

УДК 532.52

СРЫВНОЙ ФЛАТТЕР И ЭФФЕКТ ЗАТЯГИВАНИЯ

П.С. Ланда

Московский государственный университет, Россия, Москва

Рассматривается возбуждение автоколебаний цилиндра, обтекаемого потоком жидкости или газа. Причиной возбуждения таких автоколебаний является срыв вихрей с поверхности цилиндра, вследствие чего указанное явление получило название срывной флаттер. Показано, что в качестве модели срыва вихрей можно рассмотреть возбуждение автоколебаний в некотором генераторе. Взаимодействие этих вихрей с обтекаемым цилиндром можно представить как взаимодействие указанного генератора с дополнительным колебательным контуром. Такое взаимодействие было рассмотрено в ряде классических работ по теории колебаний. Показано также, что при определенном виде связи между генератором и дополнительным колебательным элементом возможно возникновение интересного динамического эффекта, не замеченного ранее классиками – синхронизация автоколебаний собственными колебаниями этого дополнительного элемента.

Введение. Известно, что при обтекании протяженных тел потоком воздуха или воды тела начинают излучать звуки (так называемые «эоловы тона»). Впоследствии было выяснено, что эти звуки вызваны колебаниями обтекаемых тел, обусловленными образованием за ними некоторой вихревой структуры, которая в определенном, довольно широком, диапазоне скоростей обтекания (чисел Рейнольдса) является близкой к периодической. Такая структура называется «дорожкой Кармана» [1]. Возникновение дорожки Кармана за обтекаемым телом при определенных условиях приводит к возбуждению интенсивных автоколебаний этого тела. Явление возбуждения таких автоколебаний мы будем называть срывным флаттером, несмотря на то, что в некоторых книгах (см., например, [2, 3]) различают срывной флаттер, когда колебания аэродинамических сил порождаются колебаниями тела, и вынужденные колебания («ветровой резонанс», когда дорожка Кармана существует и при обтекании неподвижного тела. Мы объединяем оба явления одним названием потому, что оба они представляют собой возбуждение автоколебаний.

Чаще всего срывной флаттер возникает тогда, когда одна из собственных частот колебаний тела близка или кратна частоте срыва вихрей с этого же тела в случае, когда оно неподвижно. Срывной флаттер наблюдался неоднократно у целого ряда технических сооружений, например, многих подвесных мостов, стальных заводских труб, винтов вертолетов, перископов подводных лодок, лопаток компрессоров, турбин в турбореактивных двигателях, опущенных с кораблей тросов в океане и т.п. [4, 5, 2, 7-11]. Известно также, что срывной флаттер является причиной многих технических катастроф. Наиболее известной из них является так называемая Тако́мская катастрофа, произошедшая в 1940 году [5, 6].

Экспериментальные исследования срывного флаттера и снимки ряда вызванных им катастроф, например, заимствованный из [6] кадр из фильма о катастрофе Тако́мского моста (рис. 1), демонстрирующий его состояние за полчаса до разрушения [5, 6], показывают, что преобладающими при флаттере являются крутильные колебания тела, а изгибная составляющая является малой. Этим срывной флаттер существенно отличается от значительно более широко известного изгибно-крутильного флаттера, являвшегося основной причиной катастроф самолетов на заре их появления.

Следует заметить, что теоретических работ, связанных с явлением срывного флаттера, очень мало, а последовательная строгая теория просто отсутствует. По-

видимому, это объясняется большой сложностью проблемы и тем, что при полете самолетов этот вид флаттера встречается редко [2], и поэтому им занимались не очень интенсивно. В детальной монографии [2] написано: «Классический тип флаттера связан с потенциальным потоком и обычно, но не обязательно, включает взаимодействие двух или более степеней свободы. Неклассический тип флаттера, который до сих пор трудно анализировать на чисто теоретической основе, может иметь место при сорванном потоке, периодических срывах потока с прилеганием его вновь...»¹



Рис.1. Кадр из фильма о катастрофе Такоумского моста

По нашему мнению, основная трудность теории срывного флаттера лежит в строгом описании спутной струи позади обтекаемого тела, возникающей при срыве вихрей. В той или иной мере срывной флаттер рассматривается в книгах [2-11].

