Резонансные периодические колебания ударного осциллятора

В.Ш. Бурд, В.Л. Крупенин

Аннотация. Рассматривается движение демпфированного ударного осциллятора под действием гармонической силы. Исследованы условия существования и устойчивости периодических резонансных режимов.

Ключевые слова: ударный осциллятор, переменные импульс-фаза, периодическая функция Грина, метод усреднения, резонансные периодические режимы.

1 Введение

Представления виброударных процессов через интегралы движения виброударной системы с одной степенью свободы и (или) их однозначных функций диктуется физикой виброударных систем. Соответствующие переменные (импульс - фаза) весьма естественны для колебательных процессов, сопровождающихся ударами. Импульс может трактоваться как силовая характеристика удара, фаза - как момент соударения.

При этом в случае мгновенного удара представления периодических виброударных процессов могут быть записаны через так называемые периодические функции Грина, определяемые только линейной частью системы. Периодические функции Грина фигурируют ниже либо в виде рядов Фурье, либо конечных соотношений на интервалах периодичности. Это обстоятельство очень важно: с одной стороны сила удара представима через δ-функцию Дирака и величины, зависящие от импульса и фазы удара, а с другой стороны именно упомянутые периодические функции Грина вычисляются посредством хорошо известных методов [1]. Такой подход был предложен В.И. Бабицким и М.З. Коловским [2].

Наша цель - дать корректное описание резонансных режимов движения в виброударных системах с одной степенью свободы.

Мы исследуем движение консервативного ударного осциллятора с одной степенью свободы под действием малого гармонического возбуждения.

Эта задача сводится к исследованию двумерной системы с быстро вращающейся фазой и разрывами по фазе.

Периодические возмущения гладких двумерных систем с быстро вращающейся фазой были изучены в [3].

2 Консервативный ударный осциллятор

Здесь мы следуем книге [1].

Рассмотрим линейную колебательную систему с уравнением движения

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0,$$

описывающую гармонические колебания тела единичной массы, укрепленного на пружине с жесткостью Ω^2. Фазовый портрет системы - эллипсы

$$H(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \Omega^2 x^2) = E = const.$$

Установим в точке $x = \Delta$ неподвижный ограничитель и будем предполагать, что по достижении координатой x значения Δ в системе происходит мгновенный упругий удар, так что если $x = \Delta$ в момент времени t_α, то выполняется соотношение

$$\dot{x}(t_\alpha - 0) = -\dot{x}(t_\alpha + 0). \tag{1}$$

При наличии зазора, когда $\Delta > 0$, эллипсы, соответствующие линейной системе, "разрезаются"вертикальной прямой $x = \Delta$ и истинным траекториям соответствуют их левые части. Если уровень энергии в линейной системе недостаточен для выхода на уровень $x = \Delta$, происходят линейные колебания с частотой Ω. При наличии соударений частота колебаний $\omega > \Omega$ и с увеличением энергии возрастает, но не может быть больше значения 2Ω, так что

$$\Omega < \omega < 2\Omega, \quad \Delta > 0. \tag{2}$$

При натяге $\Delta < 0$ частота колебаний ω удовлетворяет неравенству

$$2\Omega < \omega < \infty, \quad \Delta < 0. \tag{3}$$

При $\Delta = 0$ получаем эллипс, "разрезанный"точно пополам. Поэтому для всех значений энергии изображающая точка проходит любую фазовую траекторию за одно и то же время с удвоенной скоростью 2Ω, так что

$$\omega = 2\Omega, \quad \Delta = 0. \tag{4}$$

Условие (1) говорит о том, что изменение импульса Φ_0 в окрестности момента удара t_α имеет вид

$$J = \dot{x}_- - \dot{x}_+ = 2\dot{x}_-, \quad \dot{x}_- > 0,$$

где $\dot{x}_\alpha = \dot{x}(t_\alpha \mp 0)$.

