Об асимптотическом исследовании решений системы двух связанных осцилляторов, близких на бесконечности к гармоническим

Нестеров П.Н.[1]
Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14

Аннотация

В работе построены асимптотические формулы для решений системы двух линейных осцилляторов с медленно убывающей связью при $t \to \infty$. Для исследования этой системы привлекается специальный метод, являющийся общим вариантом метода усреднения линейных систем с колебательно убывающими коэффициентами. Построение асимптотики осуществляется с использованием фундаментальной теоремы Левинсона, а также некоторых результатов, позволяющих оценивать остаток, возникающий в асимптотических формулах.

1. Постановка задачи

Предметом изучения в этой работе является следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \frac{a \sin \omega t}{t^\alpha} x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \frac{b \sin \omega t}{t^\beta} x_1 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\omega > 0$, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, a и b — произвольные (ненулевые) действительные параметры, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Ставится задача о построении асимптотики решений этой системы при $t \to \infty$. Систему (1) впервые рассмотрели Самохин и Фомин [5] при резонансе $\omega = \omega_1 + \omega_2$ в случае $\alpha = \beta = 1$. Мы получим асимптотические формулы для решений уравнения (1), когда $\alpha + \beta > 1$.

Системы со многими степенями свободы рассматривались различными авторами. В книге [6] исследуется линейная система следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = \Big[C + \varepsilon B_1(\nu t) + \varepsilon^2 B_2(\nu t) + \ldots\Big] x, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{2}$$

где матрица C имеет только чисто мнимые собственные значения $\pm \mathrm{i}\omega_k$, $B_j(s+2\pi) = B_j(s)$. Для этого уравнения в плоскости параметров (ε, ν) можно построить счетное множество «клинообразных» областей, обладающих тем свойством, что для любой точки, принадлежащей одной из таких областей, нулевое решение уравнения (2) неустойчиво. В этом случае говорят, что в уравнении (2) реализуется параметрический резонанс неточечного типа.

Рассматриваемая нами система (1) относится к системам принципиально другого класса нежели (2), хотя и имеет некоторое сходство с подобными системами. В частности, коэффициенты системы (1) не являются периодическими или почти периодическими функциями, что, естественно, оказывает определенное влияние на особенности проявления параметрического резонанса в таких системах. Мы покажем, что в системе (2) имеет

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проекты РНП.2.2.2.3.16065 и РНП.2.1.1.630), а также Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF).

место точечный резонанс. Кроме того, построив асимптотические формулы для решений этой системы, мы установим еще одну особенность реализации параметрического резонанса в системах с колебательно убывающими коэффициентами. Эта особенность состоит в следующем: скорость возрастания амплитуды колебаний, вообще говоря, не является экспоненциальной, как в случае «классического» параметрического резонанса, а может иметь различный характер, например, степенной или логарифмический.

2. Теорема Левинсона и оценка асимптотического остатка

Одним из фундаментальных результатов в теории асимптотического интегрирования линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений является теорема Н. Левинсона.

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \big(\Lambda(t) + R(t)\big)x, \tag{3}$$

где $x(t)$ — комплекснозначный вектор размерности m, $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)\big)$ — непрерывная диагональная матрица, а $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Последняя запись означает, что матрица $R(t)$ абсолютно интегрируема, т.е. существует конечный интеграл

$$\int_{t_0}^{\infty} \|R(t)\| dt,$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая матричная норма. Системы вида (3) называют L-диагональными. Обозначим через $e_1, e_2, \dots, e_m$ — векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^m$. Фиксируем номер k, $1 \le k \le m$. Предположим, что для каждой пары индексов (j, k) имеет место либо

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}\big(\lambda_j(s) - \lambda_k(s)\big) ds \le K_1, \quad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \tag{4}$$

либо

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}\big(\lambda_j(s) - \lambda_k(s)\big) ds \ge K_2 \quad \text{для} \quad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \tag{5}$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Имеет место [8, 9]

Теорема 1 (Levinson). *Если выполнены условия* (4)–(5), *то L-диагональная система* (3) *имеет решение, которое допускает следующее асимптотическое представление при* $t \to \infty$:

$$x_k(t) = \big(e_k + o(1)\big) \exp\Big\{ \int_{t^*}^{t} \lambda_k(s) ds \Big\}. \tag{6}$$

Для получения более точной асимптотики решения $x_k(t)$ иногда возникает необходимость оценить скорость стремления к нулю члена $o(1)$ в асимптотическом представлении (6). В исследовании [7], отправной точкой для которого послужила работа Гельфонда и Кубенской [1], получен следующий результат:

Теорема 2. *Пусть матрица $\Lambda(t)$ непрерывна при $t \geq t_0$, $k \in \{1, \ldots, m\}$ фиксировано, и для всех $1 \leq j \leq m$ существуют константы $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что или*

$$\exp\Big\{\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_j(s) - \lambda_k(s)\big)ds\Big\} \leq K_1 e^{-\alpha(t_2 - t_1)} \qquad \textit{при} \quad t_2 \geq t_1 \geq t_0, \tag{7}$$

или

$$\exp\Big\{\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_j(s) - \lambda_k(s)\big)ds\Big\} \geq K_2 \qquad \textit{при} \quad t_2 \geq t_1 \geq t_0. \tag{8}$$

Пусть матрица $R(t)$ размера $m \times m$ непрерывна при $t \geq t_0$, и существует скалярная функция

$$\phi(t) \geq ||R(t)||, \qquad \phi(t) \in L_1[t_0, \infty). \tag{9}$$

Более того, если неравенство (7) выполнено хотя бы для одного j, мы потребуем, чтобы существовала константа $\beta \in [0, \alpha)$ такая, что

$$\phi(t_1)e^{\beta t_1} \leq \phi(t_2)e^{\beta t_2} \quad \textit{для всех} \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2. \tag{10}$$

Тогда существует решение $x_k(t)$ системы (3), имеющее при $t \to \infty$ следующую асимптотику:

$$x_k(t) = \Big[e_k + O\Big(\int_t^{\infty} \phi(\tau)d\tau\Big)\Big] \exp\Big\{\int_{t^*}^{t} \lambda_k(s)ds\Big\}. \tag{11}$$

Мы воспользуемся теоремой 2 для получения асимптотического представления фундаментальной матрицы системы

$$\frac{dx}{dt} = \Big(\sum_{j=0}^{k} t^{-\alpha_j} A_j + O\big(t^{-\varphi}\big)\Big)x, \tag{12}$$

где $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \leq 1$, $\{A_j\}$ — постоянные ненулевые матрицы и $\varphi > 1$. Приводимые ниже результаты являются прямым следствием возможности преобразования системы (12) к L-диагональной форме при помощи замены с ограниченными коэффициентами (по этому поводу см., например, [2]) и последующего использования теоремы 2. Пусть

$$A(t) = t^{\alpha_0} \sum_{j=0}^{k} t^{-\alpha_j} A_j.$$

Случай 1: $k \neq 0$.

