

УДК 532.5.032

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СМАЗКИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ КОНТАКТОВ

М.Я. Пановко

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Россия, Москва

Аннотация. Цель настоящей работы заключалась в изучении численным методом особенностей влияния изменяющейся по гармоническому закону возбуждающей силы на параметры точечного УГД контакта. Вычислительный алгоритм основан на методе Ньютона с использованием неявной разностной схемы для решения нестационарной нелинейной системы интегродифференциальных уравнений и неравенств с начально-краевыми условиями для области, часть границы которой является свободной (выходная граница зоны контакта), определяемой в процессе решения задачи.

Ключевые слова: методы упругогидродинамической теории смазки, нестационарное нагружение линейного и точечного контактов, распределения давления и толщины смазочной пленки в зоне контакта, вычислительный алгоритм.

Введение. Нестационарное нагружение смазанных контактов типично для таких узлов трения как подшипники и зубчатые передачи. Как правило, нестационарное нагружение контактов вызвано вибрацией элементов машин. Для исследования процессов в этих контактах обычно используются методы упругогидродинамической (УГД) теории смазки. Режим УГД смазки характеризуется наличием тонкой смазочной пленки, толщина которой в несколько раз превосходит высоту шероховатости поверхности, и упругой деформацией тел в зоне контакта. Ранее опубликованные работы в этой области посвящены, главным образом, анализу эффектов в случае, когда внешняя нагрузка была постоянной величиной. В настоящее время динамическое нагружение точечного УГД контакта изучено в значительно меньшей степени. В связи с этим следует здесь упомянуть исследования нестационарного нагружения линейного [1] и точечного контактов [2], в которых было показано значительное влияние периодического нагружения на распределения давления и толщины смазочной пленки в зоне контакта.

Цель настоящей работы заключалась в изучении численным методом особенностей влияния изменяющейся по гармоническому закону возбуждающей силы на параметры точечного УГД контакта. Вычислительный алгоритм основан на методе Ньютона с использованием неявной разностной схемы для решения нестационарной нелинейной системы интегродифференциальных уравнений и неравенств с начально-краевыми условиями для области, часть границы которой является свободной (выходная граница зоны контакта), определяемой в процессе решения задачи.

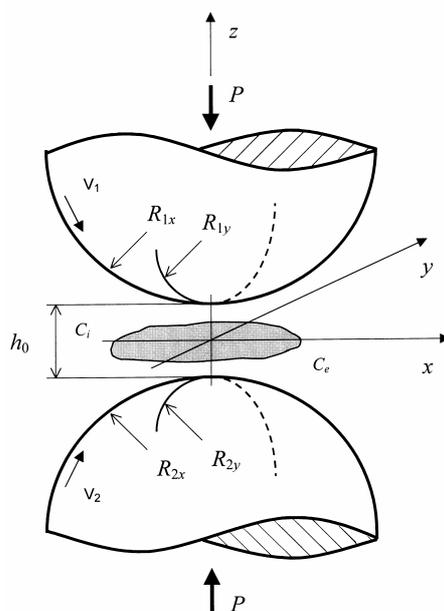


Рис. 1

Постановка задачи. Рассматривается задача о смазке точечного УГД контакта (см. рис. 1) в условиях динамического нагружения. В области контакта вводится подвижная система координат, ось z которой проходит через центры кривизны контактирующих тел, а плоскость xy совпадает со срединной плоскостью в смазочном слое $z=0$. Предполагается, что гладкие поверхности контактирующих тел движутся с линейными скоростями $v_1(v_{1x}, v_{1y})$, $v_2(v_{2x}, v_{2y})$; смазка, вовлекаемая поверхностями в зазор между ними, обладает свойствами несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости и находится в изотермических условиях; к сосредоточенному контакту упругих тел приложена внешняя стационарная сила P_0 , а затем - дополнительная осциллирующая сила $\Delta P \sin \omega t$, т.е., начиная с момента времени $t=0$, к УГД контакту приложена сила $P(t) = P_0(1 + A \sin \omega t)$, где A и ω - соответственно амплитуда и частота гармонической составляющей.