Результирующая сила оказывается локализованной при $t = t_\alpha$. Поэтому

$$\Phi_0 \,|_{t=t_\alpha} = J\delta(t - t_\alpha) \tag{5}$$

причем

$$\int_{t_\alpha - 0}^{t_\alpha + 0} \Phi_0 dt = J.$$

Удары происходят периодически, когда $t_\alpha = t_0 + \alpha T$, где α - целое число, а T - период между ударами, вычисляемый при помощи равенства $T = 2\pi\omega^{-1}$ и (1)-(4). Поэтому при $\infty < t < \infty$ получаем T-периодическое продолжение (5)

$$\Phi_0 = J\delta_T(t - t_0),$$

где $\delta_T(t)$ - T - периодическая δ-функция.

Под решением уравнения

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x, \dot{x}) = 0 \tag{6}$$

можно понимать T-периодическую функцию $x(t)$, которая, будучи подставленной в это уравнение, обращает его в верное (в смысле теории обобщенных функций) равенство вида

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + J\delta_T(t - t_0) = 0,$$

где t_0 - произвольная постоянная, и для всех $\alpha = 0, \pm 1, \ldots$

$$x(t_0 + \alpha T) = \Delta, \quad J = 2\dot{x}_-(t_0 + \alpha T).$$

При этом выполняются ограничения

$$x(t) \leq \Delta, \quad \dot{x}_- > 0.$$

а периоды колебаний в зависимости от знака Δ соответствуют частотным диапазонам (2)-(4).

Для аналитического описания решения положим $t_0 = 0$. Тогда при $0 \leq t < T_0$ решение уравнения (6) имеет вид

$$x(t) = -J\kappa[\omega_0(J)(t - t_0), \omega_0(J)], \quad \kappa(t, \omega_0) = \frac{1}{2\Omega}\frac{\cos[\Omega(t - T_0/2)]}{\sin(\Omega T_0/2)} = \\ \frac{\omega_0}{2\pi\Omega^2} + \frac{\omega_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\omega_0 t}{\Omega^2 - k^2\omega_0^2}, \quad J(\omega_0) = -2\Omega\Delta\tan\frac{\Omega T_0}{2}, \quad J \geq 0,$$

причем третье соотношение определяет здесь при $\Delta \neq 0$ гладкую зависимость $\omega_0(J)$, а при $\Delta = 0$ получаем $\omega_0 = 2\Omega$.

Найденное представление следует продолжить по периодичности. Получим

$$\kappa(t, \omega_0) = \frac{\omega_0}{2\pi\Omega^2} + \frac{\omega_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\omega_0 t}{\Omega^2 - k^2\omega_0^2}.$$

Геометрические условия удара приводят к частотным интервалам (2)-(4). Отметим, что в случае $\Delta = 0$, решение $x(t)$ при $0 \leq t < \pi/\Omega$ имеет вид

$$x(t) = -\frac{J}{2\Omega}\sin\Omega t,$$

причем J - произвольная постоянная, не зависящая от частоты.

3 Возмущенный ударный осциллятор

Рассмотрим теперь возмущенный ударный осциллятор

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x, \dot{x}) = \varepsilon[f(t) - \gamma\dot{x}], \tag{7}$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $f(t) = a\sin(\nu t + \beta)$, $\gamma > 0$, a, ν, β - вещественные постоянные.

Положим $\psi = \omega_0 t$ и от уравнения (7) перейдем к системе в переменных J, ψ (импульс-фаза) с помощью замены

$$\begin{aligned} x &= -J\kappa[\psi, \omega_0(J)], \\ \dot{x} &= -J\omega_0(J)\kappa_\psi[\psi, \omega_0(J)], \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\kappa[\psi, \omega_0(J)] = \kappa(\psi, J) = \omega_0(J)^{-1}\left[\frac{1}{2\pi\Omega_0^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{\Omega_0^2 - k^2}\right], \quad \Omega_0 = \frac{\Omega}{\omega_0(J)}.$$

