

УДК 534.1

АВТОРЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

© М.Е.Герц, М.М.Герц,

Москва, Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

Аннотация. Выполнен динамический анализ предложенной схемы авторезонансной машины с электродинамическим вибровозбудителем для вибротранспортирования по плоскости, представленной системой с переменной структурой. Методом осреднения в первом приближении получены аналитические выражения параметров автоколебаний в переходных и стационарных режимах, исследована устойчивость последних. Выявлены причины появления обнаруженного ранее экспериментального эффекта. Энергия, накопленная на частотах, где она близка к максимально возможной, используется для выхода на частоты жестких режимов вынужденных колебаний. Адаптивные свойства машины по поддержанию максимальной скорости вибротранспортирования при изменении параметров позволяют рекомендовать предложенную схему возбуждения автоколебаний для вибропитателей и дозаторов сыпучих материалов, в ультразвуковых технологических системах с кавитацией и для диагностики.

Ключевые слова: авторезонансная машина, вибротранспортирование, автоколебания, динамика, устойчивость, переходные и стационарные режимы.

Эффективным путем при создании экономичных вибромашин, обладающих малыми материалоемкостью и мощностью двигателя, является использование резонанса. Уменьшение силы возбуждения приводит к большему проявлению нелинейных эффектов, некоторые из которых могут быть положены в основу проектирования.

Одной из причин постановки задачи послужил обнаруженный эффект при экспериментах по вибротранспортированию сухого песка по стальному лотку 1 резонансной машины рис.1 [1-3].

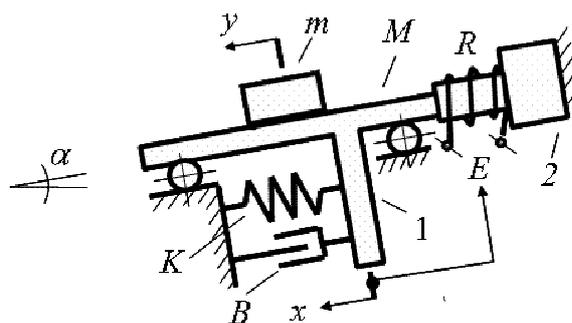


Рис.1

Тоненькая струйка песка при вынужденных колебаниях после переключения в режим автоколебаний превратилась в мощный поток, то есть расход и скорость вибротранспортирования возросли более чем на порядок. Варьирование частотами в обоих случаях показало, что эти характеристики близки к максимально достижимым. Автоколебания возбуждались на частоте, где при вынужденных колебаниях виброперемещения вообще не было. Причем, «затягивание» как из высших, так и из низших частот не приводило к возбуждению этого высокопроизводительного режима при вынужденных колебаниях.

Этот эффект не согласуется с теоретическими и экспериментальными результатами для резонансных машин с похожими обратными связями [4-6]. В них зависимость амплитуды от частоты при вынужденных колебаниях совпадала с аналогичной зависимостью для автоколеба-

ний при изменении параметра обратной связи. Ниже эффект выявляется даже в более простой модели, чем сыпучая среда.

1. В динамической модели машины рис. 1 лоток 1 массы M расположен под углом α к горизонту и связан с основанием пружинами общей жесткостью K с коэффициентом сопротивления B . Масса M включает также массу катушки и обмотки с сопротивлением R электродинамического вибровозбудителя 2. Напряжение E на обмотке формируется на выходе обратной связи по координате x лотка. Максимальная сила трения между точечной массой m и лотком определяется произведением $mgf \cos \alpha$, где f - коэффициент кулонова трения.

Уравнения движения масс авторезонансной машины при отсутствии остановок в относительных $x - y$ координатах- в абсолютных x, y имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon [D \operatorname{sgn} u + sf(\cos \alpha) \operatorname{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) - 2b\dot{x}], \\ Q\dot{u} + u &= Q\dot{x} - x, \\ \ddot{y} &= \varepsilon g[\sin \alpha - f(\cos \alpha) \operatorname{sgn}(\dot{y} - \dot{x})], \\ \max|\dot{x}| &> g(f \cos \alpha - \sin \alpha), \quad f \cos \alpha > \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\omega_0^2 = K/M$, $2b = (H^2 + BR)/MR$, $s = mg/M$, $D = E_0 H/MR$, x, y -соответственно координаты масс M и m (рис.1), $\varepsilon > 0$ - малый параметр, H - коэффициент электромеханической связи, $E = E_0 \operatorname{sgn} u$ - напряжение на обмотке вибровозбудителя в функции переменной u , $E_0 = \text{const} > 0$, $Q = \text{const} > 0$.