Система уравнений, описывающая течение смазки в изотермическом УГД контакте, выводится с учетом ряда допущений (их обсуждение и вывод уравнений см., например, в [3]) из уравнений гидродинамики и теории упругости. Основные допущения заключаются в следующем: толщина слоя смазки (зазора) существенно меньше радиусов кривизны поверхностей контактирующих тел, локально контактирующие тела заменяются полупространствами, динамические эффекты в телах пренебрежимо малы (выполняется условие квазистатичности деформации), инерционные и объемные силы по сравнению с силами вязкого трения и давления в смазке пренебрежимо малы, течение масляного слоя рассматривается как ламинарное, соблюдаются условия прилипания жидкости к поверхности. Зависимость вязкости смазки от давления полагается известной. Известными являются физические свойства упругих тел. Система УГД уравнений замыкается начальными условиями для давления и зазора в области контакта в момент времени $t=0$ и краевыми условиями для давления на кривой, ограничивающей рассматриваемый смазочный слой в плане на плоскости xy . Причем часть границы области контакта - входная - задается; остальная часть границы - выходная (свободная), отделяющая область смазки от кавитационной, - определяется в процессе решения задачи. Далее полагается, что поверхности упругих тел в окрестности точки касания имеют сферическую форму.

Введём следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned}(x', y', \xi', \eta') &= (x, y, \xi, \eta) / a_H, t' = t / t_0, p' = p / p_H, Z = 2a_H / (|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2| t_0), \\ h' &= h / h_0, \mu' = \mu / \mu_0, H_0 = 2Rh_0 / a_H^2, V = 24\mu_0 |\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2| R^2 / p_H a_H^3, t_0 = 1 / \omega, \\ Q_0' &= Q_0 p_H, P' = P(t) / p_H a_H^2, \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) / |\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|, 1/R = 1/R_1 + 1/R_2,\end{aligned}$$

где x, y, ξ, η - декартовы координаты; t - время; p - давление; h - толщина смазочного слоя; h_0 - зазор в центре контакта; μ - вязкость смазки; R - эффективный радиусы кривизны; a_H - полуось герцевского точечного контакта; p_H - максимальное герцевское давление; t_0 - характерное время процесса; Z - частотный параметр; μ_0 - вязкость при давлении окружающей среды; H_0 - безразмерная толщина смазочного слоя в начале координат; V - нагрузочно-скоростной параметр; Q_0 - пьезокоэффициент вязкости смазки. Значения a_H и p_H оцениваются по формулам для стационарного несмазанного точечного контакта.

Система уравнений в безразмерной форме имеет следующий вид (штрихи далее опущены):

$$L(p) = \nabla \cdot \left(H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - V \mathbf{v} h \right) - VZ \frac{\partial h}{\partial t} - VZ \frac{h}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$h(x, y, t) = 1 + \frac{x^2 + y^2}{H_0} + \frac{4}{\pi^2 H_0} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta, \quad (2)$$

$$M(p) = \iint_{\Omega} p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - \frac{2\pi}{3} (1 + A \sin \omega t) = 0, \quad (3)$$

$$p(x, y, 0) = p^0(x, y), \quad H_0(0) = H_0^0, \quad p|_C = \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{C_e} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y), \quad \mu = \mu(p),$$

$$G(x, y, \xi, \eta) = 1 / \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} - 1 / \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

где p^0 - давление в начальный момент времени; h_0^0 - зазор в центре контакта в начальный момент времени; Ω - область контакта; C - граница области контакта; C_e - выходная граница области контакта $C_e = C \setminus C_i$, где C_i - входная граница.

Система (1)-(4) является нелинейной интегродифференциальной системой уравнений Рейнольдса (1), уравнения для определения толщины смазочной пленки между упругими телами (2), условия равенства внешней нагрузки интегралу от давления по области контакта (3) и начально-краевых условий для давления (4).