Предположим, что матрица A_0 имеет различные собственные значения, и для всех пар $\big(\lambda_i(t), \lambda_j(t)\big)$ собственных чисел матрицы $A(t)$ имеет место

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)\big) \neq 0 \quad \text{или} \quad \mathrm{Re}\big(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)\big) \equiv 0, \quad t \geq t_0. \tag{13}$$

Тогда фундаментальная матрица $X(t)$ системы (12) имеет следующую асимптотику:

$$X(t) = \Big[C_0 + O\Big(t^{-\varphi_1+1}\Big)\Big] \exp\Big\{\int_{t^*}^{t} s^{-\alpha_0}\Lambda(s)ds\Big\}, \qquad t \to \infty,$$

где C_0 — матрица, составленная из собственных векторов матрицы A_0, и $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\bigl(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)\bigr)$. Константа φ_1 определяется следующим образом:

$$\varphi_1 = \min\{\varphi, \alpha_1 - \alpha_0 + 1\}.$$

Случай 2: $k = 0$.

В этом случае нам достаточно предположить, что матрица A_0 диагонализируема. Если

- $\alpha_0 < 1$, то матрица $X(t)$ допускает следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$X(t) = \Bigl[C_0 + O\bigl(t^{-\varphi+1}\bigr)\Bigr] \exp\Bigl\{\int_{t^*}^{t} s^{-\alpha_0}\Lambda ds\Bigr\}, \qquad t \to \infty,$$

где C_0 — матрица, составленная из собственных векторов матрицы A_0, $\Lambda = \operatorname{diag}\bigl(\lambda_1, \dots, \lambda_m\bigr)$ — диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения матрицы A_0.

Чуть более сложная оценка для асимптотического остатка получается в случае, когда

- $\alpha_0 = 1$. Имеем,

$$X(t) = \Bigl[C_0 + \omega(t)\Bigr] \exp\Bigl\{\int_{t^*}^{t} s^{-1}\Lambda ds\Bigr\}, \qquad t \to \infty,$$

где C_0 — матрица, по столбцам которой стоят собственные векторы матрицы A_0, отвечающие собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Далее, $\Lambda = \operatorname{diag}\bigl(\lambda_1, \dots, \lambda_m\bigr)$, $\omega(t)$ — стремящаяся к нулю матрица, i-ый столбец которой есть вектор порядка $O\bigl(f_i(t)\bigr)$, при этом

$$f_i(t) = \begin{cases} t^{-\psi_i+1}, & \theta_i + 1 \neq \varphi, \\ t^{-\varphi+1}\ln t, & \theta_i + 1 = \varphi. \end{cases}$$

Здесь

$$\psi_i = \min\{\theta_i + 1, \varphi\}, \quad \text{где} \quad \theta_i = -\max_j\{\operatorname{Re}\bigl(\lambda_j - \lambda_i\bigr) | \quad \operatorname{Re}\bigl(\lambda_j - \lambda_i\bigr) < 0\},$$

и $\theta_i = \infty$, если множество, по которому берется максимум в выражении выше, пусто.

3. Асимптотическое интегрирование системы (1)

Заменой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega_1 t & \sin\omega_1 t & 0 & 0 \\ -\omega_1\sin\omega_1 t & \omega_1\cos\omega_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega_2 t & \sin\omega_2 t \\ 0 & 0 & -\omega_2\sin\omega_2 t & \omega_2\cos\omega_2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

от (1) мы переходим к следующей системе:

$$\dot{x} = \Bigl[A_1(t)t^{-\alpha} + A_2(t)t^{-\beta}\Bigr]x, \quad x = (c_1, c_2, d_1, d_2). \tag{14}$$

Здесь

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \hat{A}_1(t) \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad A_2(t) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \hat{A}_2(t) & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{O}$ — нулевая матрица размера 2×2, а $\hat{A}_1(t)$ и $\hat{A}_2(t)$ имеют следующий вид:

$$\hat{A}_1(t)=\begin{pmatrix} \frac{a}{\omega_1}\sin\omega t\sin\omega_1 t\cos\omega_2 t & \frac{a}{\omega_1}\sin\omega t\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t \\ -\frac{a}{\omega_1}\sin\omega t\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t & -\frac{a}{\omega_1}\sin\omega t\cos\omega_1 t\sin\omega_2 t \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_2(t)=\begin{pmatrix} \frac{b}{\omega_2}\sin\omega t\cos\omega_1 t\sin\omega_2 t & \frac{b}{\omega_2}\sin\omega t\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t \\ -\frac{b}{\omega_2}\sin\omega t\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t & -\frac{b}{\omega_2}\sin\omega t\sin\omega_1 t\cos\omega_2 t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, нам следует построить асимптотику решений системы (14).

Систему (14) с помощью усредняющей замены

$$x=\big(I+Y_1(t)t^{-\alpha}+Y_2(t)t^{-\beta}\big)y, \tag{15}$$

где I — единичная 4×4-матрица, а $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, при достаточно больших t попытаемся привести к виду

$$\dot{y}=\Big(A_1t^{-\alpha}+A_2t^{-\beta}+R(t)\Big)y \tag{16}$$

с постоянными матрицами A_1, A_2 и матрицей $R(t)\in L_1[t_0,\infty)$. Возможность и целесообразность такого рода преобразований подробно изучена в работе [4]. Подставим замену (15) в систему (14) и учтем (16). Собирая отдельно члены при $t^{-\alpha}$ и $t^{-\beta}$, получаем матричные дифференциальные уравнения для определения неизвестных матриц $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, а также A_1 и A_2:

$$\dot{Y}_1=A_1(t)-A_1,\qquad \dot{Y}_2=A_2(t)-A_2,$$

Пусть

$$A_1=\mathrm{M}\big[A_1(t)\big],\quad A_2=\mathrm{M}\big[A_2(t)\big],\quad \text{где}\quad \mathrm{M}\big[F(t)\big]:=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(s)ds.$$

