)$$

При этом направления скоростей центров ротора и кольца как до, так и после соударения неизвестны. Условием возникновения удара приближенно определена лишь ориентация их скорости сближения V .

Тем не менее, обозначая нормальный ударный импульс через S_n , а касательную составляющую ударного импульса через S_τ (рис.3) и отталкиваясь от того, что импульсы S_n и S_τ уменьшают соответствующие скорости ротора и увеличивают соответствующие скорости кольца, уравнения импульсивного движения для ротора и кольца можно свести к виду:

$$\begin{cases} m u^- - S_n = m u^+ \\ m v^- - S_\tau = m v^+ \\ J_G \omega^- - S_n \times GC_1 - S_\tau \times GC_2 = J_G \omega^+ \end{cases}, \quad \begin{cases} m_k u_k^- + S_n = m_k u_k^+ \\ m_k v_k^- + S_\tau = m_k v_k^+ \\ J_k \omega_k^- + S_\tau \times R = J_k \omega_k^+ \end{cases}, \quad (12)$$

где u^- , u^+ (v^- , v^+) - проекции скоростей центра ротора на нормаль (касательную) соответственно до и после соударения, ω^- , ω^+ - угловые скорости ротора до и после соударения, $J_G = J + ma^2$, соответствующие скорости кольца имеют индекс «к».

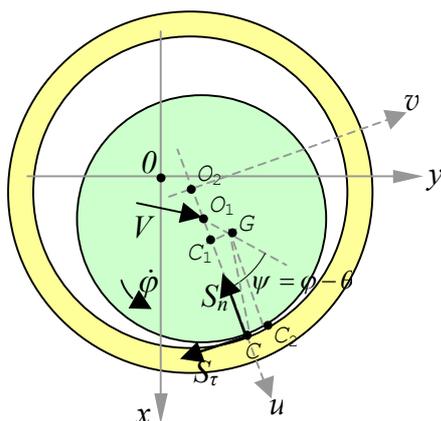


Рис.3. Скорость сближения ротора и кольца V и составляющие ударного импульса S

Гипотеза Ньютона заключается в том, что при прямом соударении твердых тел их относительная скорость отскока V^+ противоположна скорости сближения тел V и уменьшается по сравнению с V строго на константу c , которая определяется лишь материалами соударяющихся тел:

$$V^+ = -cV \quad \text{или} \quad u_k^+ - u^+ = -c(u_k^- - u^-), \quad c \in [0,1). \quad (13)$$

Из уравнений (12) с S_n можно получить:

$$u^- - u^+ = \mu(u_k^+ - u_k^-), \quad \text{где } \mu = m_k/m.$$

Подстановка в это равенство вначале соотношения $u_k^+ = u^+ - c(u_k^- - u^-)$, а затем $u^+ = u_k^+ + c(u_k^- - u^-)$ из (13) позволяет определить послеударные нормальные скорости центров ротора и кольца:

$$u^+ = \frac{(1-\mu c)u^- + \mu(1+c)u_k^-}{1+\mu}, \quad u_k^+ = \frac{(\mu-c)u_k^- + (1+c)u^-}{1+\mu}. \quad (14)$$

Соударение шероховатых тел сопровождается трением, что порождает S_t . Гипотеза Кулона выражается формулой [11]:

$$S_t = -fS_n. \quad (15)$$

Переписывая с учетом (15) второе уравнение импульсивного движения ротора как $mv^- + fS_n = mv^+$ и подставляя в него первое, записанное как $S_n = m(u^- - u^+)$, можно найти скорость центра ротора по касательной после соударения $v^+ = v^- + f(u^- - u^+)$ или в соответствии с первой зависимостью (14):

$$v^+ = v^- + \mu f \frac{(1+c)(u^- - u_k^-)}{1+\mu}. \quad (16)$$

Аналогичным образом из уравнения $m_k v_k^- - fS_n = m_k v_k^+$ путем подстановки $S_n = m(u^+ - u_k^-)$, может быть определена тангенциальная скорость центра кольца после соударения $v_k^+ = v_k^- + f(u_k^- - u^+)$ или в соответствии со второй зависимостью (14):

$$v_k^+ = v_k^- - f \frac{(1+c)(u^- - u_k^-)}{1+\mu}. \quad (17)$$

Формулы (16) и (17) справедливы только в определенном случае. В частности, если рассчитанное с помощью (16) значение v^+ имеет тот же знак, что и v^- , в противном случае надо считать $v^+=0$, т. е. скольжение ротора прекращается. То же самое относится и к тангенциальной послеударной скорости кольца.

