

УДК 534.1

ВИБРОУДАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ УДАРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ С ВИБРИРУЮЩИМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

© В.Л. Крупенин

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

***Аннотация.** Изучаются виброударные процессы, порождаемые распределенным ударным элементом, в качестве которого выступает заземленная на концах струна, взаимодействующая с вибрирующими препятствиями: с прямой, колеблющейся по некоторому закону стенкой, расположенной по одну сторону от оси статического равновесия струны или двумя с такими стенками, установленными с двух сторон от этой оси. Образующиеся стоячие волны могут иметь трапецевидные профили. При их реализации, точки струны в течение половины каждого периода колебаний либо равномерно движутся, либо покоятся. Показано, что распад трапецевидных волн может быть объяснен возникновением стохастического ускорения.*

Ключевые слова: удар, струна, распределенные ударные элементы, стохастическое ускорение.

1. Рассмотрим плоские колебания линейной, заземленной на концах струны, соударяющейся с прямой абсолютно жесткой вибрирующей стенкой, остающейся, параллельной оси статического равновесия (рис.1,а) или такую же струну, расположенную между двумя стенками, каждая из которых может вибрировать или одна стенка может быть неподвижной (рис.1,б). Для определенности ограничимся задачей с одним вибрирующим ограничителем, предполагая рассмотреть другие задачи этого класса в последующих работах.

Итак, рассмотрим плоские колебания линейной, заземленной на концах струны, соударяющейся с прямой абсолютно жесткой вибрирующей стенкой, остающейся, параллельной оси статического равновесия. Пусть искомым прогиб есть $u(x, t)$, $-1/2 \leq x \leq 1/2$ - закон T-периодических колебаний стенки в абсолютной системе координат $h(t) = -\Delta - \varepsilon h_1(t) < 0$ ($\varepsilon > 0$ -параметр). Считая натяжение и плотность единичными, имеем (см. [1—4])

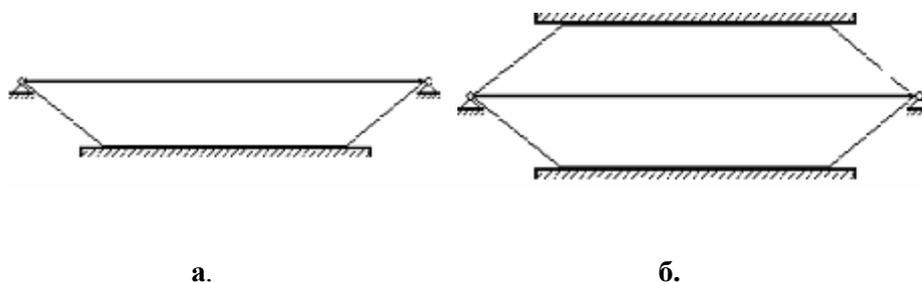


Рис.1

$$u \geq 0, \quad u(1/2, t) = 0, \quad u(x, t) \geq h(t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (1)$$

В отсутствие контакта в первом соотношении (1) реализуется равенство, а в третьем — строгое неравенство. Во время контакта в третьем соотношении реализуется равенство, а в первом, в силу того, что ограничитель действует "от себя", — неравенство. Удар будем вначале считать абсолютно упругим:

$$u_t(x_0, t_0+0) = -u_t(x_0, t_0-0) + 2h(t_0), \quad u(x_0, t_0) \equiv h(t_0). \quad (2)$$

Разыскиваемые обобщенные решения [5] должны удовлетворять также условию [1-4].

$$\text{supp} \square u \subset \{(x, t); u(x, t) = h(t)\}. \quad (3)$$

Будем искать периодические решения данной задачи, имеющие периоды, кратные T .

2. Рассмотрим вырожденную консервативную систему (1)-(3) при $\varepsilon = 0$: $h(t) = -\Delta = \text{const}$. Ограничимся колебаниями, в определенном смысле подобными устанавливающимся при реализации первой формы колебаний линейной струны, и будем считать, что начальный профиль $u_0(x)$ имеет единственный максимум $u_0^* > \Delta$, а начальное распределение скоростей — нулевое.