Замена (8) - негладкая; при $\psi = 2l\pi$, где l - целое число, функция κ_ψ имеет конечные разрывы, поэтому в новых переменных удары происходят, когда $\psi = 2l\pi$. Производя замену (8), придем к системе (см. [1])

$$\begin{aligned} \tfrac{dJ}{dt} &= -4\varepsilon\omega_0(J)[f(t) + \gamma J\omega_0(J)\kappa_\psi(\psi, J)]\kappa_\psi(\psi, J), \\ \tfrac{d\psi}{dt} &= \omega_0(J) - 4\varepsilon\omega_0(J)J^{-1}[f(t) + J\omega_0(J)\kappa_\psi(\psi, J)](-J\kappa(\psi, J))_J. \end{aligned} \tag{9}$$

Получили систему с быстро вращающейся фазой, где правые части периодичны по ψ и имеют конечные разрывы (κ_ψ) в точках $\psi = 2l\pi$. Зависимости $\omega_0(J)$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\omega_0(J) = \tfrac{\pi\Omega}{\pi - \arctan[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta > 0, \quad \Omega < \omega_0 < 2\Omega, \\ &\omega_0(J) = -\tfrac{\pi\Omega}{\arctan[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta < 0, \quad 2\Omega < \omega_0 < \infty, \\ &\omega_0 = 2\Omega = const, \quad \Delta = 0. \end{aligned}$$

Система (9) - это система с двумя медленными переменными J, τ и двумя быстрыми переменнными ψ, t. Существование и устойчивость стационарных резонансных режимов в таких системах будет исследоваться.

4 Построение усредненных уравнений

Мы используем метод усреднения на бесконечном интервале (см. [3]). Основная проблема, возникающая при применении метода усреднения - это выбрать подходящие замены переменных. Замены переменных дают возможность исключить быстрые переменные из уравнений движения с заданной точностью и затем разделить быстрые и медленные движения.

Пусть J_{pq} является решением уравнения

$$\omega_0(J_{pq}) = \frac{q}{p}\nu.$$

где p, q - взаимно простые целые числа. Сделав замену $\psi = \varphi + \frac{q}{p}\nu t$ мы преобразуем систему (9) в систему

$$\begin{aligned} &\tfrac{dJ}{dt} = -4\varepsilon\omega_0(J)[f(t) + \gamma J\omega_0(J)\kappa_\psi(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J)]\kappa_\psi(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J), \\ &\tfrac{d\varphi}{dt} = \omega_0(J) - \tfrac{q}{p}\nu - 4\varepsilon\omega_0(J)J^{-1}[f(t) + \gamma J\omega_0(J)\kappa_\psi(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J)]\times \\ &(-J\kappa(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J))_J. \end{aligned} \tag{10}$$

Точка $J = J_{pq}$ является резонансной точкой в системе (10).

Предположим, что резонанс невырожденный, т.е.

$$\left.\frac{d\omega_0}{dJ}\right|_{J=J_{pq}} = \omega_0'(J_{pq}) \neq 0. \tag{11}$$

Исследуем поведение решений системы (10) в $\mu = \sqrt{\varepsilon}$-окрестности резонансной точки J_{pq}. Выполним замену

$$J = J_{pq} + \mu z$$

и разложим правую часть системы (10) по степеням параметра μ. В результате получим систему

$$\begin{array}{l} \frac{dz}{dt} = \mu F_0(t,\varphi,J_{pq}) + \mu^2 F_1(t,\varphi,J_{pq})z + O(\mu^3), \\ \frac{d\varphi}{dt} = \mu\omega_0'(J_{pq})z + \frac{1}{2}\mu^2\omega_0''(J_{pq})z^2 + \mu^2 G_0(t,\varphi,J_{pq}) + O(\mu^3) \end{array} \tag{12}$$

