УДК 531.36

ЛИНЕЙНОСТИ И НЕЛИНЕЙНОСТИ В СВОБОДНЫХ СИСТЕМАХ

Н.В.Панкова

В статье рассматриваются задачи о движении по инерции свободных механических систем, состоящих из твердого тела-носителя и упруго связанных с ним материальной точки и маховика. Исследована устойчивость и бифуркации всех стационарных вращений системы. Множество этих движений представлено геометрически в виде кривых на плоскости. Смена устойчивых и неустойчивых движений происходит лишь через точки бифуркации. Для плоской задачи наглядно показано, как вращение тела-носителя влияет на свойства упругости, линейный осциллятор проявляет нелинейные свойства.

С развитием космических исследований возникла необходимость углубленного исследования динамики свободных систем (систем свободных от внешних связей). В Институте машиноведения исследования качественного поведения таких систем проводились под руководством Ф.М.Диментберга в его лаборатории. Известно, что на движение космических аппаратов сильное влияние оказывает их «нежесткость», возникающая из-за движения объектов внутри или за счет деформируемости тех или иных частей космических аппаратов. Известны случаи «кувыркания» некоторых спутников.

Поэтому первоначально была поставлена задача изучения характерных особенностей свободной системы, состоящей из плоской платформы массы M, центр масс т. C_2, на которой в т. C_1 укреплена точечная масса m, способная совершать упругие однонаправленные колебания (упругость линейная) (рис.1). Точка O - центр масс системы, φ - угол поворота платформы относительно центра масс всей системы. Для простоты положим, что т.A (перпендикуляр из т.C_2 на линию движения точечной массы) соответствует ненагруженному состоянию осциллятора.

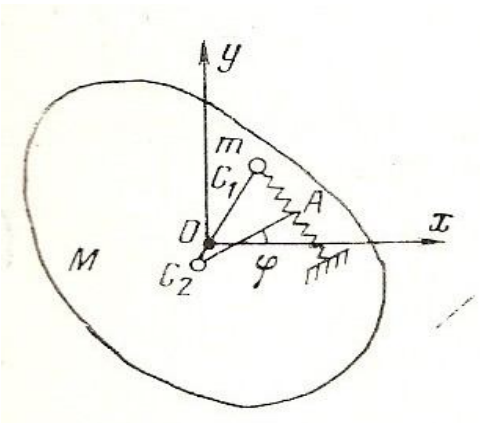


Рис. 1

Ащеуловым Ю.В. [1] приведено решение задачи в эллиптических интегралах. Однако в этих решениях не хватало наглядности.

Было предложено по возможности более наглядно прояснить качественные особенности такой системы – выделить характер нелинейности осциллятора, выяснить влияние первоначального вращения платформы, рассмотреть возможные стационарные вращения и бифуркации.

На систему не действуют внешние силы, поэтому центр масс всей системы остается неподвижным в инерциальном пространстве, и существуют еще два интеграла движения: интеграл энергии и интеграл кинетического момента, при этом уравнение, описывающее движение осциллятора, существенно нелинейное в силу того, что система свободна[2].

Система фазовых поверхностей зависит от двух параметров: интеграла энергии H и начального кинетического момента системы G .

Фазовые поверхности построены в пространстве $(\sigma,\dot{\sigma},G^2)$, где $(\sigma,\dot{\sigma})$-обезразмеренные фазовые координаты осциллятора [2]. При различных значениях H получим трехмерные поверхности типа одно- и двурогого «параболоидов»