В большинстве имеющихся работ явление срывного флаттера объясняют как возникновение вынужденных резонансных колебаний под действием периодической силы, вызванной срывом вихрей и имеющей заданную частоту, зависящую от скорости потока, размеров и формы обтекаемого тела. Частота этой силы определяется из условия постоянства так называемого числа Струхала [13].

В первую очередь такое объяснение вступает в противоречие с известными экспериментальными данными относительно возникновения срывного флаттера достаточно длинных тросов, обтекаемых течениями, имеющими различную скорость в разных точках троса. Это противоречие связано с тем, что срывной флаттер не является вынужденными колебаниями, а представляет собой единый автоколебательный процесс. Поскольку сам процесс срыва вихрей по многим признакам является автоколебательным [14], а обтекаемое тело представляет собой колебательную нагрузку с одной или несколькими собственными частотами, то явление срывного флаттера, по нашему мнению, должно быть подобно процессу автоколебаний в системе, содержащей как активные, так и пассивные колебательные элементы.

¹ Следует, правда, отметить, что термин «потенциальный поток» здесь является не вполне удачным, потому что в потенциальном безграничном потоке идеальной жидкости никакого флаттера быть не может из-за равенства нулю суммы всех аэродинамических сил (парадокс Даламбера) [12].

Классическим примером такой системы является генератор с дополнительным колебательным контуром [15-18].

К признакам, указывающим на автоколебательный характер процесса срыва вихрей с обтекаемого тела, можно отнести следующие:

1. Пульсации скорости и давления в дорожке Кармана имеют довольно узкий спектр с ярко выраженным максимумом.

2. Процесс срыва вихрей с обтекаемого тела может быть синхронизован, если возбудить колебания этого тела на некоторой заданной частоте, приблизительно кратной частоте срыва вихрей с неподвижного тела [19-23], причем характер зависимости частоты срыва вихрей с колеблющегося тела от расстройки между частотой колебаний тела и частотой срыва вихрей с неподвижного тела полностью совпадает с характером хорошо известной зависимости частоты синхронных колебаний генератора от расстройки между частотой свободных колебаний и частотой внешней силы [14]. Следует отметить, что, как и в генераторах, синхронизация может происходить не только на основной частоте, но и на ее гармониках и субгармониках.

1. Основные уравнения. В настоящей работе мы рассмотрим явление срывного флаттера на простейшей модели колебаний упругого кругового цилиндра длины l , помещенного перпендикулярно потоку и закрепленного на концах (рис. 2).

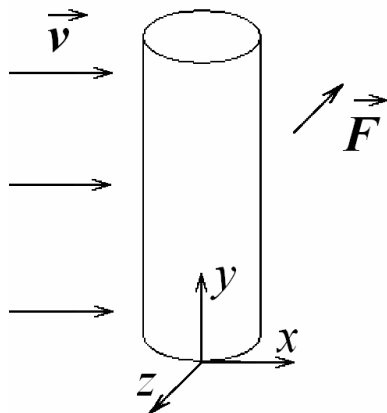


Рис.2

Обтекание кругового цилиндра рассмотрено в книгах [9, 11] и статьях [21, 24]. В [9] предполагается, что цилиндр поддерживается пружиной и демпфером. Как уже отмечалось, за обтекаемым цилиндром образуется вихревая дорожка Кармана, [25], которая в диапазоне чисел Рейнольдса $40 < Re < 150$ является регулярной, а при $150 < Re < 300$ - турбулентной. При $300 < Re < 2 \cdot 10^5$ дорожка Кармана снова становится близкой к регулярной, но с турбулентными всплесками. Затем в некоторой области при $Re > 5 \cdot 10^6$ снова наблюдается доминирующая частота срыва вихрей [26]. Заметим, что такое чередование областей различного поведения при изменении параметра характерно для хаотических автоколебательных систем [27,14].

В частности, область $300 < Re < 2 \cdot 10^5$, по-видимому, может рассматриваться как область перемежаемости. Сказанное лишний раз свидетельствует, что образование дорожки Кармана представляет собой автоколебательный процесс. Ниже мы будем рассматривать только область значений числа Рейнольдса, где срыв вихрей является близким к периодическому.