где

$$F_0(t,\varphi,J_{pq}) = -4\omega_0(J_{pq})[f(t) + \gamma J_{pq}\omega_0(J_{pq})\kappa_\psi(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J + pq)]\times$$
$$\kappa_\psi(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J_{pq}),$$

$$F_1(t,\varphi,J_{pq}) = -4\frac{d}{dJ}\left\{\omega_0(J)[f(t) + \gamma J\omega_0(J)\kappa_\psi(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J)]\times\right.$$
$$\left.\kappa_\psi(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J)\right\}\Bigg|_{J=Jpq}.$$

$$G_0(t,\varphi,J_{pq}) = -4\omega_0(J_{pq})J_{pq}^{-1}[f(t) + \gamma J_{pq}\omega_0(J_{pq})\kappa_\psi(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J_{pq})]\times$$
$$(-\kappa(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J_{pq}) - J_{pq}\kappa_J(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J_{pq}).$$

Система (12) содержит только одну быструю переменную. t. Теперь сделаем стандартную замену метода усреднения для того чтобы исключить быструю переменную из правой части системы (12) с точностью до членов порядка μ^2. Эта замена ищется в виде

$$z = \xi + \mu u_1(\eta,t) + \mu^2 u_2(\eta,t,)\xi, \quad \varphi = \eta + \mu^2 v_2(\eta,t),$$

где функции $u_i(\eta,t)$, $(i=1,2)$, $v_2(\eta,t,\tau)$ - периодические по t с периодом $2\pi/\nu$.

Выполнив замену, получим систему

$$\begin{array}{l} \frac{d\xi}{dt} = \mu f_0(\eta) + \mu^2 f_1(\eta)\xi + O(\mu^3), \\ \frac{d\eta}{dt} = \mu\omega_0'(J_{pq})\xi + \frac{1}{2}\mu^2\omega_0''(J_{pq}))\xi^2 + \mu^2 g_0(\eta) + O(\mu^3), \end{array} \tag{13}$$

где $f_0(\eta)$, $f_1(\eta)$, $g_0(\eta)$ определяются как средние значения по t функций $F_0(t,\eta,J_{pq})$, $F_1(t,\eta,J_{pq})$, $G_0(t,\eta,J_{pq})$ соответственно:

$$f_0(\eta) = \frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi/\nu} F_0(t,\eta,J_{pq})dt,$$
$$f_1(\eta) = \frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi/\nu} F_1(t,\eta,J_{pq})dt,$$
$$g_0(\eta) = \frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi/\nu} G_0(t,\eta,J_{pq})dt.$$

Функции $u_i(\eta,t),\ (i=1,2),\ v_2(\eta,t)$ определяются как периодические решения по t с нулевыи средним значением из уравнений

$$\begin{array}{l}\frac{\partial u_1}{\partial t} = F_0(t,\eta,J_{pq}) - f_0(\eta),\\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = F_1(t,\eta,J_{pq}) - u_{1\eta}(\eta,t)\omega_0(J_{pq}) - f_1(\eta),\\ \frac{\partial v_2}{\partial t} = G_0(t,\eta,J_{pq}) - -u_1(\eta,t)\omega_0(J_{pq}) - g_0(\eta).\end{array}$$

5 Существование и устойчивость периодических решений

Пусть существует такая постоянная η_0, что

$$f_0(\eta_0) = 0, \quad 0 < \eta_0 < 2\pi. \tag{14}$$

и η_0 - простой корень уравнения (14) , т.е.

$$f_{0\eta}(\eta_0) \neq 0. \tag{15}$$

В этом случае усредненная система первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu f_0(\eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = \mu\omega_0'(J_{pq})\xi \tag{16}$$

имеет решение

$$\xi = 0, \quad \eta = \eta_0. \tag{17}$$

Линеаризуя правую часть системы (16) на решении (17), получим матрицу

$$A_0(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \mu f_{0\eta}(\eta_0) \\ \mu\omega_0'(J_{pq}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Если

$$\omega_0'(J_{pq})f_{0\eta}(\eta_0) > \sigma_0 > 0, \quad \sigma_0 = const, \quad \tau \in (-\infty,\infty), \tag{18}$$

