

УДК 517.443

МЕТОД АЛЬТЕРНИРОВАНИЯ И КОМПЕНСАЦИИ ФАЗЫ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ГАРМОНИК БЫСТРОПЕРЕМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

© Г.С. Ханян

Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва, Россия.

Аннотация. Работа посвящена вычислительным аспектам измерения фазы гармонического сигнала и рассматривается как развитие одной из частей впервые поставленной в [1] триединой метрологической задачи спектрального анализа – оценки амплитуд, частот и фаз гармоник колебательных процессов по результатам преобразования Фурье их аналоговых и цифровых реализаций. Проводится сравнительный анализ двух оригинальных методов измерения фазы – альтернирования и компенсации – с демонстрацией преимущества первого над вторым для обоснования концепции правильного выбора начала отсчета времени наблюдаемого фрагмента сигнала.

Ключевые слова: преобразование Фурье, гармонический сигнал, эффект просачивания, искажение фазы, альтернирование и компенсация фазы, погрешности.

1. Задача измерения начальной фазы как таковой, в силу относительного характера этой величины, является, вообще говоря, косвенной, вспомогательной задачей метрологии. Интерес в большинстве приложений представляет разность фаз колебаний на данной частоте, а не абсолютное значение начальной фазы отдельно взятого колебания. В последнее время, тем не менее, появляются идеи использования фазы для повышения точности измерения частоты (см., например, обзорную работу [2]), что предопределяет актуальность методов повышения точности измерения фазы эталонного сигнала – гармонического колебания ограниченной длительности, и, в силу принципа суперпозиции, распространяемых на сложные полигармонические процессы (вибрации, пульсации давления и т.д.).

2. Рассматриваемый в качестве объекта измерения гармонический сигнал

$$s(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0); \quad (h-1/2)T \leq t < (h+1/2)T \quad (1)$$

с неизвестными параметрами – частотой f_0 , амплитудой a_0 , начальной фазой φ_0 – принимается реальным или гипотетическим измерительно-вычислительным устройством, характеризуемым параметрами «настройки» – длительностью реализации T и индексом окна обзора h , указывающим на абсолютные моменты времени начала и окончания приема сигнала. Измерение заключается в вычислении дискретной спектральной функции

$$S_m = \frac{1}{T} \int_{(h-1/2)T}^{(h+1/2)T} s(t) e^{-i2\pi mt/T} dt, \quad (2)$$

компоненты которой служат для построения дискретных спектров амплитуд и фаз

$$A_m = 2|S_m|, \quad \Phi_m = \arg S_m; \quad m = 1, 2, \dots, m_0, \dots \quad (3)$$

наблюдаемого фрагмента сигнала (1). Параметры сигнала оцениваются, исходя из структуры спектров (3) в окрестности $m' = m - m_0$ бина m_0 , представляющего собой адрес максимального пика спектра амплитуд и определяемого на практике перебором и сравнением его компонент. При небольших значениях m' (несколько бин) поведение спектров A_m и Φ_m описывается выведенными в [1] формулами

$$A_{m_0+m'} = \frac{a_0}{\pi} \left| \frac{\sin \pi \mu_0}{\mu_0 - m'} \right|, \quad \Phi_{m_0+m'} = \varphi_0 + 2\pi h \mu_0 + \pi \left[-\frac{\text{sign}(\mu_0 m')}{2} \right] + \pi m' (1 - 2h). \quad (4)$$

Формула для оценки начальной фазы вытекает из спектра фаз (4) при $m'=0$:

$$\varphi_0 = \Phi_{m_0} - 2\pi h \mu_0. \quad (5)$$

Целью настоящей работы является исследование границ применимости этой формулы.

3. Параметр μ_0 в (4) и (5) по своему определению представляет дробный добавок к округленной безразмерной частоте сигнала $f_0 T$, располагаемой как раз по адресу максимума спектра амплитуд:

$$\mu_0 = f_0 T - m_0, \quad m_0 = [f_0 T + 1/2]; \quad -1/2 \leq \mu_0 < 1/2. \quad (6)$$