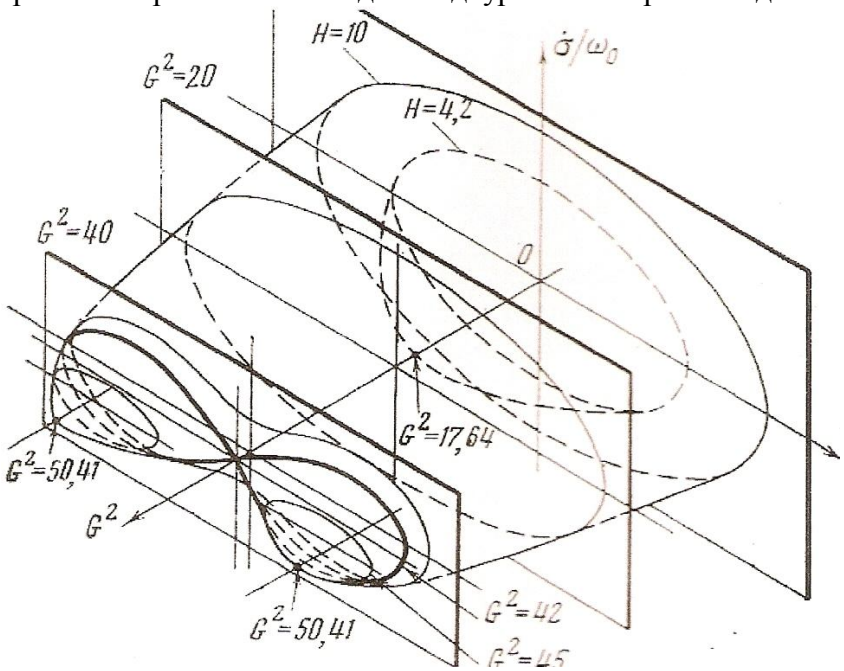


Рис.2

При фиксированном значении величины кинетического момента G, т.е. в сечениях «параболоидов», получим фазовые изображения движения осциллятора при дополнительном вращении системы.

При относительном равновесии осциллятора происходит вращение всей системы в целом относительно оси, проходящей через центр масс системы, перпендикулярно плоскости платформы.

В зависимости от величины закрутки колебания осциллятора могут происходить относительно ненагруженного или нагруженного состояния. В первом случае на плоскости $(\sigma,\dot{\sigma})$ получаем особую точку типа центр, во втором имеют место 3 особые точки: два симметричных центра и нулевая точка типа седло, через которую проходит сепаратриса из седла в седло (рис.3)

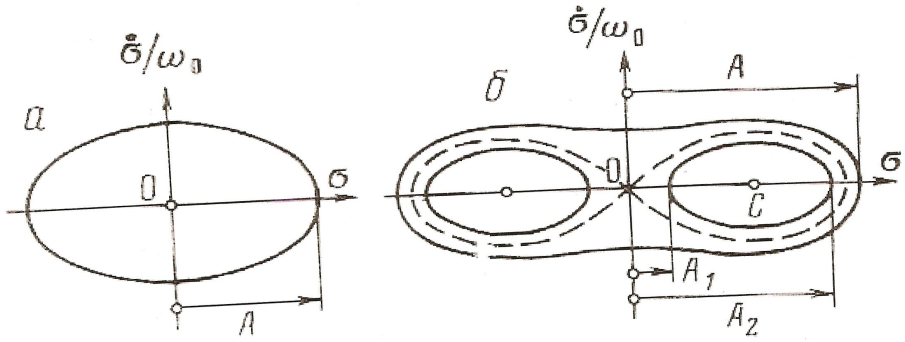


Рис.3

При учете диссипации типа вязкого трения по координате σ показано, что сепаратриса системы с диссипацией нигде не пересекает сепаратрису соответствующей консервативной системы, она распадается на 4 ветви: две сепаратрисы выходят из седла и

наматываются на асимптотическаие устойчивые фокусы, две другие из бесконечности сматываются к седлу, чередуясь.

Нелинейные свойства осциллятора исследованы с помощью теоремы сравнения для несобственных интегралов с переменным верхним пределом гиперэллиптического типа из уравнения движения осциллятора. Полученные зависимости амплитуды собственных колебаний осциллятора от частоты (скелетные кривые) приведены на рис.4.

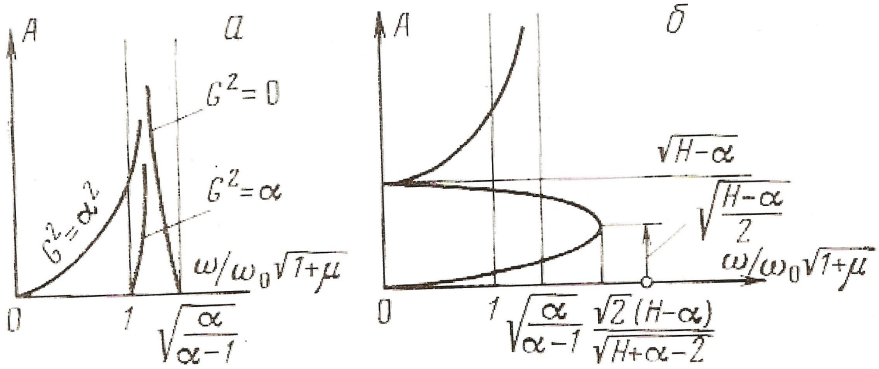


Рис.4

Видно, что в зависимости от параметра G нелинейность бывает мягкого, почти линейного, жесткого и смешанного типов. Нелинейные свойства тем «сильнее», чем больше величина параметра G, т.е. чем больше первоначальная закрутка платформы. Это показывает рамки применения квазилинейной постановки при исследовании движения осциллятора [2].