Решение задачи должно удовлетворять граничным условиям для давления на входной части границы области контакта C_i , которая задана, и на заранее неизвестной границе выхода C_e , $C = C_i \cup C_e$. Входная и выходная границы определяются следующим образом:

$$C_i \text{ задано, если } (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n})|_{C_i} < 0; \quad (\nabla p \cdot \mathbf{n})|_{C_e} = 0, \text{ если } (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n})|_{C_e} \geq 0,$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{v} h - H_0^2 h^3 \nabla p / (\mu V),$$

где \mathbf{Q} - вектор плотности потока жидкости, \mathbf{n} - единичный вектор внешней нормали.

Выходная граница C_e отделяет зону смазки, где $p > 0$, от кавитационной, где полагается $p = 0$. Расположение выходной границы C_e определяется на основе принципа дополненности, согласно которому, если $(\nabla p \cdot \mathbf{n})|_{C_e} = 0$, то

$$L(p) = 0, p > 0 \text{ в зоне смазки; } L(p) < 0, p = 0 \text{ в зоне кавитации.} \quad (5)$$

Обоснование применимости принципа дополненности для решения задач о смазке УГД контакта представлено в работе [2, 4]. В работе [5] отмечалось, что при использовании этого подхода удовлетворяется кавитационное условие на C_e .

В системе уравнений и неравенств (1)-(5) заданными считаются входная граница C_i , нагрузочно-скоростной параметр V , частотный параметр Z , вектор скорости $\mathbf{v}(v_x, v_y)$, зависимость вязкости от давления $\mu = \mu_0 \exp(Q_0 p)$, начальное условие $p^0(x, y), H_0^0$. Решение задачи представляется распределениями давления $p(x, y, t)$ и зазора $h(x, y, t)$, расположением выходной границе $x_e(y, t)$, безразмерной толщиной смазочной пленки $H_0(t)$ в начале координат.

Определив из (2) выражение для $\partial h / \partial t$, уравнение Рейнольдса (1) может быть записано в следующем виде, удобном для численного решения УГД задачи

$$L(p) = \nabla \cdot \left(H_0^3 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - H_0 V \mathbf{v} h \right) - \\ - VZ \frac{\partial H_0}{\partial t} - VZ \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = 0. \quad (6)$$

Численный метод решения. Расчетная область, включающая область контакта Ω , где $p > 0$, и кавитационную область, где $p = 0$, в плоскости xu задается в виде прямоугольника $\{x, y : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$ и покрывается неравномерной разнесенной декартовой сеткой с системой узлов $(x_i, y_j), (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$. Давление определяется в узлах (x_i, y_j) , толщина смазочной пленки – в узлах $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$. После интегрирования уравнения (6) по области $\Delta\Omega_{ij}$, занимаемой расчетной ячейкой (i, j) внутри контура (l_{ij}) , получаем

$$L_1(p) = \int_{(l_{ij})} \left[H_0^3 \frac{h^3}{\mu} (\nabla p \cdot \mathbf{n}) - H_0 V (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h \right] dl - \\ - VZ \left[\frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \right] \Delta\Omega_{ij} = 0. \quad (7)$$

В условиях дополненности (5) оператор $L(p)$ заменяется на $L_1(p)$.

Алгоритм решения системы уравнений и неравенств, описывающих УГД контакт, основан на методе Ньютона с использованием неявной схемы при аппроксимации нестационарных уравнений. Линеаризованные на временном шаге $n+1$ около решения $(p(x, y, t_{n+1}), H_0(t_{n+1}))_k^{n+1}$ уравнения (3), (4) и (7) являются исходными для построения конечноразностной схемы. При этом система разностных уравнений на каждом итерационном шаге имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} (a_{qr})_{mm} & (b_q)_m \\ (c_r)_m^T & 0 \end{pmatrix} \right\|_k^{n+1} \left\| \begin{pmatrix} (\Delta p_r)_m \\ \Delta H_0 \end{pmatrix} \right\|_{k+1}^{n+1} &= - \left\| \begin{pmatrix} L_1(p_r)_m \\ M(p_r) \end{pmatrix} \right\|_k^{n+1}, \\ \Delta p_{k+1}^{n+1} &= p_{k+1}^{n+1} - p_k^{n+1}, \quad \Delta H_{0,k+1}^{n+1} = H_{0,k+1}^{n+1} - H_{0,k}^{n+1}, \quad \Delta p_{k+1}^{n+1} \Big|_C = 0, \end{aligned}$$