В работах [3, 5, 9] (см. также [4]) доказано, что тогда существует единственное двухпараметрическое семейство стоячих волн (называемых также хлопками [7]), сохраняющих периодичность вне зависимости от метрических соотношений между длиной струны (здесь равной 1) и величиной зазора (Δ).

Хлопки имеют трапециевидные профили, подобные показанным на рис. 1 (здесь координата удара не $-\Delta$, а $-\Delta - \varepsilon$; см. далее); меньшие основания трапеций равномерно движутся вверх или вниз; в крайнем верхнем положении они вырождаются в точку; в крайнем нижнем положении происходит удар. Любые другие типы начальных условий данного класса дают периодические режимы только при соизмеримости длины струны и величины Δ , а, вообще говоря, все движения почти периодичны и их можно представить как $A[y_1(x, t), y_2(x, t)]$, где функция A описывает хлопок.

Функции $y_{1,2}$ однозначно определяются начальными условиями. Поэтому, хотя хлопки порождаются весьма частными начальными условиями ($u_t(x, 0) = 0$, $u(x, 0) = u_0^*(1-2|x|)$), их роль в механике систем такого рода принципиальна [1, 3, 4, 6]. В работах [7, 4] даны результаты экспериментов, свидетельствующие, что в режимах вынужденных колебаний проявление характерных нелинейных резонансных эффектов сопровождается именно возникновением хлопков. Далее этому результату дается теоретическая трактовка.

Семейство хлопков $A[J, \omega_0(J); x, t - \psi]$ определяется параметрами J и ψ — плотностью импульса и фазой удара ($\text{const}(x)$); частота колебаний $\omega_0(J) = 2\pi T_0^{-1}$. Считая, что момент контакта отрезка удара (его длина $l_0 = 1 - 2\Delta v^{-1}$, $v = 1/2 J$ — модуль скорости его движения) с ограничителем приходится на начало отсчета времени, пользуясь известным [8] представлением, запишем

$$A(J, \omega_0; x, t) = \frac{2J}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin[\frac{1}{2}(2n-1)\pi l_0] \sin[(2n-1)\pi \times (x + \frac{1}{2})] \chi_{2n-1}(t), \quad (4)$$

где $X_{2n-1} - T_0$ - периодические функции Грина [9] линейных осцилляторов с частотами $\{(2n-1)\pi\}$. При $0 \leq t < T_0$

$$X_{2n-1}(t) = [2(2n-1)\pi \sin \frac{1}{2}(2n-1)\pi T_0]^{-1} \cos [(2n-1)\pi(t - \frac{1}{2}T_0)];$$

для всех $t \in R$ данное представление продолжается по периодичности.

Проверка выполнимости условий (1)-(3) ($\varepsilon = 0$) для стоячей волны (4) проводится в [5, 6]. Кроме того, выполняются соотношения: $u_0^* = 1/4 J$; $\pi < \omega_0 < 2\pi$;

$$J(\omega_0) = 4\omega_0 \Delta (2\pi - \omega_0)^{-1}; \quad I(\omega_0) = 8 \Delta (1 - \pi \omega_0^{-1} - 1)^{-1}, \tag{5}$$

где u_0^* — максимальная высота подъема средней точки струны, $I = J l_0 > 0$ — полный импульс удара. При $\omega_0 \rightarrow 2\pi$ энергия волны неограниченно растет; при $\omega \rightarrow \pi$ (частоте первой формы линейных колебаний) отрезок удара вырождается в точку: $I(\pi) = 0$. Таким образом, имеется прямая аналогия между движением (4) и движением традиционного "ударного осциллятора" — системы с одной степенью свободы [5,9].