Переписывая третье уравнение импульсивного движения ротора с учетом $GC_1 = a \sin \psi$, $GC_2 = CC_1 = r - a \cos \psi$ и (15) как $J_G \omega^- - S_n a \sin \psi + f S_n (r - a \cos \psi) = J_G \omega^+$ и подставляя в него $S_n = m(u^- - u^+)$, можно найти угловую скорость ротора после соударения $\omega^+ = \omega^- - \frac{m}{J_G}(u^- - u^+)[a \sin \psi + f(r - a \cos \psi)]$ или в соответствии с первой зависимостью (14):

$$\omega^+ = \omega^- - \frac{m_k(1+c)(u^- - u_k^-)}{J_G(1+\mu)}(fr + a \sin \psi - fa \cos \psi). \quad (18)$$

Аналогичным образом из уравнения $J_k \omega_k^- - f S_n R = J_k \omega_k^+$ путем подстановки $S_n = m_k(u_k^+ - u_k^-)$, может быть определена угловая скорость кольца после соударения $\omega_k^+ = \omega_k^- + fR \frac{m_k}{J_k}(u_k^- - u_k^+)$ или в соответствии со второй зависимостью (14):

$$\omega_k^+ = \omega_k^- - \frac{m_k(1+c)(u^- - u_k^-)}{J_k(1+\mu)}fR. \quad (19)$$

Переход от скоростей \dot{x} , \dot{y} к скоростям u , v осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned} u &= \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta \\ v &= -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta \end{aligned} \quad (20)$$

Формулы обратного перехода имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos \theta - v \sin \theta \\ \dot{y} &= u \sin \theta + v \cos \theta \end{aligned} \quad (21)$$

Знание зависимостей послеударных скоростей ротора и кольца от доударных (формулы 14, 16, 17, 18 и 19), позволяет всесторонне решить задачу об их совместном виброударном движении как абсолютно твердых тел. Алгоритм ее расчета представлен на блок-схеме (рис.4), который легко реализуется в современных системах компьютерной математики.