где n – номер шага по времени; k - номер итерации на текущем временном шаге. Элементами матрицы Якоби порядка $(m+1)$ являются полная квадратная матрица $(a_{qr})_{mm}$ порядка m , вектор-столбец $(b_q)_m$ и вектор-строка $(c_r)_m^T$ ($q, r = 1, \dots, m$). Значение m равно числу узлов сетки, в которых определяется давление, и зависит от местоположения выходной границы.

Один шаг итерационного процесса состоит в решении разностных уравнений относительно $\Delta H_{0,k+1}^{n+1}(t_{n+1})$, $\Delta p_{k+1}^{n+1}(x_i, y_j, t_{n+1})$ методом гауссова исключения с частичным выбором ведущего элемента, вычислении $H_{0,k+1}^{n+1} = H_{0,k}^{n+1} + \Delta H_{0,k+1}^{n+1}$, $p_{k+1}^{n+1} = p_k^{n+1} + \Delta p_{k+1}^{n+1}$, вычислении $h_{k+1}^{n+1}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, t_{n+1})$ по соотношению (2) и определении выходной границы $x_{e,k+1}^{n+1}(y_j, t_{n+1})$. Интеграл в выражении (2) вычислялся по кубатурной формуле для

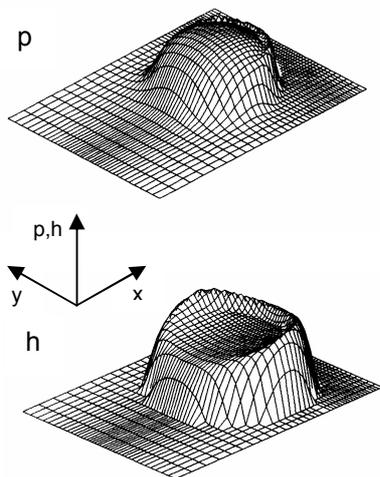


Рис. 2

сингулярных интегралов [6]. Проверка условий дополненности (5) осуществляется в каждом узле расчетной сетки после решения уравнения Рейнольдса. Процедура решения уравнения Рейнольдса и проверки принадлежности узлов кавитирующей и некавитирующей областям осуществляется в итерационном цикле. Итерационный процесс продолжался до достижения требуемой относительной точности решения δ , т.е. $\max(|H_{0,k+1}^{n+1}/H_{0,k}^{n+1} - 1|, |p_{k+1}^{n+1}/p_k^{n+1} - 1|, |h_{k+1}^{n+1}/h_k^{n+1} - 1|, |x_{e,k+1}^{n+1}/x_{e,k}^{n+1} - 1|) < \delta$. После выполнения заданных условий по точности решения, осуществлялся переход на новый шаг по времени.

Результаты расчетов. Изложенный выше вычислительный алгоритм был применен для расчета тяжело нагруженного точечного УГД контакта. Вектор скорости качения задавался вдоль оси x , т.е. имел

компоненты $v_x=1$, $v_y=0$. Изменение во времени внешней нагрузки задавалось по гармоническому закону в виде функции $P(t)=2\pi(1+A\sin(t))/3$ с амплитудой A и частотой $\omega = 1/t_0$. Численное моделирование осуществлялось на сетке 40×40 во временном диапазоне $0 \leq t \leq 28$ с шагом по времени $\Delta t = 0,2$ при следующих значениях параметров задачи: $Q_0=5$; $V=0,01 \div 0,1$; $Z=0,1 \div 10$; $A=0,2$ и $A=0,5$. В расчетах относительная точность задавалась равной

$\delta=0,001$. Представленные далее в графическом виде результаты относятся к случаю, когда $V=0,1; Q_0=5$.