3. В возмущенной системе (1) —(3) ($\varepsilon \neq 0$) будем искать периодические стоячие волны периода nT , сохраняющие трапециевидные профили. При этом механически корректно введение аналога гипотезы Ньютона о коэффициенте восстановления. Обсуждение проблемы корректности тех или иных моделей рассеяния энергии при ударе выходит за рамки данной работы

Пусть $0 < R < 1$. Не изменяя условий (1) и (3), положим вместо (2)

$$u_t(x_0, t_0 + 0) = -R u_t(x_0, t_0 - 0) + (1 + R) \dot{h}(t_0). \tag{6}$$

Ввиду того, что конфигурации двухпараметрического семейства (4) заданы, хлопки можно характеризовать парой переменных (v_k, t_k) , где v_k — модуль скорости каждой точки отрезка удара перед k -м соударением, приходящимся на момент t_k . Между ударами струна линейна (период колебаний равен 2). Поэтому

$$v_{k+1} = R v_k + (1 + R) \dot{h}(t_k), \quad t_{k+1} = t_k + 1 + 2 | \dot{h}(t_k) | v_{k+1}^{-1}. \tag{7}$$

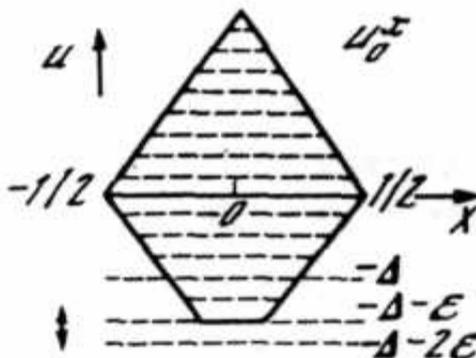


Рис.2

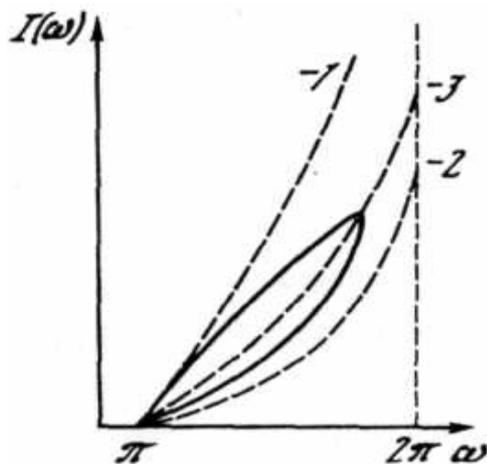


Рис.3

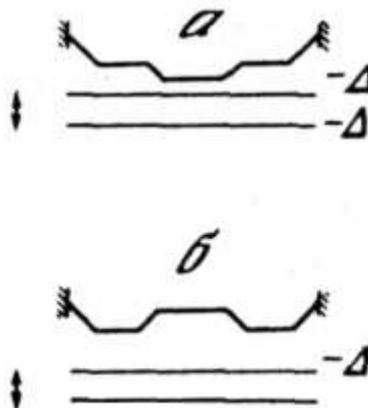


Рис. 4.

Для субгармонических режимов $1:n$ предполагается, что частота движения ω_n^{-1} ($\omega = 2\pi T^{-1}$) лежит в интервале собственных частот двухпараметрического семейства (4) : $\pi < \omega/n < 2\pi$. Положим $h(t) = -\Delta - \epsilon - \epsilon \cos \omega t$ ($\epsilon < \Delta$).

Записав условия периодичности: $v_k = v_{k+1} \equiv v$, $t_k = knt + \varphi$ (φ — неизвестная фаза), получим из (7)

$$v(1 - R) = (1 + R) \epsilon \omega \sin \varphi, \quad 0,5 v(2\pi n - \omega) - \omega(\Delta + \epsilon) = \epsilon \omega \cos \varphi. \quad (8)$$

Исключая фазу и обозначая $\omega_- = 2\pi n - \omega$, $\omega_\Delta = \omega(\Delta + \epsilon)$, $r = (1+R)(1-R)^{-1}$, получаем два возможных значения скорости

$$v_{1,2} = \frac{2\omega_- \omega_\Delta \pm [\omega_-^2 \omega_\Delta^2 - (4r^2 + \omega_-^2)(\omega_\Delta^2 - \omega^2 \epsilon^2)]^{1/2}}{4r^2 + \omega_-^2}. \quad (9)$$