Первые два уравнения в (1) с точностью до ε^2 справедливы при малой индуктивности обмотки или использовании “статических” характеристик вибровозбудителей других типов при замене коэффициентов H, R, E_0 [6]. Второе уравнение относится к линейной части обратной связи, формирующей переменную u в функции координаты x , например, с помощью фазовращателя – электрического моста с попарно равными величинами сопротивлений R_1 и емкостей C , $Q = R_1 C$.

Первое неравенство является необходимым условием неустойчивости режима с совместным (без проскальзывания) движением масс. Второе неравенство соответствует условию равновесия массы m на неподвижном лотке. Малость членов первого уравнения определяется условием эффективности использования резонанса для получения максимальных амплитуд колебаний [7]. Стремление к уменьшению материалоемкости машины приводит к соизмеримости масс $m \sim M$, что по первому уравнению приводит к малому параметру во втором.

Предложенная модель рис.1 относится к синхронным авторезонансным машинам [8], в которых частота сигнала на входе вибровозбудителя (E) в первом приближении равна частоте автоколебаний. Вынужденные колебания машины (1) без обратной связи рассматривались в [1,3].

После стандартной замены переменных

$$x = A \cos \psi, \quad \dot{x} = -\omega_0 A \sin \psi, \quad \psi = \omega_0 t + \varphi, \quad (2)$$

используем метод [9] осреднения для систем с быстрыми u, t и медленными \dot{y}, A, φ переменными. В этом случае перед осреднением по времени t в первое уравнение (1) достаточно подставить стационарное значение $u = u^* = A \cos(\psi + \gamma)$, $\sin \gamma = 2\omega_0 Q / (\omega_0^2 Q^2 + 1)$, $\cos \gamma = (\omega_0^2 Q^2 - 1) / (\omega_0^2 Q^2 + 1)$ из второго уравнения (1) с учетом (2) [6]. Здесь γ имеет смысл фазы обратной связи.

После осреднения (1) получаем уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \varepsilon \omega_0^{-1} \{ 2\pi^{-1} D \sin \gamma - \omega_0 b A - 2sf\pi^{-1} (\cos \alpha) \cos[\arcsin(\dot{y} / \omega_0 A)] \} , \\ \dot{\varphi} &= -2\varepsilon D (\pi \omega_0 A)^{-1} \cos \gamma , \\ \dot{y} &= \varepsilon g [\sin \alpha - 2f\pi^{-1} (\cos \alpha) \arcsin(\dot{y} / \omega_0 A)] , \quad \omega_0 A > \dot{y} , \quad A > 0 . \end{aligned} \quad (3)$$

Из этих уравнений при $\dot{A} = 0, \dot{y} = 0, \dot{\psi}^* = \omega_0 + \dot{\varphi}^*$ после преобразований находим параметры стационарных режимов

$$\begin{aligned} A^* &= 2(\omega_0 \pi b)^{-1} [D \sin \gamma - sf (\cos \alpha) \cos(\frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2f})] , \\ \omega = \dot{\psi}^* &= \omega_0 - 2\varepsilon D (\pi \omega_0 A^*)^{-1} \cos \gamma , \\ V = \dot{y}^* &= \omega_0 A^* \sin(\frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2f}) , \end{aligned} \quad (4)$$

где ω - частота автоколебаний, V - скорость вибротранспортирования.

Первое неравенство в (1) для стационарных режимов (4), где $\psi_0^* = -\varphi_0^*$, $\ddot{x} = -\omega^2 A^* \cos(\omega t - \varphi_0^*)$, имеет вид

$$A^* > g \omega^{-2} (f \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (5)$$

Параметры автоколебаний A^*, ω при различных значениях Q получаем из (4) после исключения γ

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{-bF + \sqrt{16D^2 [(\omega_0 - \omega)^2 + b^2] - F^2 [16(\omega_0 - \omega)^2 + 15b^2]}}{2\pi \omega_0 [(\omega_0 - \omega)^2 + b^2]} , \\ F &= fmgM^{-1} (\cos \alpha) \cos(\frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2f}) . \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда следует, что вибротранспортирование $V \neq 0$ возможно только при превышении амплитуды напряжения E_0 определенного порога $E_0 > mgfRH^{-1} (\cos \alpha) \cos(\pi \operatorname{tg} \alpha / 2f)$, прямопропорционального коэффициенту трения f , что характерно для систем с кулоновым трением.