Начальные условия для нестационарной УГД задачи определялись решением

стационарной задачи для тех же параметров. Решение стационарной задачи

представлено распределениями давления и зазора на рис. 2 в виде поверхностей.

Представленные распределения демонстрируют характерные особенности распределений давления и зазора в тяжело нагруженном УГД контакте: уплотнение зазора в герцевской области,

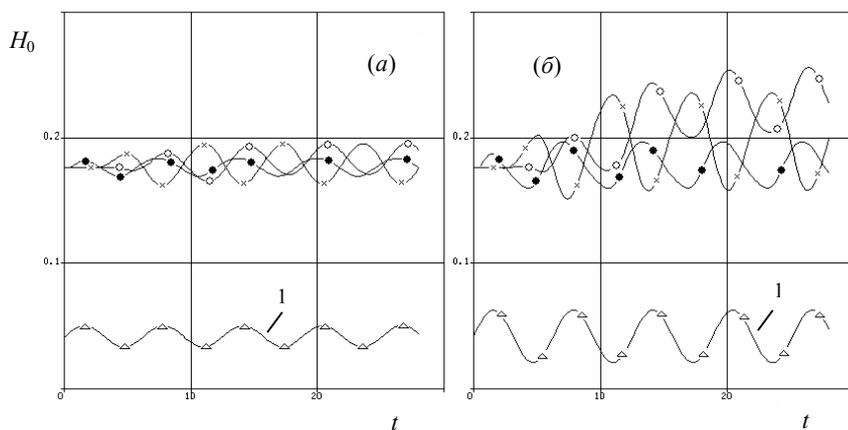


Рис. 3

образование пиков давления и уменьшение зазора в окрестности выходной границы смазочной пленки.

В процессе численного моделирования нестационарного УГД контакта были получены решения на каждом шаге по времени для всего интервала интегрирования.