Центр масс платформы движется относительно центра масс системы по окружности переменного радиуса, радиус меняется с периодом равным периоду осциллятора. При этом на чистое вращение накладываются периодические колебания с периодом, равным периоду колебаний осциллятора.

При переходе к изучению пространственной задачи [3],очевидно, много теряем в наглядности. Однако и здесь были получены интересные результаты. Сделав незначительные упрощения, которые не повлияли на качественные результаты исследований, а только облегчали манипуляции с выкладками, задачу сформулировали так: изучить поведение системы, состоящей из линейного осциллятора, движущегося в экваториальной плоскости эллипсоида инерции динамически симметричного тела-носителя. Вся система свободна от внешних связей и сил.

Используя подходы к системам с известными интегралами для сложных систем, разработанные в «школе» В.В.Румянцева [4,5,6].Метод исследования не связан с выписыванием всех уравнений движения и не требует непосредственного применения процедуры Рауса по исключению циклических переменных, задаваемых через кинематические уравнения Эйлера, и позволяет исследовать такие режимы, для которых преобразование Эйлера является вырожденным.

Получены все возможные стационарные вращения системы. Построены зависимости скорости стационарного вращения ω от постоянной интеграла кинетического момента k=k(ω) (рис.5). Видно, что для фиксированного значения величины кинетического момента возможны 7,5 или 3 различных скоростей стационарного вращения, при этом каждому значению скорости соответствует определенное значение отклонения осциллятора.

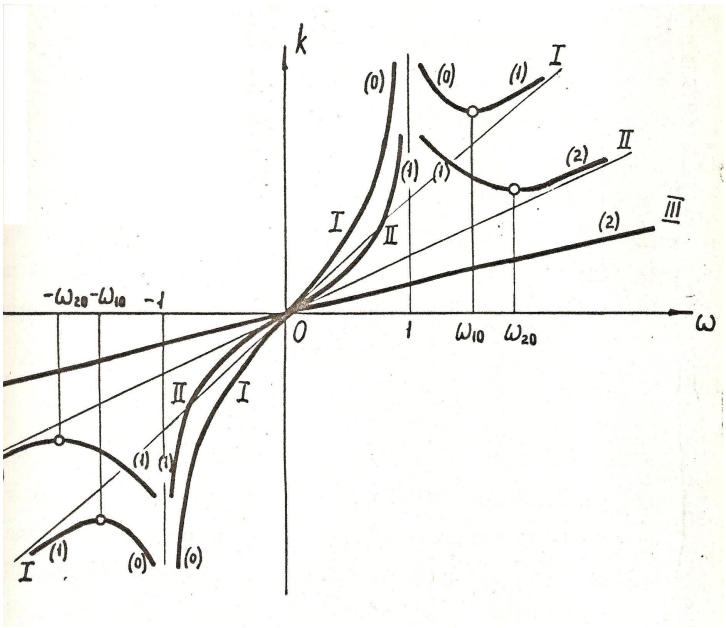


Рис.5

Исследована устойчивость стационарных режимов, имеется в виду условная устойчивость по Ляпунову (т.е. устойчивость при возмущениях не изменяющих циклических интегралов). Точки бифуркации (точки смены устойчивости) находятся среди экстремальных точек для кривых $k=k(\omega)$ (степени неустойчивости помечены цифрами в круглых скобках). Режимы, имеющие степень неустойчивости 0, устойчивы, режимы с нечетной степенью неустойчивости неустойчивы. Если среди режимов с четной степенью неустойчивости есть устойчивые, то их устойчивость имеет гироскопический характер, т.е. устойчивость разрушается при введении полной диссипации.

Указанное распределение степеней неустойчивости на ветвях кривых $k=k(\omega)$ подчиняется закону смены устойчивости при фиксированном значении параметра k.