то матрица $A_0(\mu)$ имеет вещественные собственные значения различных знаков. Тогда из стандартной теоремы метода усреднения на бесконечном интервале (см. [3,Theorem 9.4]) вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть существует такое число η_0, что имеет место равенство (14) и неравенство (17). Тогда в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности резонансной точки J_{pq} для достаточно малых ε существует единственное неустойчивое периодическое решение системы (9) с периодом $\frac{2\pi p}{\nu}$.*

Предположим теперь, что вместо неравенства (16) справедливо неравенство

$$\omega_0(J_{pq})f_{0\eta}(\eta_0,\tau) < \sigma_1 < 0, \quad \sigma_1 = const, \quad -\infty < \tau < \infty. \tag{19}$$

В этом случае собственные значения матрицы $A_0(\mu)$ будут чисто мнимыми. Чтобы исследовать задачу существования и устойчивости периодических решений системы

(13) в окрестности резонансной точки J_{pq}, мы должны использовать усредненные уравнения второго приближения

$$\begin{array}{l} \frac{d\xi}{dt} = \mu f_0(\eta) + \mu^2 f_1(\eta)\xi, \\ \frac{d\eta}{dt} = \mu\omega_0'(J_{pq})\xi + \frac{1}{2}\mu^2\omega_0''(J_{pq}))\xi^2 + \mu^2 g_0(\eta). \end{array} \tag{20}$$

Из условий (14), (18) и теоремы о неявной функции следует, что для достаточно малых μ существует такая единственная функция

$$w(\mu) = (\xi(\mu), \eta_0)$$

что $\xi(0) = 0$ и $w(\mu)$ - состояние равновесия системы (20). Линеаризуя систему (20) на этом состоянии равновесия, получим следующую матрицу

$$A_1(\mu) = \begin{pmatrix} \mu^2 f_1(\eta_0) & \mu f_{0\eta}(\eta_0) \\ \mu\omega_J(J_{pq}) & \mu^2 g_{0\eta}(\eta_0) \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что собственные значения матрицы $A_1(\mu)$ для достаточно малых μ имеют отрицательные вещественные части, если выполняется неравенство

$$f_1(\eta_0) + g_{0\eta}(\eta_0) < 0, \tag{21}$$

и положительные вещественные части, если выполняется неравенство

$$f_1(\eta_0) + g_{0\eta}(\eta_0) > 0. \tag{22}$$

Из теоремы о высших приближениях в периодическом случае (см. [3, Theorem 12.1]) следует, что для достаточно малых μ существует единственное периодическое решение $w(t,\mu) = (\xi(t,\mu), \eta(t,\mu))$ системы (13) с периодом $\frac{2\pi p}{\nu}$; это решение асимптотически устойчиво, если выполняется неравенство (21), и неустойчиво, если выполняется неравенство (22), причем $||w(t,\mu) - w(\mu)|| = O(\mu^3)$. Сформулируем полученный результат применительно к системе (9).

Теорема 2. *Пусть η_0 удовлетворяет равенству (14) и неравенству (18). Пусть справедливо неравенство*

$$f_1(\eta_0) + g_{0\eta}(\eta_0) \neq 0.$$

Тогда для достаточно малых ε система (9) имеет единственное периодическое решение с периодом $\frac{2\pi p}{\nu}$ в ε-окрестности резонансной точки J_{pq}. Это решение асимптотически устойчиво, если выполняется неравенство (21), и неустойчиво, если выполняется неравенство (22).