При таком выборе постоянных матриц A_1 и A_2 указанные выше уравнения однозначно разрешимы в классе матриц, элементами которых являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением. Собирая теперь все оставшиеся слагаемые в полученном выражении и выражая $R(t)$, получаем

$$\begin{aligned} R(t)=\Big[I+Y_1(t)t^{-\alpha}+Y_2(t)t^{-\beta}\Big]^{-1}\Big(&A_1(t)Y_1(t)t^{-2\alpha}+A_2(t)Y_2(t)t^{-2\beta}+\\ &+A_1(t)Y_2(t)t^{-(\alpha+\beta)}+A_2(t)Y_1(t)t^{-(\alpha+\beta)}-Y_1(t)A_1t^{-2\alpha}-Y_2(t)A_2t^{-2\beta}-\\ &-Y_1(t)A_2t^{-(\alpha+\beta)}-Y_2(t)A_1t^{-(\alpha+\beta)}+\alpha Y_1(t)t^{-(1+\alpha)}+\beta Y_2(t)t^{-(1+\beta)}\Big). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$A_1(t)Y_1(t)=\begin{pmatrix}\mathbb{O} & \hat{A}_1(t)\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{O} & \hat{Y}_1(t)\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}$$

и

$$A_2(t)Y_2(t)=\begin{pmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \hat{A}_2(t) & \mathbb{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \hat{Y}_2(t) & \mathbb{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}.$$

Понятно, что $Y_1(t)A_1$ и $Y_2(t)A_2$ также суть нулевые матрицы. Поэтому

$$R(t)=\Big[I+Y_1(t)t^{-\alpha}+Y_2(t)t^{-\beta}\Big]^{-1}\Big(X(t)t^{-(\alpha+\beta)}+\alpha Y_1(t)t^{-(1+\alpha)}+\beta Y_2(t)t^{-(1+\beta)}\Big), \tag{17}$$

где

$$X(t) = \begin{pmatrix} \hat{X}_1(t) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \hat{X}_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\hat{X}_1(t) = \hat{A}_1(t)\hat{Y}_2(t) - \hat{Y}_1(t)\hat{A}_2,$$
$$\hat{X}_2(t) = \hat{A}_2(t)\hat{Y}_1(t) - \hat{Y}_2(t)\hat{A}_1.$$

Здесь мы использовали обозначения $\hat{A}_1 = \mathrm{M}\big[\hat{A}_1(t)\big]$, $\hat{A}_2 = \mathrm{M}\big[\hat{A}_2(t)\big]$. Из формулы (17) непосредственно следует, что матрица $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$, когда $\alpha + \beta > 1$. Выпишем несколько первых членов в асимптотическом представлении для матрицы $R(t)$. В силу того, что

$$\Big[I + Y_1(t)t^{-\alpha} + Y_2(t)t^{-\beta}\Big]^{-1} = I - Y_1(t)t^{-\alpha} - Y_2(t)t^{-\beta} + \dots,$$

получаем

$$R(t) = \begin{pmatrix} \hat{X}_1(t) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \hat{X}_2(t) \end{pmatrix} t^{-(\alpha+\beta)} + \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \alpha\hat{Y}_1(t)t^{-(1+\alpha)} \\ \beta\hat{Y}_2(t)t^{-(1+\beta)} & \mathbb{O} \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \hat{Y}_1(t)\hat{X}_2(t)t^{-(2\alpha+\beta)} \\ \hat{Y}_2(t)\hat{X}_1(t)t^{-(\alpha+2\beta)} & \mathbb{O} \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} \beta\hat{Y}_1(t)\hat{Y}_2(t) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \alpha\hat{Y}_2(t)\hat{Y}_1(t) \end{pmatrix} t^{-(1+\alpha+\beta)} + \dots. \quad (18)$$

Под многоточием мы, как обычно, понимаем члены более высокого порядка малости при $t \to \infty$.

Таким образом, система (14) при помощи усредняющей замены (15), действительно, может быть приведена к виду (16) с матрицей $R(t)$ из класса $L_1[t_0, \infty)$ в том случае, когда $\alpha + \beta > 1$.

Рассмотрим далее следующие ситуации:

I. $\omega \neq \omega_1 + \omega_2$, $\omega \neq \omega_2 - \omega_1$, $\omega \neq \omega_1 - \omega_2$.

Этот случай называют нерезонансным, поскольку все решения (1) оказываются ограниченными. Действительно, поскольку матрицы A_1 и A_2 в этой ситуации являются нулевыми, то фундаментальная матрица системы (16) допускает асимптотическое представление $Y(t) = I + o(1)$, $t \to \infty$. Используя асимптотическое представление (18) для функции $R(t)$ и оценивая остаток $o(1)$, согласно описанному в пункте 2 способу, получаем следующую асимптотику для решений исходной системы (1):

$$x_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + O\big(t^{-\alpha}\big) + O\big(t^{1-\alpha-\beta}\big),$$
$$x_2(t) = C_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) + O\big(t^{-\beta}\big) + O\big(t^{1-\alpha-\beta}\big),$$

где $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ — произвольные действительные постоянные.

II. $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

В данном случае матрицы A_1 и A_2 имеют следующий вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \hat{A}_1 \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \hat{A}_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{A}_1 = \frac{a}{4\omega_1}\,\mathrm{diag}(1, -1), \quad \hat{A}_2 = \frac{b}{4\omega_2}\,\mathrm{diag}(1, -1).$$

Пусть матрица $C(t)$ приводит матрицу $A_1 t^{-\alpha} + A_2 t^{-\beta}$ к диагональному виду. Несложно убедиться в том, что

$$C(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t)D & -\gamma(t)D \\ E & E \end{pmatrix}, \quad C^{-1}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \big(\gamma(t)\big)^{-1}D & E \\ -\big(\gamma(t)\big)^{-1}D & E \end{pmatrix},$$

где $\gamma(t) = \hat{\gamma} t^{\frac{\beta-\alpha}{2}}$,

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\omega_2}{b}\sqrt{\dfrac{ab}{\omega_1\omega_2}}, & ab > 0, \\ \mathrm{i}\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{i}\dfrac{\omega_2}{b}\sqrt{-\dfrac{ab}{\omega_1\omega_2}}, & ab < 0, \end{cases}$$

$D = \operatorname{diag}(1, -1)$, $E = \operatorname{diag}(1, 1)$. Итак, сделаем в (16) замену $y = C(t)z$. Тогда эта система приводится к следующему виду:

$$\dot{z} = \Big[\Lambda t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} + Bt^{-1} + R_1(t)\Big]z. \tag{19}$$

Здесь $\Lambda = \hat{\lambda}\operatorname{diag}(1, 1, -1, -1)$,

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{ab}{\omega_1\omega_2}}, & ab > 0, \\ \mathrm{i}\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{i}\dfrac{1}{4}\sqrt{-\dfrac{ab}{\omega_1\omega_2}}, & ab < 0. \end{cases}$$

Далее,

$$Bt^{-1} = -C^{-1}(t)\dot{C}(t) = \begin{pmatrix} E & -E \\ -E & E \end{pmatrix}\frac{\alpha-\beta}{4}t^{-1},$$