При срывном обтекании цилиндра в направлении оси x со скоростью V , одинаковой для всех сечений цилиндра², на это сечение действуют периодическая (или близкая к периодической) подъемная сила $F_{kz}(t)$, направленная вдоль оси z , и сила лобового сопротивления $F_{rx}(t)$, направленная вдоль оси x навстречу потоку и представляющая собой сумму двух составляющих: не зависящей от времени (или медленно меняющейся со временем) и периодической (или близкой к периодической) с периодом, вдвое меньшим, чем период подъемной силы. В случае неподвижного цилиндра в широком диапазоне чисел Рейнольдса частота подъемной силы близка к

² Предположение о том, что все сечения цилиндра обтекаются с одинаковой скоростью, не принципиально. Задача может быть решена, с использованием, например, метода Галеркина, и в случае, когда это предположение не выполняется.

частоте срыва вихрей с поверхности цилиндра ω_v , а частота силы лобового сопротивления близка к $2\omega_v$ [21]. Разница периодов подъемной силы и силы лобового сопротивления возникает из-за того, что частота подъемной силы определяется расстоянием между вихрями только вдоль одной из сторон дорожки Кармана 2λ , тогда как частота силы лобового сопротивления определяется расстоянием между вихрями вдоль обеих сторон дорожки Кармана λ (см. рис. 3).

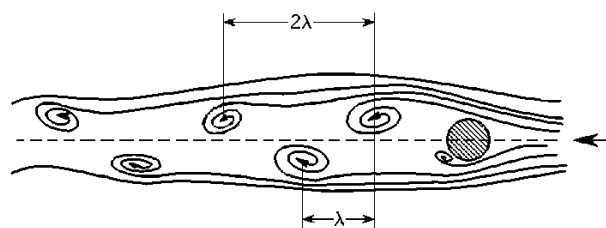


Рис. 3

Частота ω_v связана с числом Струхали St и скоростью обтекания выражением $\omega_v = 2\pi St/DV$ где D - диаметр цилиндра. Эксперименты показывают, что при $40 < Re < 150$ число Струхали растет, затем становится приблизительно постоянным и равным 0.2, а далее снова начинает расти. В области $2 \cdot 10^5 < Re < 5 \cdot 10^6$ вихревая

дорожка является сильно турбулентной, так что число Струхали определить невозможно. Далее, при $Re > 5 \cdot 10^6$ число Струхали $St \approx 0.3$. Все сказанное отражено на рис. 4, заимствованном из [11]).

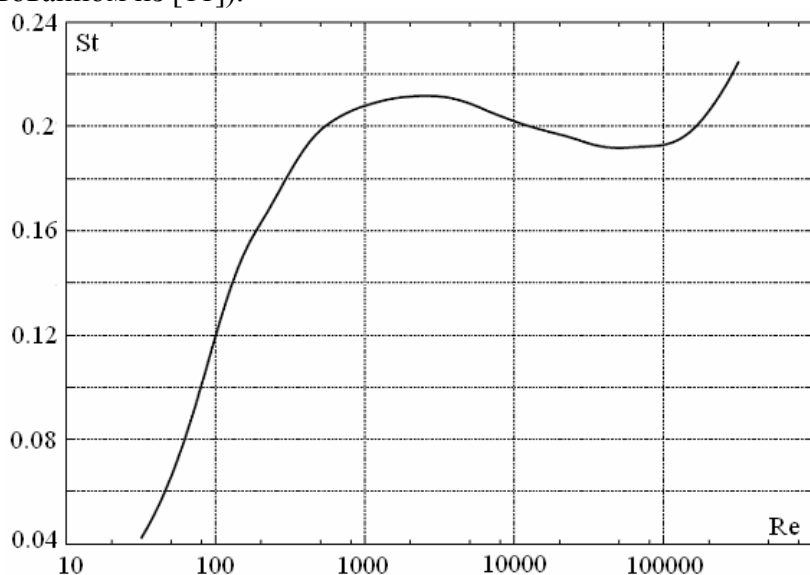


Рис. 4: Зависимость числа Струхали от числа Рейнольдса при поперечном обтекании неподвижного цилиндра с круглым сечением

Уравнения, позволяющие строго описать подъемную силу и силу лобового сопротивления в случае срывного обтекания, насколько нам известно, в литературе отсутствуют. В основном приводятся только выражения для их амплитуд и частоты [9, 24, 21, 6, 11].