Если на осциллятор действует диссипативная сила типа вязкого трения (по координате σ), то это вызывает полное демпфирование системы. При введении такой диссипации режимы со степенью неустойчивости 0, станут асимптотически устойчивыми, все остальные станут неустойчивыми.

Следовательно, в рассмотренной системе существуют асимптотически устойчивые стационарные вращения всей системы в целом относительно оси наибольшего момента инерции системы. При этом скорость стационарного вращения ограничена, причем величина ограничивающей скорости определяется однозначно заданием постоянного кинетического момента k, на кривой $k=k(\omega)$ такая точка является экстремальной.

Следующим объектом исследований рассматривалась свободная система, состоящая из динамически симметричного твердого тела и упруго связанного с ним маховика, ось которого может совершать колебания поступательно, параллельно оси динамической симметрии тела-носителя, связь предполагалась линейной. Считалось, что относительная угловая скорость маховика постоянна. Для этого, очевидно, должна существовать определенная обобщенная сила, представляющая момент активных сил, приложенных к маховику относительно его оси вращения. Эта обобщенная сила не влияет на существование интеграла кинетического момента, т.к. внешние силы на систему не действуют, т.е. имеет место расширение уже изложенных задач на случай существования в системе вращающихся частей (рис.6).

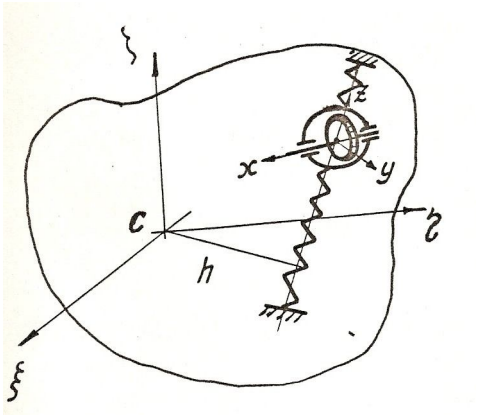


Рис.6.

В этой задаче введен гиростатический момент маховика К. Проводя аналогичные процедуры с измененой потенциальной энергией системы, получим, что семейство стационарных вращений системы представляется графически в пространстве (k,K,ω) в виде поверхности k=k(K,ω). Если при этом гиростатический момент маховика зафиксирован, то пересечение поверхности k=k(K,ω) с плоскостью K=const дает плоскую кривую типа рассмотренного выше. В зависимости от параметров k,K возможно 4, 6, 8 или 10 скоростей стационарного вращения. На рис.7 приведены указанные кривые при некоторых соотношениях параметров системы. Полный набор кривых естественно не приведен в силу громоздкости.

Ось стационарного вращения проходит через центр масс системы и может занимать следующие положения: 1) ось вращения ортогональна экваториальной плоскости эллипсоида инерции носителя, 2)оси вращения лежат в главных центральных плоскостях тензора инерции системы в стационарном режиме, образованных осью, параллельной оси динамической симметрии носителя с одной стороны, и осью, проходящей через центр масс маховика, или 3) осью, направленной перпендикулярно оси, проходящей через центр масс маховика.

При фиксированном значении гиростатического момента точки бифуркации находятся среди экстремальных точек кривых k=k(K,ω), кроме этого существуют зависимости K(ω) и $K^2(\sigma)$, задающие при фиксированном значении K значения бифуркационных скоростей стационарного вращения и перемещения маховика относительно тела-носителя, по которым можно получить бифуркационные значения кинетического момента k. Изменение степени неустойчивости происходит лишь в точках бифуркации.

Диссипативная сила типа вязкого трения по координате осциллятора вызывает полное демпфирование системы, поэтому устойчивость режимов со степенью неустойчивости 0 носит вековой характер и упрочняется до асимптотической при наличии полной диссипации. Все остальные режимы со степенью неустойчивости, равной 2 и нечетному числу становятся неустойчивыми. При этом устойчивые стационарные режимы могут появляться и исчезать в зависимости от гиростатического момента маховика.

Сравним полученные результаты со случаем жестко закрепленного на теле-носителе маховика (гиростат).

При жестко закрепленном маховике оси стационарных вращений в главных осях эллипсоида инерции системы относительно ее центра масс направлены, как известно, по образующим конуса Штауде. При выбранном положении маховика конус вырождается в 2 взаимно перпендикулярных круга, пересекающихся по оси, параллельной продольной оси инерции тела-носителя.