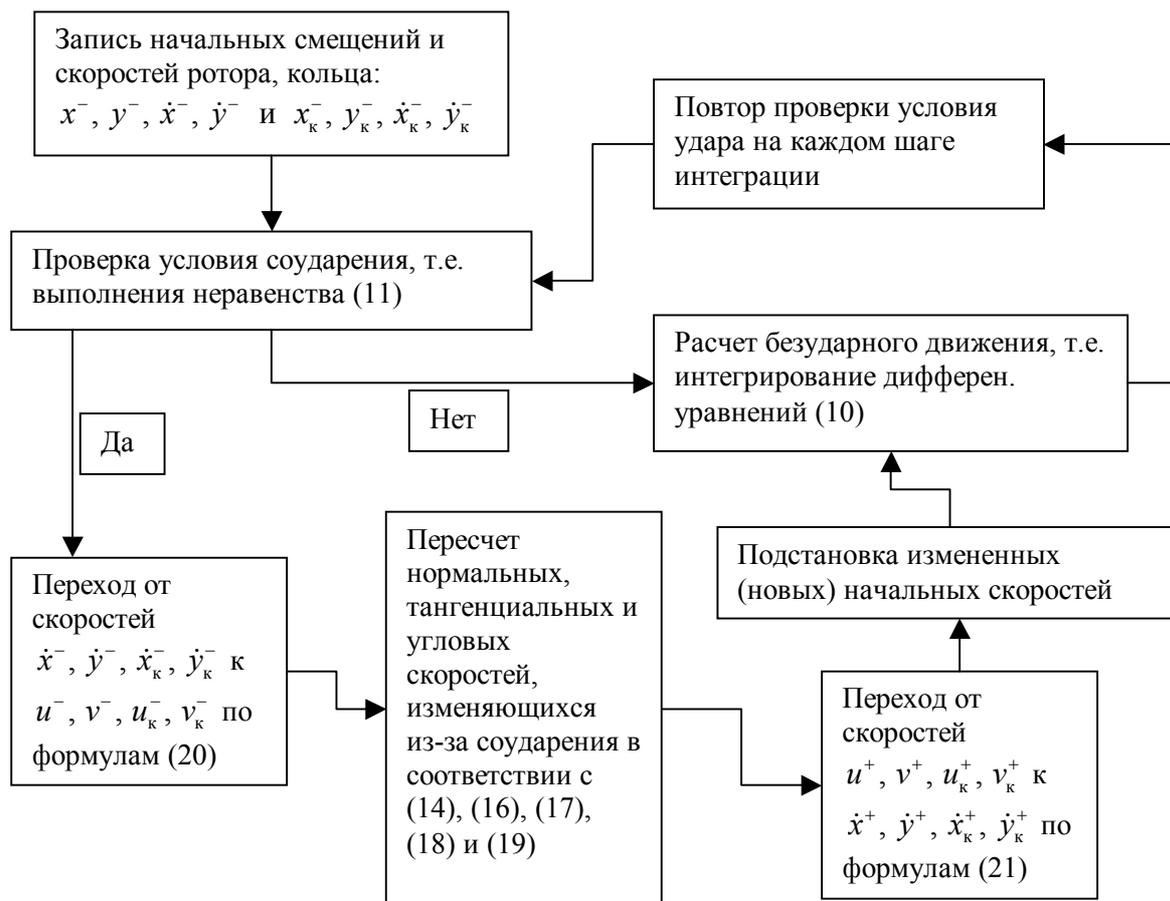


Рис.4. Принципиальная блок-схема расчета виброударной системы “ротор-кольцо”

4. Пример результатов, полученных с помощью описанных математических моделей

Модели позволяют для пары “ротор - уплотнительное кольцо” при любых ее габаритах и условиях работы определять амплитуды как стационарных, так и нестационарных колебаний ротора и кольца, а также области существования как устойчивых, так и неустойчивых виброударных режимов движения, причем одновременно устанавливая их качественный характер [12,13,14].

Интегрирование уравнений как первой (Герцевской), так и второй (Ньютоновской) виброударной модели ротора с уплотнительным кольцом в общем виде сопряжено с большими математическими трудностями и реализуемо лишь численными методами. Ниже приводятся результаты расчетов переходных колебаний системы «ротор - уплотнительное кольцо» с соударениями, произведенных методом Рунге-Кутты в среде программирования MATLAB® (рис.5).