Любое из уравнений (8) дает, после внесения в них (9), значения $\varphi_{1,2} \in [0, \pi]$. По предположению структура волны сохраняет формулу (4). Определяющие параметры находятся при помощи (8), (9): $J_{1,2} = 2 v_{1,2}$; $l_{01,2} = 1 - 2(\Delta + \epsilon + \epsilon \cos \varphi_{1,2})$. Эти соотношения вместе с (8), (9) и представлением (4) определяют две трапециевидные стоячие волны $A_{1,2}(J_{1,2}, \omega n^{-1}; x, t)$, причем в (4) периоды ПФГ X_{2n-1} равны nT . Вместо (5) имеем

$$\begin{aligned} J(\omega; \varphi) &= 4\omega (\Delta + \epsilon + \epsilon \cos \varphi) (2\pi n - \omega)^{-1}; \\ I(\omega; \varphi) &= [1 - 2(\Delta + \epsilon + \epsilon \cos \varphi)] J(\omega, \varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

Исходному гамильтоновому случаю ($R = 1$) отвечают значения фазы $\varphi_{1,2} = 0, \pi$. Непосредственной подстановкой легко проверить, что найденные решения (4), (8) — (10) удовлетворяют условиям (1), (3), (6) (или (2)), т.е. являются точными решениями. Можно доказать, что в подобной системе не существуют периодические режимы типа 1:n, не зависящие от метрических соотношений между геометрическими параметрами. В случае $R < 1$ при возрастании скорости ($\omega \rightarrow 2\pi n$): $\varphi_{1,2} \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ (достигается граница условий существования). Оба режима сливаются в один (профиль волны дан на рис 1). Характер зависимостей $I(\omega)$ ($n = 1$) показан на рис. 2; кривые 1—2 отвечают случаю $R = 1$; кривая 3 — $\varphi = \pi/2$. Подробный анализ найденных точных решений показывает, что данным режимам свойственны нелинейные резонансные эффекты ("затягивания", "срывы" и др.), проявляющиеся в традиционных системах с классическими ударными парами [5, 9]. Как указывалось, данное обстоятельство отмечалось и при экспериментировании. Таким образом, динамика трапециевидных стоячих волн сходна с динамикой частиц, соударяющихся с жесткими стенками.

Найденные режимы были получены и при численном моделировании, выполненном методом конечных разностей. Расчеты дали, что физически реализуемый асимптотически устойчивый режим может отвечать только знаку плюс перед радикалом, входящим в (9): $0 < \varphi < \pi/2$ (ср. [5,9]). Уверенно регистрировались субгармонические режимы вплоть до 1:4. Описанная картина волн устанавливалась после придания струне начальных условий, необходимых для ее выхода на ограничитель ("жесткий запуск").

4. Численный анализ показал также, что при больших величинах Δ или (ϵ) ω трапециевидные волны 1: n разрушаются и могут устанавливаться режимы весьма сложной структуры. При этом, в частности, обнаружено, что во многих случаях разрушение касалось лишь отрезка удара, который распадался на несколько равномерно движущихся с разными скоростями малых отрезков. (Два характерных профиля даны на рис. 4.)

Такое явление вызывается рассогласованием между моментами ударов и геометрическими параметрами конфигураций трапециевидной волны и может быть объяснено возникновением стохастического ускорения [10].

Положим для простоты $R = 1$, и пусть в определяющем преобразовании (7), где $h(t) = -\Delta - \epsilon - \epsilon \cos \omega t$, $v_k \gg \epsilon\omega$. Это преобразование описывает поведение любой точки из отрезка удара. Исследуем его, введя новую переменную $\tau_k = \{\frac{1}{2}\pi^{-1} \omega t_k\}$, где скобки обозначают дробную часть числа: $0 < \tau < 1$. После вычислений имеем из (7)

$$v_{k+1} = v_k + 2\epsilon\omega \sin 2\pi\tau_k, \quad \tau_{k+1} \approx \{\tau_k + \Delta \pi^{-1} \omega v_{k+1}^{-1} + 0,5 \pi^{-1} \omega\}, \quad (11)$$

причем во втором равенстве отброшен малый член, учитывающий время нахождения

струны в "зоне вибрации".