наконец, $R_1(t) = C^{-1}(t)R(t)C(t)$. Наша ближайшая цель заключается в том, чтобы показать, что матрица $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$, когда $\alpha + \beta > 1$. Для этого выясним, как выглядит матрица $C^{-1}(t)S(t)C(t)$, когда $S(t)$ имеет блочно-диагональную структуру. Точнее, пусть сперва

$$S(t) = \begin{pmatrix} \hat{S}_1(t) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \hat{S}_2(t) \end{pmatrix},$$

тогда, как несложно установить,

$$C^{-1}(t)S(t)C(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} D\hat{S}_1(t)D + \hat{S}_2(t) & -D\hat{S}_1(t)D + \hat{S}_2(t) \\ -D\hat{S}_1(t)D + \hat{S}_2(t) & D\hat{S}_1(t)D + \hat{S}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выясняется, что в случае с матрицей такой структуры функция $\gamma(t)$ не влияет на интегрируемость матрицы $C^{-1}(t)S(t)C(t)$. То есть, если $S(t) \in L_1[t_0, \infty)$, то и $C^{-1}(t)S(t)C(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Пусть теперь

$$S(t) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \hat{S}_1(t) \\ \hat{S}_2(t) & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

тогда

$$C^{-1}(t)S(t)C(t) = \frac{1}{2}\gamma(t)\begin{pmatrix} \hat{S}_2(t)D & -\hat{S}_2(t)D \\ \hat{S}_2(t)D & -\hat{S}_2(t)D \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\big(\gamma(t)\big)^{-1}\begin{pmatrix} D\hat{S}_1(t) & D\hat{S}_1(t) \\ -D\hat{S}_1(t) & -D\hat{S}_1(t) \end{pmatrix}.$$

Итак, имея ввиду все вышесказанное и вспоминая (18), получаем

$$R_1(t) = C^{-1}(t)R(t)C(t) = O\Big(t^{-(\alpha+\beta)}\Big) + O\Big(t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}-1}\Big) + \\ + O\Big(t^{-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)}\Big) + O\Big(t^{-(1+\alpha+\beta)}\Big) = O\Big(t^{-(\alpha+\beta)}\Big) + O\Big(t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}-1}\Big).$$

Откуда и следует, что $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$, когда $\alpha+\beta > 1$. Построение асимптотики решений системы (1) начнем со случая

II.1 $\alpha + \beta > 2$.

Систему (19) в этом случае можно записать следующим образом:

$$\dot{z} = \Big[Bt^{-1} + \bar{R}_1(t)\Big]z, \tag{20}$$

где $\bar{R}_1(t) = \Lambda t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} + R_1(t) = O\Big(t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\Big)$. Пусть сперва

а) $\alpha = \beta$.

Матрица B является тогда нулевой. Применяя теорему 2, сразу же получаем асимптотику решений системы (1)

$$\begin{array}{l} x_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + O\big(t^{-\alpha+1}\big), \\ x_2(t) = C_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) + O\big(t^{-\alpha+1}\big), \end{array}$$

где $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ — произвольные действительные постоянные.

б) $\alpha \neq \beta$.

- $1 < \alpha < \beta$ $(1 < \beta < \alpha)$.

В этом случае удобно строить асимптотику сразу для системы (16), поскольку она уже имеет L-диагональный вид. Вновь обращаясь к результатам пункта 2, имеем

$$\begin{array}{l} x_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + O\big(t^{-\alpha+1}\big), \\ x_2(t) = C_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) + O\big(t^{-\beta+1}\big), \end{array}$$

где $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ — произвольные действительные постоянные.

- $0 < \alpha \leq 1 < \beta$ $(0 < \beta \leq 1 < \alpha)$.

Фундаментальная матрица системы (20) имеет следующее асимптотическое представление:

$$Z(t) = \left[\begin{pmatrix} E & -E \\ E & E \end{pmatrix} + o(1)\right] \begin{pmatrix} E & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & t^{\frac{\alpha-\beta}{2}}E \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Фундаментальная матрица $Y(t)$ системы (16) есть $C(t)Z(t)$. Домножая ее справа на невырожденную матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}E & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\frac{1}{2}\hat{\gamma}^{-1}D \end{pmatrix},$$

мы получаем следующий результат:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} o(1)t^{\frac{\beta-\alpha}{2}} & E + o(1) \\ E + o(1) & o(1)t^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \end{pmatrix}, \qquad t \to \infty. \tag{22}$$

Понятно, что асимптотика будет зависеть от величины члена $o(1)$. Мы можем утверждать, что

$$o(1) = O\big(t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}+1}\big)$$

в том случае, когда $\alpha < 1$ $(\beta < 1)$. Несколько иначе оценивается остаточный член в ситуации, когда $\alpha = 1$ $(\beta = 1)$. В данном случае асимптотическое представление (21) запишем в виде

$$Z(t) = \left[\begin{pmatrix} E & -E \\ E & E \end{pmatrix} + \omega(t)\right] \begin{pmatrix} E & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & t^{\frac{\alpha-\beta}{2}}E \end{pmatrix}.$$

Матрица $\omega(t)$ устроена следующим образом: ее i-ый столбец есть вектор $\omega_i(t)$, который допускает оценку

$$\omega_i(t) = \begin{cases} O\big(t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}+1}\ln t\big), & i = 1,2, \\ O\big(t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}+1}\big), & i = 3,4. \end{cases}$$

Таким образом, получается следующая асимптотика для решений системы (1) при $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + O\big(t^{-\alpha+1}\big), \\ x_2(t) &= C_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) + O\big(t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}+1}\big), \end{aligned}$$

где $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ — произвольные действительные постоянные и $\alpha < 1$. Или, когда $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + O\big(\ln t\big), \\ x_2(t) &= C_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) + O\big(t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}+1}\big). \end{aligned}$$

Асимптотическое представление для решения $x_2(t)$ в случае, когда $\alpha \le 1$, оказывается вполне удовлетворительным в то время, как судьба $x_1(t)$ при $t \to \infty$ остается неясной. Будем действовать иначе. Для определенности будем считать, что $0 < \alpha \le 1 < \beta$. Естественно предположить, что основное влияние на характер поведения решений системы (16) будет оказывать слагаемое $A_1 t^{-\alpha}$. Пусть матрица T приводит матрицу A_1 к жордановой нормальной форме. Сделаем в системе (16) замену $y = Tz$, где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Преобразованная система имеет вид

$$\dot z = \Big[J \frac{a}{4\omega_1} t^{-\alpha} + \bar J \frac{b}{4\omega_2} t^{-\beta} + R_1(t) \Big] z. \tag{23}$$