Он находится из (4) при $m' = \pm 1$ исключением числителя из выражений для компонент спектра амплитуд, смежных с максимальным пиком:

$$\mu_0 = \frac{A_{m_0+1} - A_{m_0-1}}{A_{m_0+1} + A_{m_0-1}}. \quad (7)$$

Оттуда же, при $m'=0$ получается формула для восстановления амплитуды, а из (6) – формула для поправки частоты гармонического колебания:

$$a_0 = A_{m_0} \frac{\sin \pi \mu_0}{\pi \mu_0}, \quad f_0 = \frac{m_0 + \mu_0}{T}. \quad (8)$$

Перейдем к анализу формулы (5), совместно с (8) решающей задачу оценки параметров гармонического колебания. Отметим сначала, что известный недостаток дискретного спектрального анализа – эффект просачивания (наличие в спектре амплитуд «паразитных» боковых составляющих, убывающих по мере удаления от максимального пика), главным образом обусловлен параметром μ_0 , что очевидно из структуры спектра амплитуд (4). Неожиданным здесь является то, что просачивание в сочетании с индексом h приводит к другому, малоизученному в литературе, отрицательному эффекту – искажению начальной фазы сигнала, достигающему, согласно компенсирующей фазу формуле (5), величины $2\pi h \mu_0$, игнорирование которой (ввиду случайности μ_0 в практике цифровой обработки сигналов) делает результат измерения фазы неопределенным.

Фаза, понимаемая в пределах $\pm\pi$ (после отбрасывания целого кратного 2π), не искажается, если произведение $h\mu_0$ – целое число. В частности, нет искажения при $\mu_0=0$, т.е. при отсутствии просачивания (спектр амплитуд есть « δ -функция» – с пиком a_0 на целочисленной частоте $f_0 T = m_0$ и нулями на других m). Однако более интересным с теоретической и полезным с практической точки зрения представляется случай $h=0$ – когда процесс наблюдается в окне $-T/2 \leq t < +T/2$. Тогда искажение отсутствует при любом μ_0 . В этих, естественных временных границах, в силу принципа суперпозиции, начальная фаза любой гармоники процесса должна быть равна компоненте спектра фаз по адресу этой гармоники в спектре амплитуд. Таким образом, нулевой индекс занимает привилегированное место среди прочих значений h – в отличие от нередко преподносимой методологии изложения теории рядов Фурье, когда коэффициенты ряда строят

интегрированием функции от 0 до T , т.е. с предполагаемым по умолчанию индексом обзора $h=1/2$.

4. Займемся дальнейшим обоснованием аргументации в пользу индекса $h=0$. Сделаем замену переменной в (2), сдвигая пределы интегрирования в отмеченные значениями $h=0$ и $h=1/2$ границы:

$$S_m = e^{-i2\pi mh} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t+hT) e^{-i2\pi mt/T} dt \right) = e^{i\pi m(1-2h)} \left(\frac{1}{T} \int_0^T s(t+(h-1/2)T) e^{-i2\pi mt/T} dt \right). \quad (9)$$

Видно, что в обоих случаях, в круглых скобках (9) вычисляются коэффициенты ряда Фурье от точной копии реализации сигнала (1), «параллельным переносом» размещенной в окне с индексом 0 или 1/2, присущем уже не процессу, а обрабатываемому его измерительно-вычислительному устройству. Специфика, связанная с индексом h самого процесса, вынесена за скобки в виде экспоненциального множителя, структура которого выглядит проще при интегрировании в пределах $\pm T/2$. Несмотря и на этот довод, имеется веская причина, вынуждающая придерживаться интегрирования указанной копии сигнала в пределах от 0 до T . Дело в том, что практическая реализация спектрального анализа основывается на алгоритме быстрого преобразования Фурье, который составлен так, что вычисляет дискретное преобразование Фурье (ДПФ), приближающее конечной суммой именно второй из интегралов в (9). Если ввести для него обозначение S'_m , то собственно спектральная функция S_m сигнала $s(t)$, его спектр амплитуд и фаз будут выглядеть так:

$$S_m = e^{i\pi m(1-2h)} S'_m, \quad A_m = A'_m, \quad \Phi_m = \Phi'_m + \pi m(1-2h); \quad A'_m = 2|S'_m|, \quad \Phi'_m = \arg S'_m. \quad (10)$$