Внося первое уравнение (11) во второе, с точностью до членов $\varepsilon^2 \omega^2$ получаем

$$\tau_{k+1} \approx \left\{ \tau_k + 0,5 \pi^{-1} \omega + \frac{\Delta \omega}{\pi v_k} \left(1 - \frac{\varepsilon \omega}{v_k} \sin 2\pi \tau_k \right) \right\}. \quad (12)$$

Преобразование (12) определяет отображение интервала (0,1) на себя. Оно будет растягивающим, если $K = |\delta \tau_{k+1} / \delta \tau_k| > 1$.

Учитывая (12), получаем условие возникновения стохастической неустойчивости:

$$K = \frac{\varepsilon \Delta \omega^2}{\pi v_k^2} \cos 2\pi \tau_k \gtrsim 1. \quad (13)$$

Неравенство (13) не имеет места, если $\Delta = 0$ (трапециевидные волны (4) изохронны: $\omega = 2\pi$) или если $|\cos 2\pi \tau_k| \approx 0$ (удары всех точек приходятся на координаты $u = -\Delta - \varepsilon$). При $K < 1$ преобразование (12) определяет периодические или почти периодические режимы.

При $K > 1$ ввиду случайности последовательности $\{t_k\}$ отрезки удара (и вместе с ними трапециевидные профили стоячих волн) распадаются. Исследование характеристик профилей распавшихся волн представляет собой самостоятельную проблему. Однако, как указывалось, в ряде случаев стоячие волны способны сохранить "изломанные профили", подобные показанным на рис. 3.

Согласно (13) "наименее устойчивыми" оказываются режимы, отвечающие $\tau_k \rightarrow 0$ или 1 ($u = -\Delta - 2\varepsilon$ или $-\Delta$), т.е. режимы, бывшие ранее периодическими. Положив в (13) $\cos 2\pi \tau_k = 1$, найдем предельно возможную скорость и „ стохастически ускоряемых точек струны: $v_k < \omega(\varepsilon \pi^{-1} \Delta)^{1/2} = v^*$. Таким образом, частота возбуждения оказывается основным параметром, влияющим на стохастическую неустойчивость.

Подобные рассуждения можно выполнить и при $R < 1$. Точно так же все проведенные выше построения могут быть перенесены и на случай несинусоидального закона вибрации стенки $h(t)$, а также на случай симметричной системы с двумя вибрирующими стенками (ср. [4]). Отметим, что часть изложенных результатов остается в силе при рассмотрении решетчатых 2D аналогов рассмотренных систем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-08-00941-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крупенин В.Л. ДАН, 1991, т. №1. С. 106 - 1102.
2. Bamberger A., Schatzman M. - Saim. J. Math. Anal., 1983, vol. 14, № 3, p. 560-595.
3. Cabannes H. ~ Acustica, 1984, voL 55, p. 14-20.
4. Крупенин В.Л. - ДАН, 1990, т. 313, № 6, с. 1390-1394.
5. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. -404 p.p.

6. *Hараux A., Cabannes H.* - Nonl. Anal., 1983, № 7, p. 129-141.
7. *Веприк А.М., Крупенин В.Л.* Машиноведение, 1988, № 6, с. 8-16.
8. *Крупенин В.Л.* - Изв. АН СССР. МТТ, 1986, № 1, с. 25-32.
9. *Бабицкий В.И., Крупенин В.Л.* Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985. 320 с.
10. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 271 с.
11. Крупенин В.Л. - Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. №3. С. 16-22.
12. Крупенин В. Л. - Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 6. С. 12-18.

Поступила: 19.09.2009.