Здесь

$$J = \begin{pmatrix} \hat J & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \hat J \end{pmatrix}, \quad \bar J = \begin{pmatrix} \hat J^{\mathrm{T}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \hat J^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad \hat J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1(t) = T^{-1} R(t) T.$$

Теперь в системе (23) перейдем к новому времени $\tau = \frac{a}{4\omega_1} \int t^{-\alpha} dt$. Имеем

$$\bar z' = \Big[J + R_2(\tau) \Big] \bar z,$$

где $\bar z(\tau) = z\big(t(\tau)\big)$,

$$R_2(\tau) = \Big[\bar J \frac{b}{4\omega_2} \big(t(\tau)\big)^{-\beta} + R_1\big(t(\tau)\big) \Big] t'(\tau),$$

а знаком $'$ обозначена производная по τ. Выполним замену $\bar z = P(\tau) v$, где

$$P(\tau) = \begin{pmatrix} \hat P(\tau) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \hat P(\tau) \end{pmatrix}, \qquad \hat P(\tau) = \begin{pmatrix} \tau & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приходим к следующей системе:

$$v' = \Big[L\tau^{-1} + R_3(\tau) \Big] v, \tag{24}$$

где $L = \operatorname{diag}(-1, 0, -1, 0)$, $R_3(\tau) = P^{-1}(\tau) R_2(\tau) P(\tau)$. Убедимся в том, система (24) является L-диагональной. Для этого нам необходимо показать, что $R_3(\tau) \in L_1[\tau_0, \infty)$. Если $\alpha = 1$,

то $t(\tau) = \exp\{\frac{4\omega_1}{a}\tau\}$, поэтому $R_3(\tau) = O\big(\tau e^{-\nu\tau}\big)$, $\nu > 0$ и, очевидно, принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. Поскольку $R_3(\tau) = O\big(t^{-q}\big)$, где $q > 0$ сколь угодно большое число, то систему (24) можно записать в виде (12). Пусть теперь $\alpha < 1$, тогда

$$t(\tau) = \Big(\frac{4\omega_1}{a}(1-\alpha)\tau\Big)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Сперва убедимся, что функция

$$\psi(\tau) = \tau\big(t(\tau)\big)^{-\beta}t'(\tau)$$

принадлежит классу $L_1[\tau_0, \infty)$. Действительно,

$$\psi(\tau) = O\Big(\tau^{-\frac{\beta-1}{1-\alpha}}\Big),$$

и поскольку $\alpha + \beta > 2$, то

$$-\frac{\beta-1}{1-\alpha} < -1.$$

Осталось показать, что $\Psi(\tau) = P^{-1}(\tau)R_1\big(t(\tau)\big)P(\tau)t'(\tau)$ принадлежит классу $L_1[\tau_0, \infty)$. Вспоминая асимптотическое разложение (18), замечаем, что нам достаточно доказать принадлежность классу $L_1[\tau_0, \infty)$ следующего слагаемого:

$$\Psi_1(\tau) = P^{-1}(\tau)T^{-1}\begin{pmatrix}\mathbb{O} & \hat{S}_1\big(t(\tau)\big)\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}TP(\tau)t'(\tau),$$

где

$$\hat{S}_1(t) = O\big(t^{-(1+\alpha)}\big).$$

Интегрируемость остальных слагаемых в разложение для $\Psi(\tau)$ будет следовать из интегрируемости функции $\psi(\tau)$. Имеем

$$T^{-1}\begin{pmatrix}\mathbb{O} & \hat{S}_1\big(t(\tau)\big)\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}T = \begin{pmatrix}0 & \hat{s}_{11} & 0 & -\hat{s}_{12}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \hat{s}_{21} & 0 & -\hat{s}_{22}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

где $\hat{s}_{ij} = \hat{s}_{ij}\big(t(\tau)\big)$ – элементы матрицы $\hat{S}_1\big(t(\tau)\big)$. Поэтому

$$\Psi_1(\tau) = \begin{pmatrix}0 & \hat{s}_{11} & 0 & -\hat{s}_{12}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \hat{s}_{21} & 0 & -\hat{s}_{22}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{t'(\tau)}{\tau}.$$

В силу того, что $\hat{S}(t) \in L_1[t_0, \infty)$, матрица $\Psi_1(\tau) \in L_1[\tau_0, \infty)$. Таким образом, нами показано, что система (24) является L-диагональной. Фундаментальная матрица $V(\tau)$ этой системы имеет следующую асимптотику при $\tau \to \infty$:

$$V(\tau) = \Big[I + o(1)\Big]\,\mathrm{diag}(\tau^{-1}, 1, \tau^{-1}, 1).$$

Фундаментальная матрица $Y(t)$ системы (16) имеет поэтому следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$Y(t) = \begin{pmatrix}1+o(1) & \tau\big(1+o(1)\big) & o(1) & \tau o(1)\\ o(1) & \tau o(1) & 1+o(1) & \tau\big(1+o(1)\big)\\ \tau^{-1}o(1) & 1+o(1) & \tau^{-1}o(1) & o(1)\\ \tau^{-1}o(1) & o(1) & \tau^{-1}o(1) & -1+o(1)\end{pmatrix}, \quad \tau = \frac{a}{4\omega_1}\int t^{-\alpha}dt.$$

В случае, когда $\alpha = 1$ несложно убедиться в том, что $o(1) = O\big((\ln t)^{-1}\big)$. Итак, объединяя эти результаты с полученными нами ранее, мы можем написать следующую асимптотику для решений системы (1) при $t \to \infty$:

$$x_1(t) = C_1 \tfrac{a}{4\omega_1} \cos(\omega_1 t - \gamma_1) \ln t + O(1),$$
$$x_2(t) = C_1 \cos(\omega_2 t + \gamma_1) + O\big(t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}+1}\big),$$

если $\alpha = 1$, и

$$x_1(t) = \tfrac{a}{4\omega_1} \tfrac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \big[C_1 \cos(\omega_1 t - \gamma_1) + o(1)\big],$$
$$x_2(t) = C_1 \cos(\omega_2 t + \gamma_1) + O\big(t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}+1}\big),$$

когда $\alpha < 1$. Здесь C_1, γ_1 — произвольные действительные постоянные.

Если $0 < \beta \leq 1 < \alpha$, то для написания асимптотики следует поменять местами индексы у $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и параметры $\alpha \leftrightarrow \beta$, $a \leftrightarrow b$, $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$.

II.2 $\alpha + \beta = 2$.

II.2.1 $ab > 0$.

Система (19) записывается в этом случае в виде

$$\dot{z} = \Big[F t^{-1} + R_1(t)\Big] z, \tag{25}$$

где $F = \Lambda + B$, $R_1(t) = O\big(t^{-2}\big)$.