С точки зрения организации вычислений это означает, что формулу (5) следует переписать так:

$$\varphi_0 = \Phi'_{m_0} + \pi m_0(1-2h) - 2\pi h\mu_0. \quad (11)$$

С другой стороны, в [1] показано, что спектральную функцию (2) можно вычислять в обход промежуточной концепции S'_m , обеспечивая прямое пользование формулой (5) вместо (11):

$$S_m = \frac{1}{T} \int_0^T s'(t) e^{-i2\pi mt/T} dt. \quad (12)$$

Преобразование Фурье выполняется при этом не от целой сдвинутой копии сигнала, а от функции

$$s'(t) = s\left(t + \left[h + \frac{j}{2}\right]T\right), \quad \frac{1-j}{2} \left\{h + \frac{j}{2}\right\} \leq \frac{t}{T} < \frac{1-j}{2} + \frac{1+j}{2} \left\{h + \frac{j}{2}\right\}; \quad j = \pm 1, \quad (13)$$

состоящей на полуинтервале $0 \leq t < T$ из двух фрагментов исходной реализации $s(t)$, получаемых с помощью операций «целая и дробная часть числа» и отмеченных двузначной переменной j .

5. Проанализируем дилемму «либо «штрихованная» спектральная функция S'_m в (10), либо «штрихованная» реализация сигнала $s'(t)$ в (12)» в отношении двух особых значений индекса h .

При $h=1/2$ (традиционный метод выполнения ДПФ) исходная и вспомогательная реализации сигнала совпадают: $s(t) = s'(t)$. При этом совпадают и формулы поправки фазы (5) и (11):

$$\varphi_0 = \Phi_{m_0} - \pi\mu_0 = \Phi'_{m_0} - \pi\mu_0. \quad (14)$$

Это означает, что преобразование Фурье следует выполнять от исходных данных, однако при этом фаза будет искажена на $\pi\mu_0$, и для ее исправления (компенсации) эту величину необходимо вычитать из «пиковой» фазы (располагаемой в спектре фаз по адресу пика спектра амплитуд).

При $h=0$ (рекомендуемый метод спектрального анализа) эффект просачивания не влияет на результат измерения фазы, поскольку параметр μ_0 исчезает из формул (5) и (11):

$$\varphi_0 = \Phi_{m_0} = \Phi'_{m_0} + \pi m_0, \quad (15)$$

однако при вычислении спектров по методу (9)-(11) необходима поправка «пиковой» фазы на $\pm\pi$, но только в случае, если адрес максимального пика спектра амплитуд m_0 окажется нечетным числом. В то же время за результат измерения начальной фазы можно без всяких условий принимать «пиковую» фазу, если спектр фаз вычислять от функции (13), принимающей вид

$$s'(t) = s(t), \quad 0 \leq t < T/2; \quad s'(t) = s(t-T), \quad T/2 \leq t < T \quad (16)$$

и представляющей, как нетрудно убедиться, переставленные во времени левую и правую «половинки» исходной реализации сигнала. На практике такую перестановку можно осуществить переадресацией отсчетов цифровой реализации сигнала (разумеется, до выполнения ДПФ).

Назовем, для терминологической определенности, способ измерения начальной фазы при $h=0$ методом альтернирования – ввиду знакопеременной добавки πm_0 в (15), а способ измерения фазы при $h=1/2$ – методом компенсации (ввиду добавки $-\pi\mu_0$ в (14), компенсирующей просачивание).

6. Для сравнения точности этих методов, а также для оценки погрешности измерения фазы при других значениях h (при сочетании альтернирования с компенсацией), были проведены численные эксперименты. Моделировались N -точечные цифровые реализации сигнала (1), к которым подмешивался шум, генерируемый датчиком равномерно распределенных случайных чисел:

$$s_n^{(l)} = a_l \cos\left(2\pi f_l T \frac{n}{N} + \varphi_l\right) + b_l r_n; \quad 0 < |r_n| < 1; \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad h_l - \frac{1}{2} \leq \frac{n}{N} < h_l + \frac{1}{2}; \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (17)$$

Во всех случаях длина цифровой реализации составляла $N=1024$ отсчетов при длительности $T=1,024$ сек. Амплитуда гармонического сигнала задавалась постоянной для всех L реализаций: $a_l=1$, так что параметр b_l представлял, в определенном смысле, интенсивность шума – отношение амплитуды (полуразмаха) шумовой составляющей процесса к амплитуде полезного сигнала.