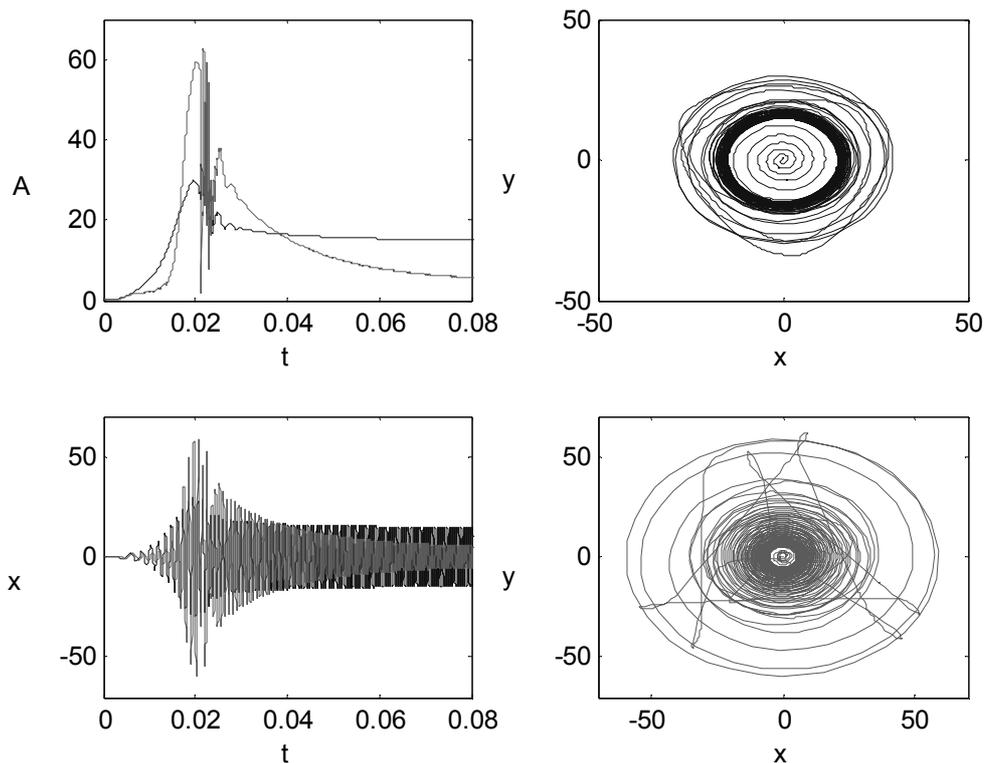


Рис.5. Амплитуды ($A = \sqrt{x^2 + y^2}$), развертки (по оси x) и орбиты (x, y) переходных колебаний закритического ротора (черн.) и уплотнительного кольца

Здесь при разгоне ротора от 0 до ω_n в момент прохождения критической скорости после начального безударного движения устанавливается ударный режим колебаний – происходит восемь соударений. Это видно по характерным двум скачкам и шести петлям в траектории кольца. После резонанса в системе ударный режим вновь сменяется безударным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-08-00500-а).

Литература

1. Патент РФ RU 2083881. Турбонасосный агрегат.
2. Никитин Г.А. Щелевые и лабиринтные уплотнения гидроагрегатов. М.: Машиностроение, 1982. 109 с.
3. Дмитренко А.И. Анализ уплотнений проточной части насосов и турбин ТНА ЖРД // Научно-технический юбилейный сборник. КБ химавтоматики. ИПФ "Воронеж", 2001. С. 364 – 370.
4. Гуров В.И., Шестаков К.Н. Разработка криогенных турбонасосов. М.: Информконверсия, 2000. 132 с.
5. Банах Л.Я., Бугакова Т.В., Жеребчиков С.Н., Рудис М.А. Моделирование колебаний и прочность трубопроводов ЖРД при ударном нагружении // Проблемы машиностроения и автоматизации, №3, 2008. С. 87-93.
6. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел. Киев: «Наукова думка», 1969.
7. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Springer 2001, 330 p.

8. Hunt K.H., Grossley F.R.E. Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact. // ASME Journal of Applied Mechanics. - 1975. - No 6. - Vol. 42, Series E. Pp. 440-445.
9. Гробов В.А. Нестационарные колебания роторов турбомашин при прохождении через критические числа оборотов. Рига: РВИАВУ, 1959. 120 с.
10. Симоновский В.И. Устойчивость и нелинейные колебания роторов центробежных машин. Харьков.: Изд-во «Вища школа», 1986. 128 с.
11. Иванов А.П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
12. Banakh L., Nikiforov A. Vibroimpact regimes and stability of system “Rotor—Sealing Ring”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 308 (2007), pp. 785–793, online at <http://www.sciencedirect.com>
13. Banakh L., Nikiforov A., Panovko G. Vibroimpact Motion of Rotor taking into account Friction at the Contact. Proceedings of 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference «ENOC 2008», Saint-Petersburg (Russia). – Электрон. текстовые дан. на опт. диске (CD-ROM). – То же [Электронный ресурс]. URL: <http://lib.physcon.ru/?item=1605> (дата обращения: 18.01.2010).
14. Банах Л.Я., Никифоров А.Н. Контактное движение вала в упругих подшипниках скольжения и в плавающих уплотнительных кольцах // Сборник трудов XVI симпозиума «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем». М.-Звенигород: 2009. С.30-36.

Поступила: 17.09.10.