Оказывается, что выражение (6) совпадает с амплитудно- частотной характеристикой машины рис. 1 при вынужденных колебаниях $E = E_1 \cos \omega t, E_1 = 4E_0 / \pi$ из работ [1,3]. При этом параметр γ равен фазе вынужденных колебаний. Из (4) следует, что максимальная скорость вибротранспортирования достигается при частоте автоколебаний равной собственной частоте лотка $\omega = \omega_0, \cos \gamma = 0, \gamma = \pi / 2, Q = \omega_0^{-1}$.

Для исследования устойчивости стационарных режимов (4) получаем уравнения в вариациях δ из первого и третьего уравнений (3) при

$$\begin{aligned} A &= A^* + \delta A , \quad \dot{y} = \dot{y}^* + \delta \dot{y} \\ \dot{\delta A} &= -\varepsilon \omega_0^{-1} \{ [b \omega_0 + 2\pi^{-1} \omega_0^{-2} sf \dot{y}^* A^{*-3} \cos \alpha \cos^{-1}(\frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2f})] \delta A - \\ &[2\pi^{-1} \omega_0^{-2} sf \dot{y}^* A^{*-2} \cos \alpha \cos^{-1}(\frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2f})] \delta \dot{y} \} , \\ \dot{\delta \dot{y}} &= \varepsilon (\dot{y}^* A^{*-1} \delta A - \delta \dot{y}) 4g\pi^{-1} \omega_0^{-1} A^{*-1} \cos \alpha \cos(\frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2f}) . \end{aligned} \quad (7)$$

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости получаем из характеристического уравнения системы (7) $\lambda^2 + B_1\lambda + B_2 = 0$ с учетом (4) по критерию Раунса-Гурвица

$$B_1 > 0, B_2 > 0, B_1 = -b_{11} - b_{22}, B_2 = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, b_{11} = -b\omega_0 - 2\pi^{-1}\omega_0^{-2}\dot{y}^{*2}A^{*3}F, \\ b_{22} = -4MF / \pi f m A^*, b_{12} = 2\dot{y}^* F / \pi \omega_0^2 A^{*2}, b_{21} = 4\dot{y}^* MF / \pi f m A^{*2}.$$

Эти условия после преобразований сводятся к неравенству $\cos(\pi g \alpha / 2f) > 0$, которое выполняется по условиям существования решений (4),(6), причем каждое значение параметра Q однозначно определяет частоту и амплитуду автоколебаний. Поэтому, объяснение экспериментального эффекта будем искать при исследовании переходных процессов.

2. Вначале в первом приближении определим условия самовозбуждения автоколебаний. Вблизи положения равновесия динамической моделью машины является линейный осциллятор массы $m + M$ с коэффициентом демпфирования $b_1 = (H^2 + RB) / 2R(m + M)$ и обратной связью. Амплитуду автоколебаний находим после интегрирования первого уравнения (3) при $s = 0$, замене M на величину $m + M$ и начальным условием $A(0) = A_0$

$$A_1 = (A_0 - A_1^*) \exp(-b_1 t) + A_1^*, \quad (8)$$

$$A_1^* = 2\pi^{-1}\omega_0^{-1}b_1^{-1}D_1 \sin \gamma_1 = 8HQE_0(m + M) / \pi(H^2 + RB)(m + M + KQ^2),$$

где A_1^* - стационарное значение. Из (8) следует, что амплитуда стремится к стационарному значению из любых начальных условий, в том числе из нулевых $A_0 = 0$, то есть условия самовозбуждения выполняются.

Переходной процесс до установления режима вибротранспортирования состоит из двух этапов. Вначале, до выполнения условия проскальзывания масс (5), амплитуда определяется по выражению (8).