На рис. 1 приведены результаты экспериментов по сравнению метода альтернирования ($h_l=0$) с методом компенсации фазы ($h_l=1/2$). Фаза в модели (17) задавалась равной нулю: $\varphi_l=0$ для $L=500$ реализаций. Интенсивность шума нарастала по ступенчатому закону $b_l = [(l-1)/100]/2$ – на 0,5 единиц через каждые 100 реализаций (в течение первых 100 реализаций генерировалась чистая синусоида). Безразмерная частота сигнала возрастала по формуле $f_l T = m_l + \mu_l = 1,01l - [0,01l]$ – так, что параметр $\mu_l = \{0,01l + 0,5\} - 0,5$ описывал «пилообразную» периодическую функцию с периодом, равным 100 реализаций, изменяясь на протяжении первого полупериода от 0 до 1/2, второго – от -1/2 до 0.

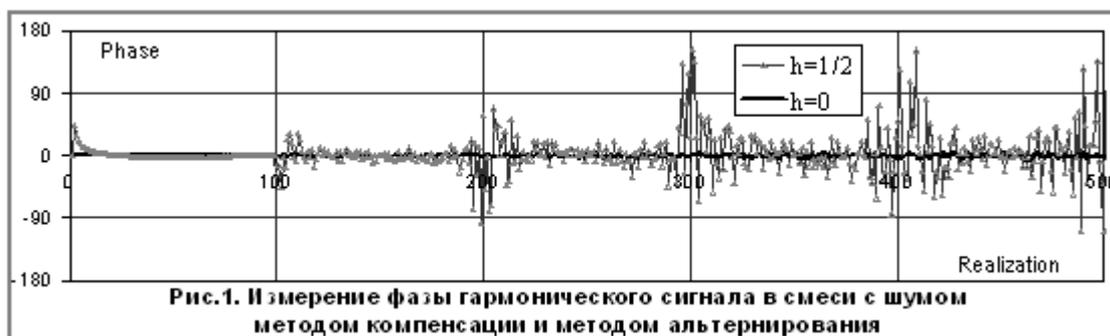


Рис.1. Измерение фазы гармонического сигнала в смеси с шумом методом компенсации и методом альтернирования

Видно неоспоримое преимущество метода альтернирования над методом компенсации фазы. Во всем диапазоне $0 \leq b_l \leq 2$ зашумленность сигнала слабо влияет на альтернирование, но сильно искажает результат компенсации фазы – особенно при малых μ_l (в районе 100-ой, 200-ой и т.д. реализации), что объясняется тем, что в формуле (7) боковые компоненты спектра амплитуд малы («тонут» в шуме). Дополнительные эксперименты показали, что метод альтернирования выдерживает проверку вплоть до интенсивности шума $b_l \approx 8$ (когда в шуме «тонет» уже максимальный пик).

На рис. 2 приведены результаты экспериментов для трех значений h с целью исследования влияния этого параметра на погрешность измерения начальной фазы чистого гармонического сигнала ($b_l=0$). Частота f_l для $L=500$ реализаций изменялась как в предыдущем исследовании.

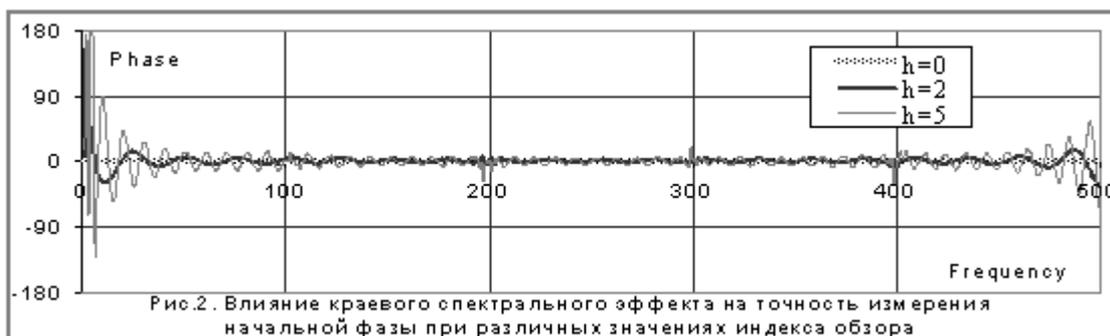
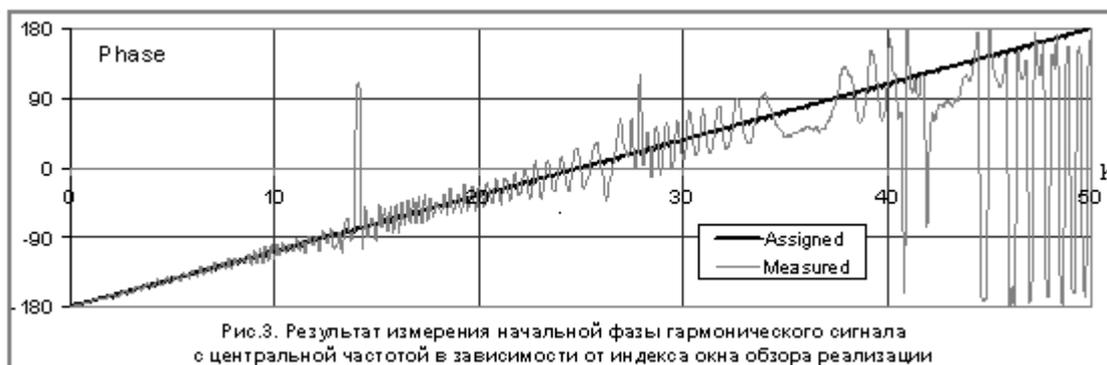