Амплитуды сил $F_{kz}(t)$ и $F_{rx}(t)$ во всех известных книгах по аэроупругости (см., например, [11], стр. 307) находятся из соображений размерности. Соответствующие формулы можно записать в виде

$$A_{kz} = c_k(Re) S_{yz} \frac{\rho V^2}{2}, \quad A_{rx} = c_r(Re) S_{yz} \frac{\rho V^2}{2}, \quad (1)$$

где $c_k(Re)$ и $c_r(Re)$ – коэффициенты, зависящие от степени обтекаемости тела (чем хуже обтекаемость, тем больше значения c_k и c_r), и от числа Рейнольдса, S_{yz} — площадь

проекции тела на плоскость yz , перпендикулярную направлению потока. Заметим, что коэффициент $c_r(\text{Re})$ всегда много меньше, чем $c_k(\text{Re})$, т.е. переменная составляющая силы лобового сопротивления мала по сравнению с подъемной силой.

Для колеблющегося цилиндра к силам $F_{kz}(t)$ и $F_{rx}(t)$ следует добавить силы, связанные с нестационарностью обтекания. Эти силы определяют присоединенную массу цилиндра и дополнительный коэффициент затухания. Поэтому их учет, по-видимому, не имеет принципиального значения. Кроме того, в случае колеблющегося цилиндра коэффициенты $c_k(\text{Re})$ и $c_r(\text{Re})$ зависят от амплитуды колебаний.

Рассматривая колеблющийся цилиндр как струну, запишем уравнения его колебаний вдоль осей x и z в виде

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u_x}{\partial t} - T \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{F_{rx}(t)}{A_{rx}}, \quad \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u_z}{\partial t} - T \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \frac{F_{kz}(t)}{A_{kz}}, \quad (2)$$

где $u_x(y, t)$ и $u_z(y, t)$ — смещения цилиндра вдоль осей x и z , отнесенные к амплитудам A_{rx} и A_{kz} соответственно; ρ_s — линейная плотность струны; T — натяжение струны; β — коэффициент затухания. Если цилиндр закреплен на концах, то граничные условия имеют вид: $u_x(0, t), u_x(l, t) = 0, u_z(0, t) = 0, u_z(l, t) = 0$.

Принимая во внимание, что силы $F_{kz}(t)$ и $F_{rx}(t)$ отличны от нуля только при $0 \leq y \leq l$ и частота силы сопротивления вдвое больше частоты подъемной силы, представим $F_{kz}(t)$ и $F_{rx}(t)$ в виде

$$F_{rx}(t) = A_{rx} \sum_{j=1}^{\infty} f_{rx}^{(j)}(t) \sin\left(\frac{(4j-1)\pi}{l} y\right), \quad (3)$$
$$F_{kz}(t) = A_{kz} \sum_{j=1}^{\infty} f_{kz}^{(j)}(t) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{l} y\right),$$

где $f_{rx}^{(j)}(t) = \frac{F_{rx}(t)}{(4j-1)\pi A_{rx}}, f_{kz}^{(j)}(t) = \frac{F_{kz}(t)}{(4j-1)\pi A_{kz}}$.

Если частота срыва вихрей с колеблющегося цилиндра близка к n -й собственной частоте колебаний цилиндра, то в разложениях (3) можно оставить только по одному члену:

$$F_{kz}(t) = A_{kz} f_{kz}^{(n)}(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{l} y\right), \quad F_{rx}(t) = A_{rx} f_{rx}^{(2n)}(t) \sin\left(\frac{(4n-1)\pi}{l} y\right) \quad (4)$$

Решая далее уравнения (2) методом разложения по собственным функциям колебаний закрепленной на концах струны без затухания и сохраняя только по одному члену разложения, получаем

$$u_x(y, t) = U_x^{(j)}(t) \sin\left(\frac{(4j-1)\pi}{l} y\right), \quad u_z(y, t) = U_z^{(j)}(t) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{l} y\right)$$

При этом для функций $U_z^n(t)$ и $U_x^{2n}(t)$ находим следующие уравнения:

$$\frac{d^2 U_z}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_z}{dt} + \omega_n^2 U_z = \frac{f_{kz}^n(t)}{\rho_s}, \quad \frac{d^2 U_x}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_x}{dt} + 4\omega_n^2 U_x = \frac{f_{rx}^{2n}(t)}{\rho_s}, \quad (5)$$

где $\delta = \beta / 2\rho_s \square \omega_n$.