Если условие (5) не выполняется, то вибротранспортирования не происходит и только за один этап устанавливается стационарный режим с параметрами (4),(6) при замене в них M на $m + M$ и $s = 0, F = 0, V = 0$. Как показано в [6], этот режим устойчив. Зависимость амплитуды от частоты автоколебаний совпадает с амплитудно-частотной характеристикой линейного осциллятора при вынужденных колебаниях и показана кривой 1 на рис. 2а.

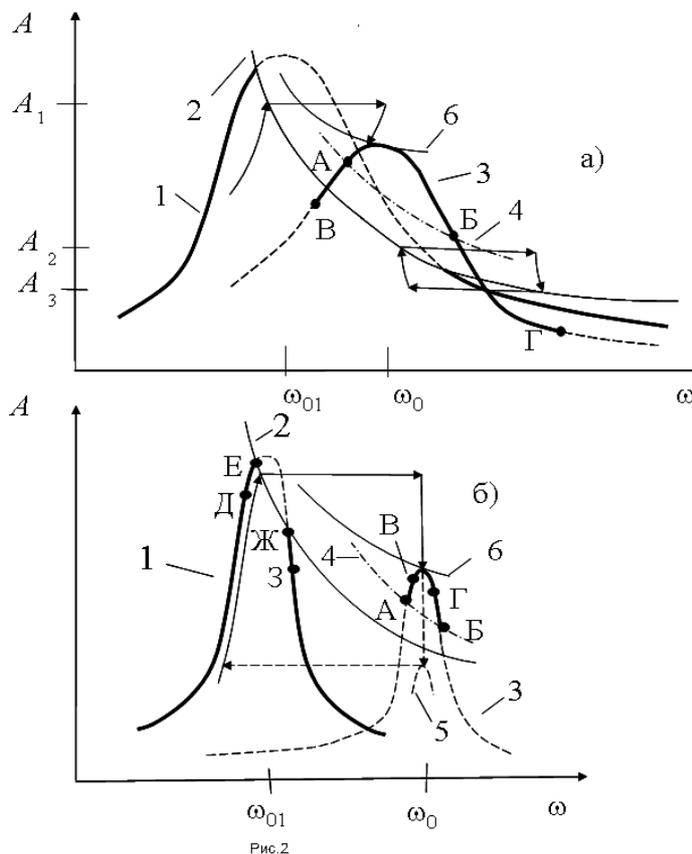


Рис.2

Граница (5) показана линией 2. Нереализуемый участок кривой 1 с амплитудами, отвечающими (5), показан штрихами. Значения параметра Q , соответствующие этому участку, определяют частотный диапазон самовозбуждающихся режимов вибротранспортирования.

На втором этапе система приобретает еще одну степень свободы и её переходной процесс описывается уравнениями (3) с начальными условиями конца предыдущего этапа. Таким образом, авторезонансная машина рассматривается как система с переменной структурой. При этом не используются уравнения для систем с переменной массой, так как относительная скорость масс M и m в момент разделения равна нулю.

Для важного практического случая $\omega_0 A^* \gg \dot{y}$, $\arcsin(\dot{y}/\omega_0 A) = \dot{y}(\omega_0 A)^{-1} + \varepsilon \dots$ после интегрирования (3) получаем

$$A = (A_{01} - A^*) \exp(-bt) + A^*, \quad (9)$$

где A_{01} - амплитуда на границе (5), A^* , ω - определяются из (4), $\gamma > \gamma_1$. Весь переходной процесс (8), (9) показан на рис. 2а сверху тонкими стрелками, кривая 3 соответствует (6). Процесс имеет вид рис. 3а, причем, на втором этапе коэффициент демпфирования меньше, а частота меняется скачком.