Рис.2. Влияние краевого спектрального эффекта на точность измерения начальной фазы при различных значениях индекса обзора

Здесь при ненулевых значениях h отчетливо проявляется краевой эффект (колебание фазы на низких и высоких частотах сигнала). Это явление, существенно менее значимое для спектра амплитуд, обусловлено наложением «зеркально» отраженных компонент ДПФ на основную область определения спектра. С увеличением h краевой эффект усиливается. Тем не менее, вплоть до $h=5$ можно утверждать, что при отступлении от краев спектра на 10% от полной ширины полосы частот, погрешность измерения фазы не превысит $\approx 10^\circ$. При дальнейшем увеличении h кривые приобретают «пилообразный» вид ($50 < h < 200$), а при $h > 500$ теряют всякую регулярность.

На рис. 3 показана степень влияния индекса h на погрешность измерения фазы чистого гармонического сигнала с наиболее благоприятной для этого частотой – равноудаленной от краев спектра (при $m_l=N/4$, но с вариацией μ_l по пилообразному закону). Начальная фаза в модели (17) проходила весь диапазон $\pm 180^\circ$ по линейному закону $\varphi_l = 2\pi(l/L - 1/2)$,

возрастая на один градус после каждой из $L=360$ реализаций. Индекс обзора возрастал от 0 до критического значения 50 по линейному закону $h_l = 50/L$. Почти прямая линия соответствует фазе, полученной по формуле (11) с использованием априорных, заданных программой, точных значений μ_l , в то время как изрезанная кривая представляет фазу, в поправке $2\pi h_l \mu_l$ которой участвуют μ_l , измеренные по (7).



Практически идеальное поведение первой из представленных фазовых характеристик говорит о высокой точности (до 1°) вычисления собственно «пиковой» фазы (из которой вычитается детерминированная поправка, которая, напомним, всегда равна нулю в методе альтернирования). Поведение второй характеристики, осциллирующей по обе стороны от первой (с линейного вида огибающей) убедительно свидетельствует о том, что погрешность в задаче измерения начальной фазы φ_0 гармонического сигнала (1), будучи пропорциональной индексу h , в основном обусловлена погрешностью измерения параметра μ_0 , ответственного за эффект просачивания. Она тем меньше, чем больше просачивание (на что указывают выбросы на $l=100, 200, 300$ – при $\mu_l \approx 0$).

7. Основной вывод настоящего исследования состоит в том, что в приложениях, где нет четкой привязки к абсолютным границам времени наблюдения сигнала (эргодический случай), реализациям процесса целесообразно назначать индекс $h=0$ и применять наиболее точный из установленных математических способов измерения начальной фазы – метод альтернирования. В задачах ретроспекции данных ($h>0$) или прогнозирования данных ($h<0$) следует считаться с увеличением погрешности измерений из-за неточностей учета эффекта просачивания.

Литература

1. Ханян Г.С. Аналитическое исследование и оценка погрешностей в задаче измерения параметров гармонического сигнала методом преобразования Фурье // Измерительная техника. 2003. № 8. С. 3-10.
2. Fowler, M.L., Phase-Based Frequency Estimation: A Review, Digital Signal Processing, 12 (2002) 590–615.

Поступила: 03.02.10.