Из-за того, что частоты колебаний в направлениях x и z различны, суммарные колебания будут иметь довольно сложный характер. Более того, в диапазонах чисел Рейнольдса, где процесс срыва вихрей является случайным, они также будут случайными.

Как уже указывалось, процесс срыва вихрей по многим признакам имеет

автоколебательный характер, обусловленный образованием за обтекаемым телом спутной струи. Поскольку какие-либо уравнения, позволяющие строго вывести выражения для сил $F_{kz}(t)$ и $F_{rx}(t)$ в литературе отсутствуют, для их вычисления мы будем использовать модельные уравнения автоколебаний. Используя модель автоколебаний в виде генератора Ван дер Поля [14] и принимая во внимание экспериментальный факт, что колебания цилиндра могут синхронизовать срыв вихрей, запишем следующие уравнения для $f_{rx}(t)$ и $f_{kz}(t)$:

$$\frac{d^2 f_{kz}}{dt^2} - \mu(1 - 4f_{kz}^2) \frac{df_{kz}}{dt} + \omega_n^2 f_{kz} = m_1 U_z, \quad \frac{d^2 f_{rx}}{dt^2} - \mu(1 - 4f_{rx}^2) \frac{df_{rx}}{dt} + 4\omega_n^2 f_{rx} = m_2 U_x, \quad (6)$$

где μ — малый параметр, $m_{1,2}$ — коэффициенты связи, которые предполагаются малыми.

Отметим, что члены $m_1 U_z$ и $m_2 U_x$ отвечают за синхронизацию срыва вихрей колебаниями цилиндра. В стационарном режиме из уравнений (6) следует, что в случае неподвижного цилиндра

$$F_{kz} = A_{kz} f_{kz} \approx A_{kz} \cos(\omega_n t), \quad F_{rx} = A_{rx} f_{rx} \approx A_{rx} \cos(2\omega_n t + \varphi), \quad (7)$$

где φ — некоторый сдвиг фаз. Заметим, что формулы (7) находятся в полном соответствии с выражениями для подъемной силы и силы лобового сопротивления, приведенными в работах [21].

Система уравнений (5), (6) описывает две независимых автоколебательных системы, каждая из которых обладает двумя степенями свободы. На языке радиофизики каждая автоколебательная система представляет собой генератор с дополнительным колебательным контуром, связанным с основным контуром через емкость [17]. Следует отметить, что за счет колебаний мгновенной скорости обтекания при колебаниях цилиндра уравнения (6) должны стать нелинейно связанными. Однако здесь мы этой связью будем пренебрегать.

Задача об автоколебаниях в подобном генераторе, но с индуктивной связью между контурами, впервые была рассмотрена А.А. Андроновым и А.А. Виттом методом малого параметра Пуанкаре [15] и С.П. Стрелковым качественными методами [16]. Была найдена область затягивания и обнаружено явление гашения автоколебаний, возможное в некоторой области параметров.

Рассмотрим систему, описываемую первыми из уравнений (5) и (6). Для приближенного решения этой системы используем метод усреднения, разработанный Н.Н. Боголюбовым [28] и развитый Ю.А. Митропольским [29]. Мы используем этот метод в форме, изложенной в [18]. Для этого перепишем уравнения (5), (6), введя условный малый параметр ε и безразмерное время $\tau = \omega t$, где ω — частота автоколебаний:

$$\begin{aligned} \dot{f}_{kz} + f_{kz} &= \varepsilon \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{\tilde{\omega}^2} \right) f_{kz} + \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}^2} U_z + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\omega}} (1 - 4f_{kz}^2) \dot{f}_{kz} \right], \\ \ddot{U}_z + U_z &= \varepsilon \left[\frac{f_{kz}(t)}{\rho_s \omega_n^2 \tilde{\omega}^2} + \left(1 - \frac{1}{\tilde{\omega}^2} \right) U_z + \frac{2\tilde{\delta}}{\tilde{\omega}} \dot{U}_z \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\tilde{\mu} = \mu / \omega_n$, $\tilde{\delta} = \delta / \omega_n$, $\tilde{m}_1 = m_1 / \omega_n^2$, $\xi = \omega_v / \omega_n$ — расстройка частот срыва вихрей и цилиндра, $\tilde{\omega} = \omega / \omega_n$ — расстройка между частотой автоколебаний ω и собственной частотой колебаний цилиндра; точки означают дифференцирование по безразмерному времени τ .