Скорость устойчивых вращений при этом с ростом величины кинетического момента может быть как угодно большой, тогда как у подпружинненого маховика скорость устойчивых вращений всегда ограничена, причем последняя не больше скорости вращения гиростата при одинаковых значениях кинетического момента и гиростатического момента маховика. (k и K).

В зависимости от задач, поставленных перед системой свободных тел, маховик можно устанавливать жестко или упруго. Например, если требуется создать в космическом полете искусственную силу тяжести за счет центробежных сил, маховик следует устанавливать жестко, т.к. скорость вращения всей системы при этом можно сделать как угодно большой. Если же требуется у системы, имеющей маховик, иметь небольшую скорость вращения, маховик следует установить упруго.

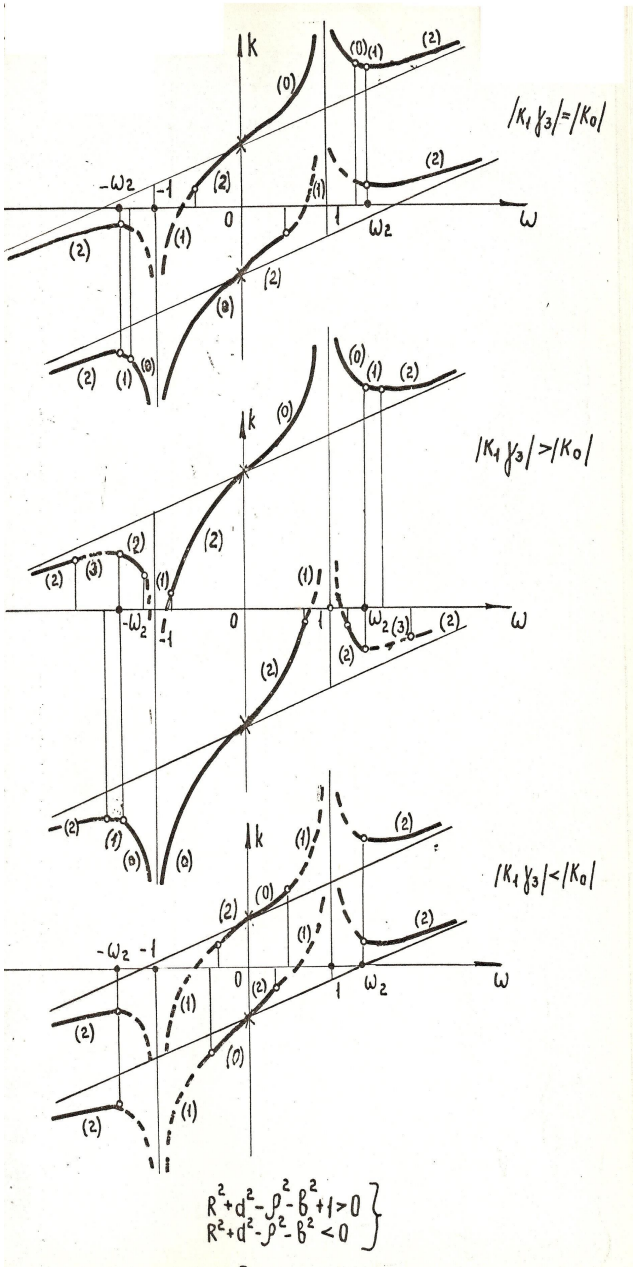


Рис.7.

Литература

1. Ащеулов Ю.В. Колебания в безопорных системах тел.
Диссертация на соискание ученой степени к.ф-м.н. по специальности 01.02-01 – теоретическая механика, МГУ им.М.В.Ломоносова, мех-мат. ф-т, Москва, 1971г.
2. Диментберг Ф.М., Панкова Н.В. Колебания массы на свободной платформе. Машиноведение №5, 1975г.
3. Панкова Н.В., Рубановский В.Н. Устойчивость и бифуркации стационарных вращений свободного твердого тела и упруго связанной с ним точечной массы. Изв.АнСССР, МТТ №4, 1976г.
4. Рубановский В.Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений системы с известными первыми интегралами. В сб. Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. ВЦ АНСССР, М.1975г.
5. Рубановский В.Н., Степанов С.Я. О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения. ПММ, т.33, в.5, 1969г.
6. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников., ВЦ АНСССР, М.1967г.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия.

Поступила: 28.11.08.