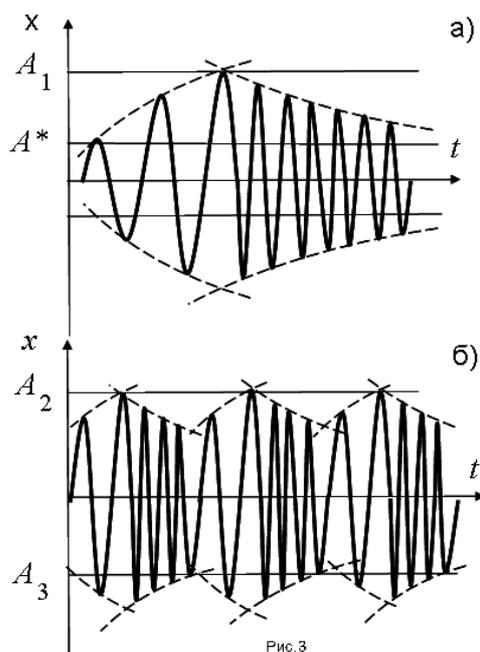


Рис. 3

Для случая $(A_{01} - A^*) / A^* \sim \varepsilon, \omega_0 A^* \gg \dot{y}$ скорость вибротранспортирования в переходном процессе определяется после интегрирования третьего выражения (3) с учетом (4) при $\dot{y}(0) = \dot{y}_0 = 0$

$$\dot{y} = [1 - \exp(-bt)]V. \quad (10)$$

Нулевая начальная скорость выбрана из очевидного рассуждения: максимумы абсолютного ускорения и координаты x в конце первого этапа рис. 3а достигаются при близком к нулю скоростям колебаний и абсолютной масс m, M перед разделением.

Другой тип переходного процесса с другим значением Q , при котором также происходит вибротранспортирование, показан стрелками справа на рис. 2а. После достижения величины A_2 и начала вибротранспортирования амплитуда автоколебаний падает до границы (5), начинается совместное движение масс в соответствии с (8), затем цикл повторяется (рис. 3б). Вопрос о стационарности или стохастичности этих режимов требует дополнительных обоснований, хотя решения с известной точностью определяются выражениями (8)-(10). Скорость вибротранспортирования при этом заведомо меньше, чем в случаях рис. 3а.

Следует отметить, что стационарные режимы (4) рис. 3а возможны только при отсутствии остановок в относительном движении масс. После замены переменных (2) задача определения стационарной скорости движения массы m по третьему уравнению в (1) сводится к классической задаче о вынужденном перемещении массы на вибрирующем основании по гармоническому закону с амплитудой A и частотой ω . Условие отсутствия таких остановок определяется по формулам [10] или диаграмме [11]

$$A^* > k\omega^{-2}, \quad (11)$$

где $k = const$ - находится по двум параметрам f, α . Кривая 4 рис. 2а по выражению (11) всегда выше кривой 3 и показана штрихами. Ниже кривой 4 на участках АВ и БГ кривой 3 реализуются режимы типа рис. 3б.

Каждому значению Q соответствует единственный режим автоколебаний. Параметры этих режимов изображены сплошными линиями на рис. 2а., нереализуемые участки характеристик 1,3 показаны штриховыми линиями.

Пример, объясняющий экспериментальный эффект рис 2б, отличается от примера рис. 2а уменьшенной величиной амплитуды напряжения E_0 . Машина с такими параметрами

в режиме вынужденных колебаний имеет изолированный участок резонансной кривой, найденный в [6]. Этот участок кривой 3 выше линии 2 с наиболее интенсивным вибротранспортированием достигается только путем жесткого возбуждения. Режим типа 3б с мягким возбуждением и малыми скоростями вибротранспортирования [1] реализуется на участке кривой 1, отмеченном штрихами. Остальные части кривой 1 соответствуют режимам с совместным движением масс.

При автоколебаниях реализуются области самовозбуждающихся режимов: ВГ типа рис. 3а на кривой 3 с вибротранспортированием, без него – сплошные участки кривой 1 рис. 2б. Режимы с жестким возбуждением автоколебаний располагаются на участках АВ и ГБ. На них после приложения внешнего импульса переходной процесс имеет вид рис. 3а. Здесь имеет место эффект «затягивания» автоколебаний. При увеличении параметра Q последовательно реализуются стационарные режимы на участках кривых ДЕ, ВГБ, ниже т. 3, при уменьшении Q - ЗЖ, ГВА, ниже т. Д.

Если точки В и Г располагаются ниже кривой 4, то жесткое возбуждение автоколебаний отсутствует. При этом последовательность режимов та же, что и на рис. 2а.

Любой из этих случаев объясняет экспериментальный эффект. Отметим, что жесткие режимы автоколебаний также наблюдались в эксперименте.