Перейдем в уравнениях (8) к новым переменным $A_{1,2}(\tau)$, $\varphi_{1,2}(\tau)$, определяемым уравнениями

$$\begin{aligned} f_{kz}(\tau) &= A_1(\tau) \cos(\tau + \varphi_1(\tau)), & \dot{f}_{kz}(\tau) &= -A_1(\tau) \sin(\tau + \varphi_1(\tau)), \\ U_z(\tau) &= A_2(\tau) \cos(\tau + \varphi_2(\tau)), & \dot{U}_z(\tau) &= -A_2(\tau) \sin(\tau + \varphi_2(\tau)) \end{aligned} \quad (9)$$

Записав уравнения (8) в этих переменных и усредняя их по быстрому времени τ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{\varepsilon}{2\tilde{\omega}} \left(\tilde{\mu}(1 - A_1^2)A_1 - \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}} A_2 \sin \varphi \right), & \dot{A}_2 &= \frac{\varepsilon}{2\tilde{\omega}} \left(2\tilde{\delta}A_2 - \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{\omega}} A_1 \sin \varphi \right), \\ \dot{\varphi}_1 &= -\frac{\varepsilon}{2A_1} \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{\tilde{\omega}^2} \right) A_1 + \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}^2} A_2 \cos \varphi \right], & \dot{\varphi}_2 &= -\frac{\varepsilon}{2A_2} \left[\left(1 - \frac{1}{\tilde{\omega}^2} \right) A_2 + \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{\omega}^2} A_1 \cos \varphi \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз между колебаниями подъемной силы и колебаниями цилиндра. Отсюда легко найти систему уравнений для определения стационарных амплитуд A_1, A_2 , разности фаз φ и относительной частоты синхронных автоколебаний ω .

На рис. 5 приведены зависимости относительной частоты $(\omega/\omega_2 - 1)$ автоколебаний в синхронном режиме и разностей фаз φ между колебаниями в колебательных контурах 1 и 2 от расстройки $(\xi - 1)$ между частотами для $\delta/\omega_2 = 0.1$ и $m_2/\omega_2^2 = 1$. Кривые 1 и 3 построены при $m_1/\omega_2^2 = 0.05$, а кривые 2 и 4 — при $m_1/\omega_2^2 = 0.15$.