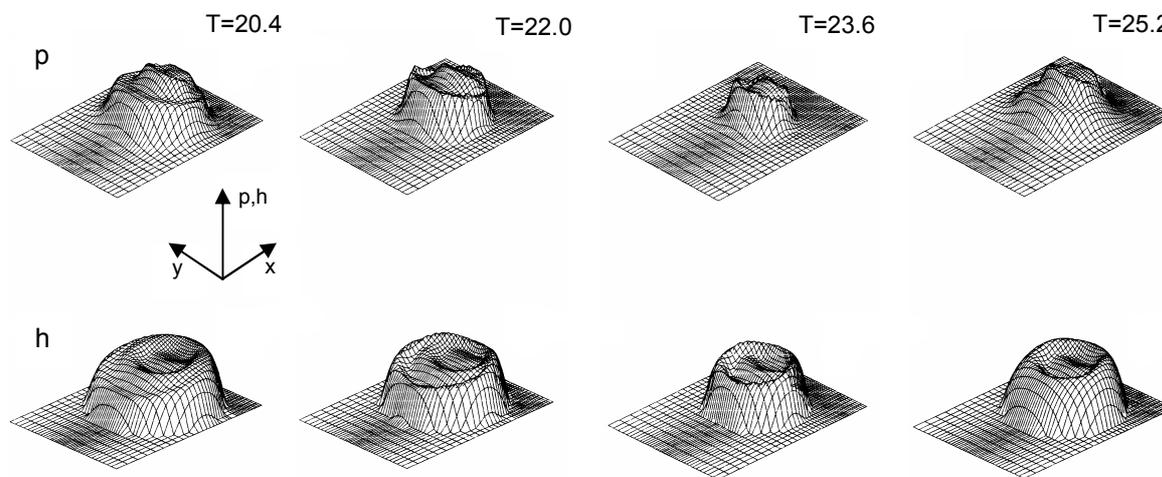


Рис. 4

Так, на рис. 3 а, б показаны изменения во времени безразмерной толщины смазочной пленки H_0 в зависимости от внешней нагрузки $P(t)$ для двух значений амплитуды $A=0,2$ и $A=0,5$. Частотный параметр для представленных на рис. 3 зависимостей задавался равным $Z=1$ (темные точки), $Z=5$ (косые кресты), $Z=10$ (светлые точки). В начальной стадии динамического нагружения имеет место переходной процесс, по завершении которого наблюдаются установившиеся колебания H_0 с периодом колебаний, равным периоду колебаний внешней нагрузки. При этом колебания H_0 совершаются со сдвигом по фазе относительно колебаний нагрузки $P(t)$ (на рис. 3 нагрузка равна $P(t)/50$). В режиме установившихся колебаний, как следует из рассмотрения рис. 3, при фиксированном значении амплитуды A и увеличении частотного параметра Z в диапазоне от $Z=1$ до $Z=10$ амплитудные значения H_0 сначала возрастают, а затем снижаются. С увеличением A от $A=0.2$

до $A=0.5$ при фиксированном значении Z амплитудные значения H_0 возрастают. Средние значения H_0 , как видно на рис. 3 а ($A=0,2$; Z в диапазоне от $Z=1$ до $Z=10$), практически равны своим начальным значениям при $t=0$. Однако при $A=0,5$ средние значения H_0 больше своих начальных значений, причем разница возрастает с ростом Z (см. рис. 3 б).

Из рассмотрения пространственных распределений давления p и зазора h в различные моменты времени установившихся колебаний, представленных на рис. 4 ($A=0,5$; $Z=10$), следует, что эти распределения значительно отличаются от распределений в начальный момент времени (см. рис. 2). Распределения p и h на рис. 4 показаны для моментов времени, отстоящих друг от друга на величину $\Delta t \approx \pi/2$, в которые внешняя нагрузка достигает соответственно максимального значения при $t=20,4$; среднего при $t=22,0$ и $t=25,2$; минимального при $t=23,6$, т.е. фрагментарно прослеживаются изменения p и h за период колебаний внешней нагрузки.

Особенность показанных на рис. 4 распределений проявляется в волнистости распределений h при высоких значениях частотного параметра Z . Распределения h , подобные представленным на рис. 4, но с меньшими амплитудными значениями волнистости, наблюдались в случае $A=0,2$ при прочих равных условиях. С уменьшением частотного параметра Z при прочих равных условиях волнистость h снижалась. Так например, в случае $Z=5$ число модуляций h было практически вдвое меньше, чем в случае $Z=10$.

Наблюдаемые особенности распределения толщины смазочной пленки, по всей вероятности, могут быть объяснены тем фактом, что в центральной области УГД контакта, где вязкость достигает больших значений (в расчетах безразмерные значения вязкости $\mu \sim 10^3$), и следовательно, пренебрежимо малым становится пуазейлевский член $H_0^2 h^3 \nabla p / \mu$, уравнение Рейнольдса (1) приближенно сводится к уравнению переноса

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_0 h) + \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial x}(H_0 h) = 0,$$

общее решение которого имеет вид бегущей волны $h(x,t) = \psi(x - t/Z) / H_0(t)$. Из чего следует, что возмущение толщины смазочной пленки на входе в контакт, возникающее вследствие действия внешней возбуждающей силы, распространяется вниз по потоку со скоростью, численно равной $1/Z$. Уравнение переноса получено с учетом, что общее решение которого имеет вид бегущей волны $h(x,t) = \psi(x - t/Z) / H_0(t)$. Из чего следует, что возмущение толщины смазочной пленки на входе в контакт, возникающее вследствие действия внешней возбуждающей силы, распространяется вниз по потоку со скоростью, численно равной $1/Z$. Уравнение переноса получено с учетом, что наблюдается при частотном параметре $Z=1$ (см. рис. 5 б, обозначения те же, что и на рис. 5 а). Из сопоставления рис. 5 а и рис. 5 б следует, что с уменьшением частотного параметра Z модуляции толщины смазочной пленки проявляются все в меньшей степени.