а) $\alpha = \beta = 1$.

В этом случае решения системы (1) (матрица B является нулевой) имеют следующую асимптотику:

$$x_1(t) = \gamma t^{\lambda} \big[C_1 \cos(\omega_1 t + \gamma_1) + o(1)\big],$$
$$x_2(t) = t^{\lambda} \big[C_1 \cos(\omega_2 t - \gamma_1) + o(1)\big],$$

где C_1, γ_1 — произвольные действительные постоянные. Член $o(1)$ оценивается следующим образом:

$$o(1) = \begin{cases} O\big(t^{-\varphi+1}\big), & 2\lambda + 1 \neq 2, \\ O\big(t^{-1} \ln t\big), & 2\lambda + 1 = 2, \end{cases}$$

где $\varphi = \min\{2\lambda + 1, 2\}$.

б) $\alpha \neq \beta$.

Собственные числа матрицы F имеют вид

$$\mu_{1,2} = \frac{\alpha - \beta}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{ab}{\omega_1 \omega_2} + (\alpha - \beta)^2}.$$

Алгебраическая и геометрическая кратности каждого их этих собственных чисел совпадают и равны 2. Таким образом, матрица F оказывается диагонализируемой. Введем обозначение

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{ab}{\omega_1 \omega_2} + (\alpha - \beta)^2}.$$

Дальнейшее построение асимптотики не вызывает существенных трудностей, поэтому мы позволим себе сразу же написать окончательный результат:

$$x_1(t) = \gamma t^{\frac{\beta-\alpha}{4}+\sigma} \big[C_1 \cos(\omega_1 t + \gamma_1) + o(1)\big],$$
$$x_2(t) = \tfrac{\lambda - \mu_2}{\lambda + \mu_1} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}+\sigma} \big[C_1 \cos(\omega_2 t - \gamma_1) + o(1)\big],$$

где C_1, γ_1 — произвольные действительные постоянные. Член $o(1)$ оценивается следующим образом:

$$o(1) = \begin{cases} O\big(t^{-\varphi+1}\big), & 2\sigma+1 \neq 2, \\ O\big(t^{-1}\ln t\big), & 2\sigma+1 = 2, \end{cases}$$

где $\varphi = \min\{2\sigma+1, 2\}$. Отметим также, что поскольку $\sigma > \frac{|\alpha-\beta|}{4}$, решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ неограничено возрастают по абсолютной величине.

II.2.2 $ab < 0$.

а) $\alpha = \beta = 1$.

В этом случае решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы (1) имеют при $t \to \infty$ асимптотику вида

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1\gamma\sin(\omega_1 t - \gamma_1)\sin(\lambda\ln t) - C_2\gamma\sin(\omega_1 t - \gamma_2)\cos(\lambda\ln t) + O\big(t^{-1}\big), \\ x_2(t) &= C_1\sin(\omega_2 t + \gamma_1)\cos(\lambda\ln t) + C_2\sin(\omega_2 t + \gamma_2)\sin(\lambda\ln t) + O\big(t^{-1}\big), \end{aligned}$$

где $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ — произвольные действительные постоянные.

б) $\alpha \neq \beta$.

Этот случай примечателен тем, что на характер поведения решений системы (1) влияют одновременно все параметры. Точнее, для вычисления собственных чисел μ матрицы F мы получаем следующее выражение:

$$\Big(\frac{\alpha-\beta}{4} - \mu\Big)^2 = \Big(\frac{\alpha-\beta}{4}\Big)^2 - \lambda^2.$$

Поэтому возникает необходимость рассмотреть несколько ситуаций.

- $(\alpha-\beta)^2 + \dfrac{ab}{\omega_1\omega_2} > 0.$

Собственные числа $\mu_{1,2}$ в этом случае имеют кратности (алгебраическую и геометрическую) равные 2 и представимы в виде

$$\mu_{1,2} = \frac{\alpha-\beta}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{ab}{\omega_1\omega_2} + (\alpha-\beta)^2} = \frac{\alpha-\beta}{4} \pm \sigma.$$

Решения уравнения (1) в этом случае имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \gamma t^{\frac{\beta-\alpha}{4}+\sigma}\big[C_1\cos(\omega_1 t + \gamma_1) + o(1)\big], \\ x_2(t) &= \tfrac{\mu_2}{\lambda} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}+\sigma}\big[C_1\cos(\omega_2 t - \gamma_1) + o(1)\big], \end{aligned}$$

где C_1, γ_1 — произвольные действительные постоянные, $o(1) = O\big(t^{-2\sigma}\big)$. Очевидно, что $\sigma < \frac{|\alpha-\beta|}{4}$, поэтому одно из двух решений $x_1(t)$ или $x_2(t)$ неограничено возрастает по абсолютной величине, а другое — стремится к нулю при $t \to \infty$.

- $(\alpha-\beta)^2 + \dfrac{ab}{\omega_1\omega_2} < 0.$

Собственные числа $\mu_{1,2}$ по-прежнему имеют кратности (алгебраическую и геометрическую) равные 2 и выглядят следующим образом:

$$\mu_{12} = \frac{\alpha-\beta}{4} \pm \mathrm{i}\sigma^*, \quad \text{где} \quad \sigma^* := \frac{1}{4}\sqrt{-\Big[\frac{ab}{\omega_1\omega_2} + (\alpha-\beta)^2\Big]}.$$

Асимптотика решений системы (1) имеет тогда вид

$$x_1(t) = \gamma t^{\frac{\beta-\alpha}{4}}\Big[C_1\sin(\omega_1 t-\gamma_1)\sin(\sigma^*\ln t) - C_2\sin(\omega_1 t-\gamma_2)\cos(\sigma^*\ln t)\Big] + O\big(t^{-1}\big)t^{\frac{\beta-\alpha}{4}},$$
$$x_2(t) = t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}\Big[C_1\sin(\omega_2 t+\gamma_1)\cos(\sigma^*\ln t+\delta) + C_2\sin(\omega_2 t+\gamma_2)\sin(\sigma^*\ln t+\delta)\Big] + O\big(t^{-1}\big)t^{\frac{\alpha-\beta}{4}},$$

где $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ — произвольные действительные постоянные,

$$\sin\delta = \frac{\alpha-\beta}{4\lambda}, \quad \cos\delta = \frac{\sigma^*}{\lambda}.$$