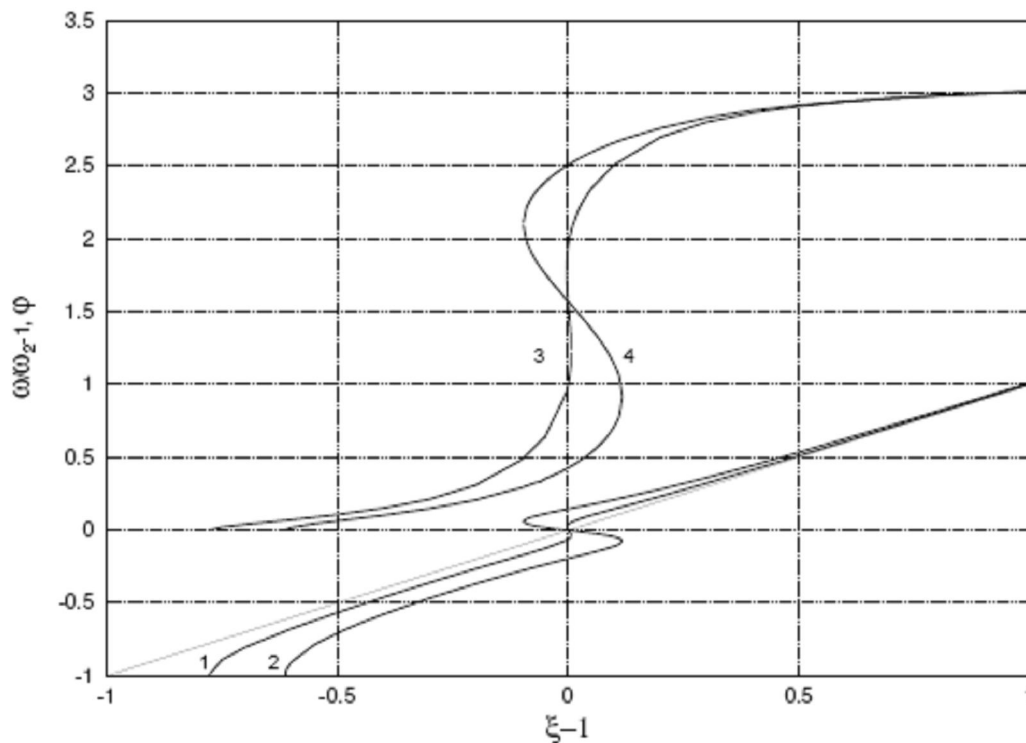


Рис.5

Из рис.5 видно, что при расстройках ξ , близких к -1, частота синхронных колебаний ω равна собственной частоте ω_2 дополнительного колебательного контура. Указанный факт можно трактовать как синхронизацию частоты автоколебаний собственными колебаниями дополнительного контура. Такая синхронизация возможна, поскольку дополнительный контур подсоединен к системе с обратной связью,

обладающей свойством подстройки частоты. Как и следовало ожидать, область синхронизации тем больше, чем больше произведение коэффициентов связи (ср. кривые 1 и 2). Заметим, что в работах К.Ф. Теодорчика эта синхронизация не была замечена. При увеличении расстройки частота автоколебаний приближается к частоте колебаний генератора в отсутствие дополнительного контура, но не монотонно. В окрестности $\xi=1$ происходит затягивание частоты, при котором частота автоколебаний зависит от начального значения частоты и от направления ее изменения. В этой области результаты качественно совпадают с изложенными в [17].

Приведенные на рис. 5 зависимости построены без учета устойчивости найденных решений. Уравнения (5), (6) позволяют провести исследование устойчивости. Устойчивые участки зависимостей, показанных на рис. 5, приведены на рис. 6. Мы видим, что за счет неустойчивости некоторые участки зависимостей, представленных на рис. 5, выпадают.