3. Таким образом, анализ переходных и стационарных самовозбуждающихся режимов позволяет кроме вибротранспортирования рекомендовать их применение в задачах дозирования. Для них можно улучшить результаты первого приближения при помощи формул, приведенных в [1,3].

Заметим, что при использовании вынужденных колебаний с маломощным вибровозбудителем (случай рис. 2б) без введения дополнительного привода (стартера) реализация таких режимов возможна только с применением следующей системы управления. Вначале на вибровозбудитель подается напряжение низкой частоты ($\sim \omega_{01}$), которое после начала относительного движения масс заменяется напряжением высокой частоты ($\sim \omega_0$) с той же амплитудой E_0 .

Обратная связь в (1) заменяет такую систему управления. Энергия, накопленная на частотах, где она близка к максимально возможной, используется для выхода на частоты жестких режимов вынужденных колебаний.

Применение авторезонансных машин для диагностики возможных срывов оборудования с основания или ослабления резьбовых соединений, особенно при наличии изолированных участков резонансных кривых, также понизит номинальную мощность вибровозбудителей. Здесь, интересным является случай взаимного расположения кривых 1, 5 (вместо 3). Автоколебания типа рис. 3б показаны на рис. 2б сплошной и штриховой стрелками. Повидимому, такой режим также был замечен в эксперименте. Наблюдались редкие непериодические удары со звоном, как у обрывающейся струны. «Опасные» характеристики типа 5 в режиме вынужденных колебаний экспериментально не определяются.

Основным недостатком резонансных машин является большая чувствительность к изменению параметров: собственной частоты, жесткости пружин, массы рабочего органа и др. При вибротранспортировании и дозировании масса сыпучего материала на лотке переменна. Резонансные частоты волновода ультразвукового оборудования зависят от температуры. В системе (1) используется простейшая модель взаимодействия волновода с жидкостью при развитии кавитации [1].

Авторезонансные машины обладают адаптивными свойствами поддержания резонансного режима [4-6,8]. В соответствии с (4) при $Q = const$ частота и амплитуда автоколебаний машины (1) при изменении жесткости будут соответствовать кривой 6 рис.2 а,б.

При изменении других параметров скорость вибротранспортирования также будет близка к максимально достижимой, соответствующей резонансу.

Главные результаты работы опубликованы в [12].

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект09-08-00941-а).

Литература

1. Герц М.Е., Герц М.М. Влияние привода на вибротранспортирование // Проблемы машиностроения и надежности машин.- 2008.- № 2. С. 22-27.
2. Герц М.Е., Герц М.М. Жесткое возбуждение вынужденных колебаний и автоколебаний в системах с переменной структурой // Вестник научно-технического развития. -2009.- № 7.-С.44-50.
3. Герц М.Е., Герц М.М. Жесткое возбуждение вынужденных колебаний в системе с переменной структурой // Вестник научно-технического развития. -2009.-№ 10.-С.3-8.
4. Асташев В.К., Герц М.Е. Возбуждение и стабилизация резонансных колебаний ультразвуковых стержневых систем // Акустический журнал. -1976. том. 22, вып. 2.-С. 192-200.
5. Герц М.Е., Макаров Н.С., Тресвятский А.Н. Экспериментальное исследование авторезонансных колебаний виброударной системы с электродинамическим приводом // Машиноведение. -1989.-№ 3.-С. 62-69.
6. Герц М.Е. Авторезонансные колебания в системе с инерционным самовозбуждением // Изв. РАН. Механика твердого тела.- 1994.- № 6.- С. 3-9.
7. Герц М.Е. Предельные возможности и эффективность резонансных машин // Машиноведение.- 1984.- № 5.- С. 15-22.
8. Герц М.Е., Герц М.М. Синтез авторезонансных машин // Проблемы машиностроения и надежности машин.- 2006.- № 2.- С. 22-27.
9. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.- М.: Наука, 1971.- 400 с.
10. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение.- М.: Наука, 1964.- 410 с.
11. Блехман И.И. Вибрационные процессы: Вибрации в технике. Справочник. Т.4.- М.: Машиностроение, 1981.- С. 13-36.
12. Герц М.Е., Герц М.М. Авторезонансные режимы вибротранспортирования // Проблемы машиностроения и надежности машин.- 2008.- № 5. С. 38-44.

Поступила: 07.05.10.