- $(\alpha-\beta)^2 + \dfrac{ab}{\omega_1\omega_2} = 0.$

Это наиболее трудоемкий для исследования случай в виду того, что матрица F не является диагонализируемой. Сперва с помощью замены времени $\tau = \ln t$ мы преобразуем систему (25) к виду

$$\bar z' = \Big[F + R_2(\tau)\Big]\bar z,$$

где $\bar z(\tau) = z\big(t(\tau)\big)$, $R_2(\tau) = R_1(e^\tau)e^\tau = O\big(e^{-\tau}\big)$, а знаком $'$ обозначена производная по τ. Далее, осуществляя замену $\bar z = \tilde T w$, где

$$\tilde T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathfrak{i}\lambda & 1 \\ \mathfrak{i}\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta-\alpha}{4} & 0 \\ \frac{\beta-\alpha}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

мы приходим к системе

$$w' = \Big[J + R_3(\tau)\Big]w.$$

Здесь

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\alpha-\beta}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha-\beta}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha-\beta}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-\beta}{4} \end{pmatrix}, \quad R_3(\tau) = \tilde T^{-1}R_2(\tau)\tilde T = O\big(e^{-\tau}\big).$$

Проделаем еще одну замену $w = P(\tau)v$, где

$$P(\tau) = e^{\frac{\alpha-\beta}{4}\tau}\begin{pmatrix} \hat P(\tau) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \hat P(\tau) \end{pmatrix}, \qquad \hat P(\tau) = \begin{pmatrix} \tau & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$v' = \Big[L\tau^{-1} + R_4(\tau)\Big]v, \tag{26}$$

где $L = \operatorname{diag}(-1,0,-1,0)$, $R_4(\tau) = P^{-1}(\tau)R_3(\tau)P(\tau) = O\big(\tau e^{-\tau}\big)$. Система (26) является L-диагональной. Фундаментальную матрицу $V(\tau)$ этой систему образуют линейно независимые решения (они расположены по столбцам этой матрицы), имеющие следующие асимптотики:

$$v_1(\tau) = \big[e_1 + O\big(\tau e^{-\tau}\big)\big]\tau^{-1}, \qquad v_2(\tau) = e_2 + O\big(\tau^{-1}\big),$$
$$v_3(\tau) = \big[e_3 + O\big(\tau e^{-\tau}\big)\big]\tau^{-1}, \qquad v_4(\tau) = e_4 + O\big(\tau^{-1}\big).$$

Здесь e_i $(i = 1,\dots,4)$ — векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^4$. Возвращаясь к исходной системе (1), мы получаем следующее асимптотическое представление для ее решений при $t\to\infty$:

$$x_1(t) = C_1\gamma\sin(\omega_1 t-\gamma_1)t^{\frac{\beta-\alpha}{4}}\ln t + O\big(t^{\frac{\beta-\alpha}{4}}\big),$$
$$x_2(t) = C_1\tfrac{\beta-\alpha}{4\lambda}\sin(\omega_2 t+\gamma_1)t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}\ln t + O\big(t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}\big),$$

где C_1, γ_1 — произвольные действительные постоянные.

II.3 $\alpha + \beta < 2$.

II.3.1 $ab > 0$.

а) $\alpha = \beta$.

Построение асимптотики в этом случае не вызывает особенных трудностей в силу того, что система (19) является L-диагональной. По этой причине мы позволим себе сразу же написать окончательный результат:

$$x_1(t) = C_1\gamma\cos(\omega_1 t + \gamma_1)\exp\{\lambda\xi(t)\} + O\big(t^{1-(\alpha+\beta)}\big)\exp\{\lambda\xi(t)\},$$
$$x_2(t) = C_1\cos(\omega_2 t - \gamma_1)\exp\{\lambda\xi(t)\} + O\big(t^{1-(\alpha+\beta)}\big)\exp\{\lambda\xi(t)\},$$

где C_1, γ_1 — произвольные действительные постоянные,

$$\xi(t) = \Big(1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\Big)^{-1} t^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{27}$$

б) $\alpha \neq \beta$.

Сделаем в (19) замену времени $\tau = \int t^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}$. В новом времени τ эта система запишется в следующем виде:

$$\bar{z}' = \Big[\Lambda + B^*\tau^{-1} + R_2(\tau)\Big]\bar{z}. \tag{28}$$

Здесь $\bar{z}(\tau) = z\big(t(\tau)\big)$, $R_2(\tau) = R_1\big(t(\tau)\big)t'(\tau)$, $B^* = B\big(1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\big)^{-1}$, а штрихом обозначена производная по τ. Несложно понять, что

$$R_2(\tau) = O\Big(\tau^{-\frac{\alpha+\beta}{2}\big/\big(1-\frac{\alpha+\beta}{2}\big)}\Big).$$

Система (28) может быть приведена к L-диагональному виду при помощи преобразования

$$\bar{z} = \big(I + C\tau^{-1}\big)w. \tag{29}$$

Элементы постоянной матрицы C определим из следующей неоднородной системы линейных уравнений:

$$C\Lambda - \Lambda C = B^* - \operatorname{diag} B^*.$$

Матрицу C выберем так, чтобы $\operatorname{diag} C = 0$. Для нахождения элементов c_{ij} $(i \neq j)$ матрицы C получаем уравнения

$$c_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) = b^*_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, 4, \quad i \neq j. \tag{30}$$

Напомним, что

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1).$$

Поскольку у матрицы Λ имеются кратные собственные числа, то некоторые из уравнений (30), вообще говоря, могут оказаться неразрешимыми (в случае матрицы B^* произвольного вида). Для таких уравнений $\lambda_j = \lambda_i$. В нашем случае $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\lambda_3 = \lambda_4$. Заметим далее, что элементы b^*_{12}, b^*_{21}, b^*_{34} и b^*_{43} матрицы B^* суть нули, а поэтому разрешимыми оказываются и те уравнения, для которых $\lambda_j = \lambda_i$, при произвольном выборе элементов c_{ij} с соответствующими номерами (выберем их, например, равными нулю).