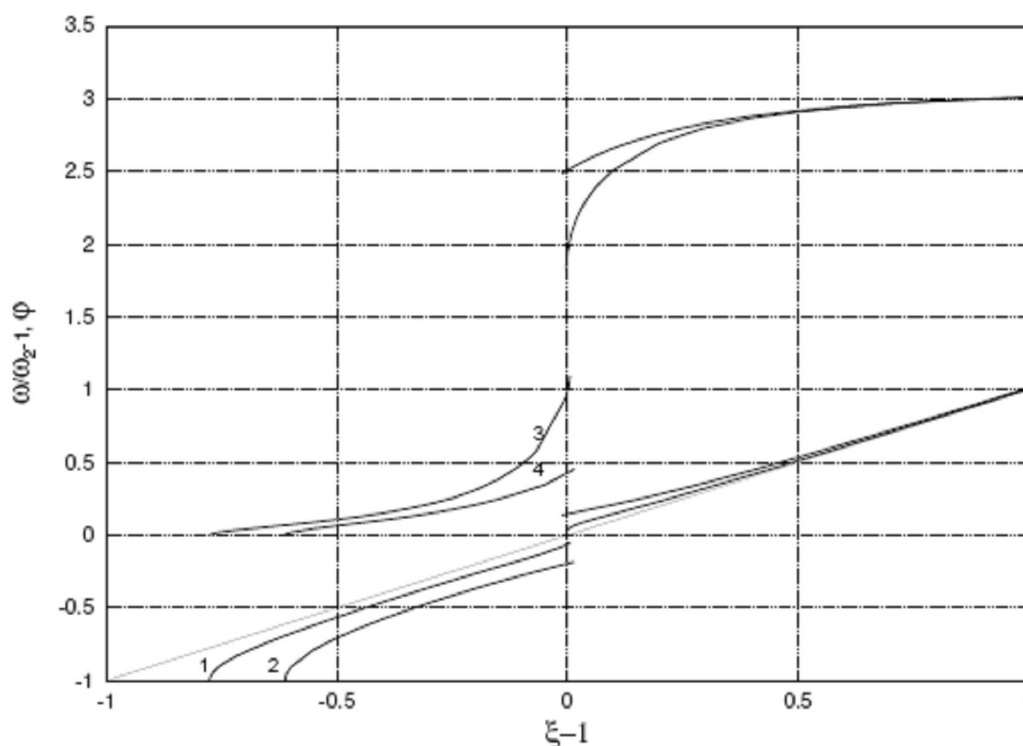


Рис. 6

В заключение заметим, что найденный здесь эффект синхронизации частоты автоколебаний собственными колебаниями дополнительного контура, связанного с основным через емкость, не имеет места в случае индуктивно связанных контуров. По-видимому, именно этим можно объяснить тот факт, что этот эффект не нашел отражения в литературе.

Заключение. Итак, использование модельных уравнений для срыва вихрей с поверхности колеблющегося цилиндра позволяет рассчитать амплитуды и частоты автоколебаний, возникающих за счет срыва вихрей с поверхности упругого цилиндра, т.е. решить задачу о срывном флаттере.

Литература

1. Karman Th. von. Uber den Mechanismus de s Widerstandes, den ein bewegter in einer Flu"ssigkeit erf"ahrt. G"ottingen Nachrichten, 1911, pp. 178-179; 1912, С. 186.

2. Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л. Аэроупругость. Москва: ИЛ, 1958, стр. 14, 541.
3. Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. Москва: Транспорт, 1987.
4. Гольденблат И.И. Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений. Москва: Госстройиздат, 1947.
5. Rocard Y. Dynamique G'enerale des Vibrations. Paris, Masson et C^e, Editeurs, 1949.
6. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Москва, Наука, 1979.
7. Рокар И. Неустойчивость в механике. Москва: Ил, 1959.
8. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. Москва: Гостехиздат, 1956.
9. Фын Я.Ц. Введение в теорию аэроупругости. Москва: Физматгиз, 1959.
10. Девнин СИ. Гидроупругость конструкций при отрывном обтекании. Л.: Судостроение, 1975.
11. Фершинг Г. Основы аэроупругости. Москва: Машиностроение, 1984, сс. 304-308.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Москва: Наука, 1986.
13. Strouhal V. von. Uber eine besondere Art der Tonerregung. Ann. Phys., 1878, v.5, No 10, pp.216-251.
14. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. Москва: Наука-Физматлит, 1997.
15. Андронов А.А., Витт А.А. К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы. ЖТФ, 1934, т. 4, в. 1, сс. 122-136.
16. Стрелков СП., Скибарко А.П. Качественное исследование процессов в генераторе по сложной схеме. К теории затягивания по Ван-дер-Поллю. ЖТФ, 1934, т. 4, в. 1, сс. 158-171.
17. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. Москва: Гостехиздат, 1952.
18. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. Москва: Наука, 1980.
19. Richardson E.G. Proc. Phys. Soc. Lond., 1923, vol. 36, p. 53.
20. Павлихина М.А., Смирнов Л.П. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 8, сс. 124-127.
21. Bishop R.E.D., Hassan A.Y. The lift and drag force s on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid . Proc. Royal Soc. (London), 1964, v. A277, pp. 51-75; 32-50.
22. Блюмина Л.Х., Федяевский К.К. Исследование влияния вынужденных колебаний цилиндра в воздушном потоке на механизм срыва вихрей. Известия АН СССР, МЖГ, 1969, № 1, сс. 118-119.
23. Федяевский К.К., Блюмина Л.Х. Гидродинамика отрывного обтекания тел. Москва: Машиностроение, 1977.
24. Bishop R.E.D., Hassan A.Y. The lift and drag force s on a circular cylinder in a flowing fluid . Proc. Royal Soc. (London), 1964, v.A277, pp. 32-50.
25. Karman Th . Uber den Mechanismus des Flu'ssigkeitsund Luftwiderstand s. Phys. Z., Bd. 13, 1912, SS.49-59.
26. Roshko A. Experiments on the flow past a circular Cylinder at very high Reynold s number. J. Fluid Mech ., 1961, vol. 10, pp. 345-356.
27. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. Москва: Наука, 1987.
28. Боголюбов Н.Н. Теория возмущений в нелинейной механике. В сб. Ин-та строит. механики АН УССР, 1950, т. 14, сс. 9-34.

29. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971.

Поступила: 06.05.09.