Распространение возмущений толщины смазочной пленки вдоль УГД контакта анализировалось ранее в [7-10] при исследовании влияния шероховатости поверхности на распределения толщины смазочной пленки и давления в зоне контакта. В этих экспериментальных [7, 8] и численных [9, 10] исследованиях возмущение толщины смазочной пленки создавалось нерегулярностью поверхности (типа бугорка или лунки) во входной части зазора. Возникшее на входе возмущение затем распространялось вниз по потоку со скоростью качения $v_x = (v_{1x} + v_{2x})/2$. Модуляции толщины смазочной пленки наблюдались также при численном исследовании точечного УГД контакта, в математической модели которого учитывалась инерция системы (вместо уравнения статики применялся второй закон Ньютона [11]).

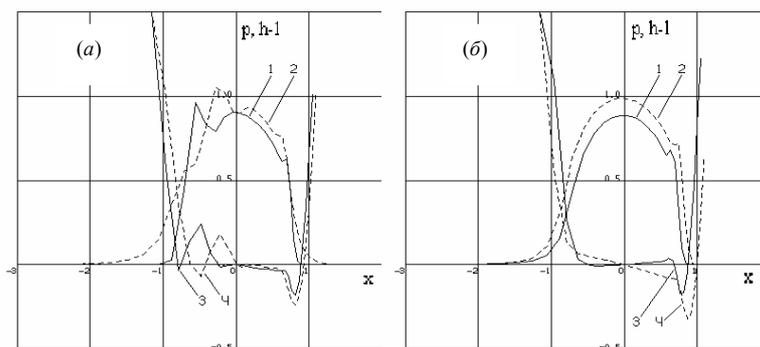


Рис. 5

В этом случае возмущение толщины смазочной пленки создавалось при выводе системы из равновесия заданием начального значения сближения тел отличным от сближения, полученного при решении стационарной задачи. После вывода системы из равновесия сближение тел из-за демпфирующего влияния вязкости смазочной пленки возвращалось к стационарному значению, совершая затухающие колебания. При этом вдоль зоны контакта распространялись возникшие на входе в зазор модуляции толщины смазочной пленки.

Литература

1. Yang P., Wen S. The behavior of non-newtonian thermal EHL film in line contacts at dynamic loads // Trans. ASME. J. Tribol. 1992. V. 114. № 1. P. 81-85.
2. Oh K.P. The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem // Trans. ASME. J. Tribol. 1984. V. 106. № 1. P. 88-95.
3. Галахов М.А., Гусятников П.В., Новиков А.П. Математические модели контактной гидродинамики. М.: Наука, 1985. 296 с.
4. Kostreva M.M. Elasto-hydrodynamic lubrication: a nonlinear complementarity problem // Intern. J. Numer. Methods in Fluids. 1984. V. 4. № 4. P. 377-397.
5. Oh K.P., Li C.H., Goenka P.K. Elasto-hydrodynamic lubrication of piston skirts // Trans. ASME. J. Tribol. 1987. V. 109. № 2. P. 356-365.
6. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
7. Kaneta M. Effects of surface roughness in elastohydrodynamic lubrication // JSME Intern. Journal. 1992. Ser. 3. V. 4. № 4. P. 535-546.
8. Kaneta M. Nishikawa H. Experimental study on microelastohydrodynamic lubrication // Proc. Instn. Mech. Engrs. Pt J. J. Engng Tribol. 1999. V. 213. № 5. P. 371-381.
9. Greenwood J.A., Morales-Espejel G.E. The behaviour of transverse roughness in EHL contacts // Proc. Instn. Mech. Engrs. Pt J. J. Engng Tribol. 1994. V. 208. № 2. P. 121-132.
10. Morales-Espejel G.E., Venner C.H., Greenwood J.A. Kinematics of transverse real roughness in elastohydrodynamically lubricated line contacts using Fourier analysis // Proc. Instn. Mech. Engrs. Pt J. J. Engng Tribol. 2000. V. 214. № 6. P. 523-534.
11. Wijnant Y.H., Venner C.H. Analysis of an EHL circular contact incorporating rolling element vibration // Elasto-hydrodynamics '96, Fundamentals and Application in Lubrication and Traction. Amsterdam: Elsevier, 1997. P. 445-456.

Поступила: 12.07.09.