Таким образом, система (28) заменой (29) приводится к L-диагональному виду

$$w' = \Big[\Lambda + \operatorname{diag} B^* \tau^{-1} + R_1(\tau)\Big] w, \tag{31}$$

где $R_1(\tau) = O\big(\tau^{-\varphi^*}\big)$, и

$$\varphi^* = \min\Big\{2, \frac{\alpha+\beta}{2}\Big/\Big(1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\Big\}. \tag{32}$$

Согласно теореме 2, фундаментальная матрица $W(\tau)$ системы (31) имеет следующую асимптотику при $\tau \to \infty$:

$$W(\tau) = \Big[I + O\big(\tau^{-\varphi_*+1}\big)\Big] \exp\Big\{\int\limits_{\tau^*}^{\tau} \big(\Lambda + \operatorname{diag} B^* s^{-1}\big) ds\Big\}.$$

Возвращаясь теперь к системе (16), получаем асимптотику для фундаментальной матрицы $Y(t)$ при $t \to \infty$:

$$t^{\frac{\alpha-\beta}{4}} \begin{pmatrix} \gamma(t) D\big[E + O\big(t^{-\varphi}\big)\big] \exp\{\lambda\xi(t)\} & -\gamma(t) D\big[E + O\big(t^{-\varphi}\big)\big] \exp\{-\lambda\xi(t)\} \\ \big[E + O\big(t^{-\varphi}\big)\big] \exp\{\lambda\xi(t)\} & \big[E + O\big(t^{-\varphi}\big)\big] \exp\{-\lambda\xi(t)\} \end{pmatrix},$$

где $\xi(t)$ имеет вид (27), а

$$\varphi = \min\Big\{\alpha + \beta - 1, 1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\Big\}. \tag{33}$$

Решения системы уравнений (1) имеют в этом случае следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \gamma t^{\frac{\beta-\alpha}{4}} \exp\{\lambda\xi(t)\}\big[C_1 \cos(\omega_1 t + \gamma_1) + O\big(t^{-\varphi}\big)\big], \\ x_2(t) &= t^{\frac{\alpha-\beta}{4}} \exp\{\lambda\xi(t)\}\big[C_1 \cos(\omega_2 t - \gamma_1) + O\big(t^{-\varphi}\big)\big], \end{aligned}$$

где C_1, γ_1 — произвольные действительные постоянные.

II.3.2 $ab < 0$.

а) $\alpha = \beta$.

Построение асимптотики в этом случае носит тривиальный характер, так что мы выпишем лишь окончательный результат:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1\gamma \sin(\omega_1 t - \gamma_1) \sin(\lambda\xi(t)) - C_2\gamma \sin(\omega_1 t - \gamma_2) \cos(\lambda\xi(t)) + O\big(t^{1-(\alpha+\beta)}\big), \\ x_2(t) &= C_1 \sin(\omega_2 t + \gamma_1) \cos(\lambda\xi(t)) + C_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) \sin(\lambda\xi(t)) + O\big(t^{1-(\alpha+\beta)}\big), \end{aligned}$$

где $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ — произвольные действительные постоянные, а $\xi(t)$ имеет вид (27).

б) $\alpha \neq \beta$.

В этой ситуации для построения асимптотики в точности повторяются все рассуждения, проведенные нами для случая $ab > 0$. С помощью замены времени приводим систему (19) к виду (28), в которой на сей раз

$$\Lambda = \mathrm{i}\lambda \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1).$$

Для фундаментальной матрицы $Y(t)$ системы (16) имеем следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$t^{\frac{\alpha-\beta}{4}} \begin{pmatrix} \gamma(t) D\big[E + O\big(t^{-\varphi}\big)\big] \exp\{\mathrm{i}\lambda\xi(t)\} & -\gamma(t) D\big[E + O\big(t^{-\varphi}\big)\big] \exp\{-\mathrm{i}\lambda\xi(t)\} \\ \big[E + O\big(t^{-\varphi}\big)\big] \exp\{\mathrm{i}\lambda\xi(t)\} & \big[E + O\big(t^{-\varphi}\big)\big] \exp\{-\mathrm{i}\lambda\xi(t)\} \end{pmatrix},$$

где $\xi(t)$ имеет вид (27), а величина φ определяется формулой (33). Перейдя к действительному базису, можно написать асимптотику решений искомой системы (1):

$$x_1(t) = \gamma t^{\frac{\beta-\alpha}{4}}\Big[C_1\sin(\omega_1 t-\gamma_1)\sin(\lambda\xi(t)) - C_2\sin(\omega_1 t-\gamma_2)\cos(\lambda\xi(t))\Big] + O\big(t^{-\varphi}\big)t^{\frac{\beta-\alpha}{4}},$$
$$x_2(t) = t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}\Big[C_1\sin(\omega_2 t+\gamma_1)\cos(\lambda\xi(t)) + C_2\sin(\omega_2 t+\gamma_2)\sin(\lambda\xi(t))\Big] + O\big(t^{-\varphi}\big)t^{\frac{\alpha-\beta}{4}},$$

где $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ — произвольные действительные постоянные.

III. $\omega = \omega_1 - \omega_2$ $(\omega = \omega_2 - \omega_1)$.

Асимптотика решений в этом случае получается из результатов, полученных для случая $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Именно, поскольку $\omega = \omega_1 - \omega_2 = \omega_1 + (-\omega_2)$, то во всех формулах, полученных для случая $\omega = \omega_1 + \omega_2$, следует заменить ω_2 на $-\omega_2$. Далее, если нам необходимо получить результаты для случая $ab > 0$, следует взять результаты в случае $\omega = \omega_1 + \omega_2$, $ab < 0$. Если же нас интересует случай $ab < 0$, надо взять результаты в случае $\omega = \omega_1 + \omega_2$, $ab > 0$. Аналогично следует поступать и в случае $\omega = \omega_2 - \omega_1$.

В завершение отметим, что для так называемого нерезонансного случая в работе [3] построена асимптотика решений системы (1) при значениях параметров

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta > 1, \\ 2\beta + \alpha > 1, \\ \alpha + \beta \le 1. \end{cases} \tag{34}$$

Список литературы

[1] *Гельфонд А.О., Кубенская И.М.* О теореме Перрона в теории разностных уравнений // Известия АН СССР, серия математическая. - 1953. - Т. 17. - С. 83 – 86.

[2] *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: ИЛ, 1958. - 475 с.

[3] *Нестеров П.Н.* Асимптотическое интегрирование системы двух линейных осцилляторов с медленно убывающей связью / Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова. - Ярославль, 2006. - 28 с. - Деп. в ВИНИТИ РАН 21.02.2006, №171-В 2006.

[4] *Нестеров П.Н.* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. - 2007. - Т. 43, №6. - С. 731 – 742.

[5] *Самохин Ю.А., Фомин В.Н.* Метод исследования устойчивости решений линейных систем, подверженных действию параметрических нагрузок с непрерывным спектром // Сибирский Матем. журнал. - 1976. - Т. 17, №4. - С. 926 – 931.

[6] *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффицинтами и их приложения. - М.: Наука, 1972. - 720 с.

[7] *Bodine S., Lutz D.A.* Asymptotic solutions and error estimates for linear systems of difference and differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2004. - V. 290. - P. 343 – 362.

[8] *Eastham M.S.P.* The asymptotic solution of linear differential systems / London Math. Soc. Monographs, Clarendon Press, 1989.

[9] *Levinson N.* The asymptotic nature of the solutions of linear systems of differential equations // Duke Math. J. - 1948. - V. 15. - P. 111 – 126.