Теоремы 1 и 2 применимы к изучению резонансных решений в системе (10) с $f(t) = a\sin(\nu t + \beta)$. Резонансная точка определяется из уравнения

$$\omega_0(J_{pq}) = -\frac{\pi\Omega}{\pi - arctan\frac{J_{pq}}{2\Omega\Delta}} = \frac{q}{p}\nu. \tag{23}$$

Из уравнения (23) следует, что

$$\omega_0'(J_{pq}) > 0.$$

Чтобы вычислить $f_{0\eta}(\eta_0)$, нужно усреднить $F_0(t, \eta, J_{pq})$. Первое слагаемое этой функции имеет вид

$$-4\omega_0(J_{pq})a\sin(\nu t + \beta)\kappa_\psi(\eta + \frac{q}{p}\nu t). \tag{24}$$

Так как

$$\kappa_\psi(\eta + \frac{q}{p}\nu t) = -\omega_0(J_{pq})^{-1}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin k(\eta + \frac{q}{p}\nu t)}{\Omega_0^2 - k^2}, \quad \Omega_0 = \Omega[\omega_0(J_{pq}]^{-1},$$

то мы должны усреднить слагаемые вида

$$a\sin(\nu t + \beta)\sin k(\eta + \frac{q}{p}\nu t), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Легко видеть, что среднее значение функции (24) будет ненулевым тогда и только тогда, когда $q = 1$, $p = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для $q = 1$, $p = n$ оно равно

$$\frac{2a\nu^2}{\pi n(\Omega^2 - \nu^2)}\cos(n\eta - \beta).$$

Среднее значение второго слагаемого

$$-4\gamma J_{pq}\omega_0^2(J_{pq})\chi_\psi(\eta + \frac{q}{p}\nu t)\kappa_\psi(\eta + \frac{q}{p}\nu t)$$

равно

$$-\frac{\gamma J_{pq}}{2}\left(1 + \frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{pq}^2}\right).$$

При вычислении среднего значения использовано следующее равенство

$$\sin^{-2}\pi\Omega_0 = 1 + 4J^{-2}\Omega^2\Delta^2.$$

Следовательно, постоянная η_0 определяется как решение уравнения

$$\cos(n\eta - \beta) = \frac{\gamma J_{pq}\pi n}{4a\nu^2}(\Omega^2 - \nu^2)\left(1 + \frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{pq}^2}\right) = A_n. \tag{25}$$

Так как $A_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то уравнение (25) может иметь решения только для конечного числа значений n. Если уравнение (25) имеет решения для данного значения n $(|A_n| < 1)$, то эти решения определяются следующими формулами

$$\eta_{0l} = \frac{\beta}{n} \pm \frac{\arccos A_n}{n} + \frac{2l\pi}{n}, \quad l = 0, \ldots, n-1.$$

Вычисляя производную функции $f_0(\eta)$ в точках η_{0l}, получим

$$f_{0\eta}(\eta_{0l}) = \pm\frac{2a\nu^2}{\pi(\Omega^2 - \nu^2)}\sqrt{1 - A_n^2}, \tag{26}$$

и, следовательно, (26) имеет положительный знак в n точках и отрицательный знак в n точках. Простые вычисления аналогичные предыдущим показывают, что

$$f_1(\eta_0) + g_{0\eta}(\eta_0) < 0.$$

Теоремы 1 и 2 приводят к следующему результату.

Если резонансная точка J_{n1} является решением уравнения

$$\omega(J_{n1}) = \frac{\nu}{n},$$

тогда для достаточно малых ε уравнение (9) имеет n неустойчивых резонансных решений с периодом $\frac{2\pi n}{\nu}$ в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности резонансной точки J_{n1} и n асимптотически устойчивых резонансных периодических решений с периодом $\frac{2\pi n}{\nu}$ в ε-окрестности резонансной точки J_{n1}.

Литература

1. В.И. Бабицкий, В.Л. Крупенин Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985, 384 с.

2. В.И. Бабицкий, М.З. Коловский К исследованию резонансных режимов в виброударных системах.- Изв. АН СССР, МТТ, 1976, є 4, с. 88–91.

3. V. Burd, Method of Averaging for Differential Equations on an Infinite Interval. Theory and Applications, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, 2007.